

МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

**НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**  
**дисципліни**  
**“ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ**  
**МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ”**  
**(для бакалаврів)**

Київ  
ДП «Видавничий дім «Персонал»  
2010

МАУП

## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики та програмування *В. І. Панчуком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 5 від 18.01.06)

Перезатверджено на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (протокол № 6 від 12.03.09)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*

Навчальний курс “Чисельні методи математичної фізики” є одним із завершальних курсів математичної освіти за фахом “Прикладна математика”. Він передбачає викладення важливих засад побудови та аналізу найважливіших чисельних методів розв’язування рівнянь у частинних похідних, які є теоретичним фундаментом математичного моделювання з проблем фізики, механіки суцільного середовища, охорони довкілля тощо.

Метою вивчення дисципліни є актуалізація раніше вивченого слухачами теоретичного матеріалу з математичної фізики, оволодіння методами чисельного розв’язання рівнянь математичної фізики, висвітлення місця і значення цих методів у загальному обчислювальному експерименті з дослідження фізичних процесів, формування практичних умінь і навичок розробки математично-комп’ютерного інструментарію та його використання при розв’язанні певних задач математичної фізики.

Для освоєння матеріалу навчальної програми “Чисельні методи математичної фізики” студенти повинні знати диференціальне та інтегральне числення, аналітичну геометрію, функціональний аналіз, основи варіаційного числення; володіти чисельними методами розв’язання систем алгебричних рівнянь і звичайних диференціальних рівнянь; мати чітке уявлення про постановки задач математичної фізики з початковими та крайовими умовами; вміти визначати власності лінійних операторів і вирішувати для них задачі на власні значення тощо.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні *знати*:

- важливі поняття теорії чисельного розв’язання рівнянь у частинних похідних;
- основні чисельні методи, схеми та обчислювальні алгоритми розв’язання різних типів задач математичної фізики, їх властивості та можливості;

*уміти*:

- будувати та аналізувати найважливіші чисельні методи розв’язання різних типів рівнянь з частинними похідними;
- оцінювати точність та швидкість збіжності скінченно різницевих схем;

**Панчук В. І.** Навчальна програма дисципліни “Чисельні методи математичної фізики” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2010. — 15 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Чисельні методи математичної фізики”, питання для самоконтролю, а також список літератури.

© Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2010  
© ДП «Видавничий дім «Персонал», 2010

- застосовувати обчислювальний апарат для знаходження чисельних розв'язків практично важливих фізичних задач;
- орієнтуватися у виборі необхідної літератури для виконання практичних завдань;
- аналізувати отримані результати чисельних експериментів тощо.

У процесі практичних занять студент повинен також навчитися працювати із сучасними пакетами програм чисельного розв'язання основних типів рівнянь з частинними похідними.

Курс розрахований на підготовку фахівців вищої кваліфікації з напрямку “Прикладна математика”.

**ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН**  
**дисципліни**  
**“ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ”**

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
1	2
	<b>Змістовий модуль I. Попередні відомості та загальні поняття про чисельні методи розв'язання рівнянь математичної фізики</b>
1	Чисельне математичне моделювання фізичних процесів і явищ
2	Скінченно різницевий метод розв'язання рівнянь з частинними похідними
3	Розв'язання рівнянь з частинними похідними методом скінченних елементів і методом прямих
	<b>Змістовий модуль II. Різницеві методи розв'язання задач для параболічних та еліптичних рівнянь</b>
4	Поняття апроксимації, рахункової стійкості та збіжності різницевих схем
5	Різницеві методи розв'язання крайової мішаної задачі Коші для параболічного рівняння з однією просторовою змінною
6	Різницеві схеми підвищеної точності

1	2
7	Економічні різницеві схеми для багатовимірних задач математичної фізики. Схема змінних напрямів
8	Чисельне розв'язання задач для рівняння Пуассона
	<b>Змістовий модуль III. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь гіперболічного типу та інтегральних рівнянь</b>
9	Різницеві схеми розв'язання хвильового рівняння
10	Різницеві схеми для рівняння переносу
11	Метод характеристик
12	Чисельні методи розв'язання інтегральних рівнянь
Разом годин: 162	

**ЗМІСТ**  
**дисципліни**  
**“ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ”**

**Змістовий модуль I. Попередні відомості та загальні поняття про чисельні методи розв'язання рівнянь математичної фізики**

**Тема 1. Чисельне моделювання фізичних процесів і явищ**

Математичні моделі та обчислювальні експерименти для дослідження фізичних процесів і явищ. Основні задачі математичної фізики.

*Література* [1; 6–8; 11; 15]

**Тема 2. Скінченно різницевий метод розв'язання рівнянь з частинними похідними**

Основні етапи реалізації методу. Сітка й сіткова функція. Проблема апроксимації граничних умов. Умови розв'язання різницевих рівнянь. Ітераційні та релаксаційні методи (метод Якобі, метод Зейделя, метод верхньої релаксації, багатосітковий релаксійний метод Федоренка). Прямі методи.

*Література* [1; 3–9; 11; 15]

**Тема 3. Розв'язання рівнянь з частинними похідними методом скінченних елементів**

Суть методу. Дискретизація області визначення розв'язку. Кусково-неперервні функції елементів. Знаходження розв'язку методом скінченних елементів. Композиція загального розв'язку задачі.

*Література* [4; 10–12]

**Змістовий модуль II. Різницеві методи розв'язання задач для параболічних та еліптичних рівнянь**

**Тема 4. Поняття апроксимації, рахункової стійкості та збіжності різницевих схем**

Різницева апроксимація диференціальних операторів у частинних похідних. Похибки апроксимації різницевих схем. Апроксимація граничних і початкових умов. Рахункова стійкість і збіжність різницевої схеми. Методи дослідження стійкості.

*Література* [1; 3–9; 11; 15]

**Тема 5. Різницеві методи розв'язання мішаної задачі для параболічного рівняння з однією просторовою змінною**

Апроксимація параболічного рівняння. Обчислювальні алгоритми. Рахункова стійкість і збіжність явних і неявних схем. Спектральна ознака стійкості.

*Література* [1; 3–9; 11; 15; 16]

**Тема 6. Різницеві схеми підвищеної точності**

Схема Кранка – Ніколсона. Схема Дюфорта – Франкела. Неявні багаточарові схеми.

*Література* [1; 6–9; 11; 16]

**Тема 7. Економічні різницеві схеми для багатовимірної параболічної задачі. Схема змінних напрямів**

Різницеві методи розв'язання мішаної задачі для параболічного рівняння з двома просторовими змінними. Явні й неявні різницеві схеми. Схеми змінних напрямів для багатовимірної задачі. Метод Пісмена – Речфорда.

*Література* [1; 3–9; 11; 13; 16]

**Тема 8. Розв'язання задач для рівняння Пуассона**

Задача Дирихле для одновимірної рівняння Пуассона. Одновимірна задача Неймана. Задача Дирихле для двовимірної рівняння Пуассона. Метод установлення для розв'язання задач еліптичного типу.

*Література* [1; 3–9; 11; 15; 16]

**Змістовий модуль III. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь гіперболічного типу та інтегральних рівнянь**

**Тема 9. Різницеві схеми розв'язання хвильового рівняння**

Явна різницева схема та її збіжність і стійкість. Неявна різницева схема, її збіжність і стійкість.

*Література* [1; 3–9; 11; 15; 16]

**Тема 10. Різницеві схеми для рівняння переносу**

Одновимірне рівняння руху. Поняття схемної в'язкості. Різницеві схеми для двовимірної рівняння переносу зі змінними коефіцієнтами.

*Література* [6; 11; 13]

**Тема 11. Метод характеристик**

Сутність методу. Чисельні методи розв'язання системи гіперболічних диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язання задачі Коші. Розв'язання задачі Гурса. Перша мішана задача. Друга мішана задача. Приклади.

*Література* [6–9; 11]

**Тема 12. Чисельні методи розв'язання інтегральних рівнянь**

Основні класи інтегральних рівнянь. Чисельне розв'язання рівняння з виродженим ядром. Метод квадратурних сум. Метод послідовних наближень. Метод апроксимуючих функцій. Метод колокацій. Метод найменших квадратів. Метод моментів. Висновки.

*Література* [2; 3; 11]

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Роль чисельних методів у дослідженні фізичних процесів та явищ.
2. Розкажіть про область застосування обчислювальних методів математичної фізики.
3. Назвіть основні проблеми, які виникають при застосуванні обчислювальних методів математичної фізики.
4. Основні підходи до чисельного розв'язання задач математичної фізики.
5. Основні постановки різницевої задачі математичної фізики.
6. Основні етапи реалізації різницевого методу.
7. Основна ідея сіткового методу.
8. Сітка й сіткова функція.
9. Що називають різницевою схемою та її шаблоном?
10. Розгляньте основну ідею сіткового методу на прикладі задачі Дирихле для рівняння Пуассона.
11. Різницева апроксимація диференціальних операторів у частинних похідних.
12. Назвіть основні скінченно різницеві формули.
13. Отримайте скінченно різницеві формули шляхом розвинення функції в ряди Тейлора.
14. Виведіть інтегральним методом скінченно різницевої аналог модельного рівняння переносу.
15. Причини виникнення проблеми апроксимації межових умов.
16. Які ви знаєте способи розв'язання проблеми межових умов?
17. Особливості матриць алгебраїчної (різницевої) системи, до якої зводяться диференціальні рівняння та відповідні граничні умови.
18. Умови розв'язання різницевого аналога задачі Дирихле для загального еліптичного рівняння.
19. Принцип максимуму.
20. Ітераційні методи розв'язання різницевої крайових задач і необхідність їх використання.
21. У чому відмінність методів Якобі та Зейделя?
22. Що ви знаєте про метод верхньої релаксації?
23. Сутність багатосіткового релаксаційного методу Федоренка.
24. Особливості релаксаційних методів.
25. Прямі методи розв'язання еліптичної крайової задачі. Розкажіть про стаціонарні ітераційні методи.
26. Нестационарні ітераційні методи.
27. Метод мінімальних нев'язок.
28. Суть методу спряжених градієнтів.
29. Розв'яжіть одновимірну задачу Дирихле для рівняння Пуассона методом факторизації (методом прогону).
30. Метод матричного прогону, переваги та недоліки його використання.
31. Сутність методу скінченних елементів.
32. Послідовність етапів реалізації методу скінченних елементів.
33. Застосування методу скінченних елементів до розв'язання рівнянь із частинними похідними.
34. Як проводиться дискретизація області визначення розв'язку у методі скінченних елементів і як вибираються апроксимуючі функції.
35. Методом скінченних елементів знайдіть наближений розв'язок задачі про розподіл температури у стрижні довжиною  $l$  при заданому збуренні  $f(x)$  та граничних умовах  $T(0, t) = T_1, T(l, t) = T_2$ , де  $T_1, T_2$  — конкретно задані числові величини.
36. Композиція загального розв'язку задачі.
37. Дати порівняльну характеристику методам: скінченних різниці і скінченних елементів.
38. Як визначають похибку апроксимації різницевої схеми?
39. Рахункова стійкість різницевої схеми.
40. Які ви знаєте основні способи дослідження рахункової стійкості різницевої схеми?
41. Поняття збіжності різницевої схеми.
42. Основна теорема про збіжність різницевої схеми.
43. Приклади явних і неявних різницевої схем для рівняння теплопровідності однорідного стрижня.
44. Похибка апроксимації різницевої схеми для рівняння теплопровідності з постійними коефіцієнтами.
45. Стійкість за початковими даними (за правою частиною) різницевої схеми для рівняння теплопровідності з постійними коефіцієнтами.
46. Перевірте за методом Неймана (за спектральною ознакою) стійкість явної схеми

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} = a^2 \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 1, \dots, M.$$

47. Дослідіть властивості різницевої схеми Річардсона:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{\tau} = a^2 \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2} + f_m^n, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots$$

48. Визначте, чи стійка попередня схема.  
 49. Збіжність і точність явних і неявних різницевих схем для рівняння теплопровідності з постійними коефіцієнтами.  
 50. Крайові умови третього роду для рівняння теплопровідності.  
 51. Запишіть схему Кранка – Ніколсона для параболічного рівняння.  
 52. Визначте порядок апроксимації схеми Кранка – Ніколсона.  
 53. Дослідіть її на стійкість.  
 54. Випишіть схему Дюфорта – Франкела для параболічного рівняння.  
 55. Вкажіть на її властивість.  
 56. Дослідіть на стійкість схему Дюфорта – Франкела.  
 57. Розкажіть про явні схеми для параболічного рівняння з двома змінними.  
 58. Розкажіть про неявні схеми для параболічного рівняння з двома змінними.  
 59. Різницеві схеми розщеплення, їх побудова, властивості та області застосування.  
 60. Побудова, властивості та області застосування схем розщеплення.  
 61. Поняття про економічність схем.  
 62. Сутність методу Пісмента – Речфорда для багатовимірних нестационарних задач.  
 63. Ефективність методу Пісмента – Речфорда.  
 64. Побудуйте різницевий аналог задачі:  

$$u_{xx} + u_{yy} = -4u \text{ при } (x, y) \in G = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$u(x, y) = \sin 2y + \cos x \text{ при } (x, y) \in \Gamma = \{(x, y): (0 \leq x \leq 1, 0); (0 \leq x \leq 1, 1); (0, 0 \leq y \leq 1); (1, 0 \leq y \leq 1)\}.$$
  
 65. Запишіть обчислювальний алгоритм для знаходження наближеного розв'язку різницевого аналога попередньої задачі.

66. Побудуйте блок-схему реалізації алгоритму на ЕОМ, знайдіть розв'язок.  
 67. Стационарні розв'язки еволюційних задач.  
 68. Доведіть стійкість різницевої задачі Дирихле для рівняння Пуассона.  
 69. Поясніть суть методу асимптотичного стаціонарування (установлення).  
 70. Вкажіть на область застосування методу установлення.  
 71. Розкажіть, що ви знаєте про метод прямих.  
 72. Области його застосування.  
 73. Постановка різницевої задачі для хвильового рівняння.  
 74. Обчислення похибок апроксимації різницевої задачі для хвильового рівняння.  
 75. Дослідіть стійкості явної різницевої схеми для рівняння коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0.$$

76. Схема “хрест” для одновимірної гіперболічної задачі.  
 77. Умова Куранта для різницевої схеми “хрест”.  
 78. Розв'яжіть різницевим методом задачу коливання струни:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

з початковими даними

$$u(x, t) = \sin(\pi x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

і граничними умовами

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

79. Різницеві аналоги рівняння переносу та їх особливості.  
 80. Дивергентні схеми для рівняння переносу.  
 81. На які класи поділяються інтегральні рівняння?  
 82. Основні сфери застосування інтегральних рівнянь.  
 83. У чому полягає сутність методу квадратурних сум?  
 84. Прямі та ітераційні методи розв'язання інтегральних рівнянь.  
 85. Знайдіть наближені розв'язки інтегральних рівнянь методом квадратурних сум із використанням квадратурних формул чи-

сельного інтегрування прямокутників, трапецій, формули Сімпсона:

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 \varphi(t) dt;$$

$$\varphi(x) = x + 4 \int_0^1 x^2 t^2 \varphi(t) dt;$$

$$\varphi(x) = (5/6)x + 1/2 \int_0^1 xt \varphi(t) dt.$$

Проаналізуйте одержані результати.

86. Знайдіть наближений розв'язок інтегральних рівнянь методом квадратурних сум із використанням квадратурної формули Сімпсона

$$\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2) \varphi(t) dt;$$

$$\varphi(x) = 1 + (4/3)x + \int_{-1}^1 x t^2 - x \varphi(t) dt;$$

87. Знайдіть наближений розв'язок інтегральних рівнянь методом послідовних наближень. Розв'язок визначте з точністю не меншою, ніж 0,01:

$$\varphi(x) = (1/2)(e^{-x} + 3x - 1) + \int_0^1 (e^{-t} - 1)x \varphi(t) dt;$$

$$\varphi(x) = x + \cos(x) + \int_0^1 x(\sin(t) - 1) \varphi(t) dt;$$

$$\varphi(x) = \sin(x) + \int_0^1 (1 - x(\cos(t) - 1)) \varphi(t) dt.$$

88. Основні методи апроксимуючих функцій, що використовуються для наближеного розв'язання інтегральних рівнянь. Як залежить збіжність наближеного розв'язку від вибору апроксимуючих функцій?

89. Знайдіть наближений розв'язок інтегральних рівнянь методом колокацій, найменших квадратів і моментів:

$$\varphi(x) = 1 - x + \int_0^1 x \varphi(t) dt;$$

$$\varphi(x) = x + \int_0^1 x^2 t \varphi(t) dt.$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

### Основна

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — 1987.
2. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — К.: Наук. думка, 1986. — 542 с.
3. Годунов С. К., Рябенький Д. С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1977.
4. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. — М.: Гостехиздат, 1962.
5. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А. Методы вычислений. — К.: Высш. шк., 1977. — 408 с.
6. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1982.
8. Самарский А. А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1982. — 272 с.
9. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
10. Фельдман Л. П., Петренко А. Г., Дмитриева О. А. Чисельні методи в інформатиці. — К., 2006. — 480 с.

### Додаткова

11. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
12. Марчук Г. И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1981. — 263 с.
13. Сильвестр П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. — М.: Мир, 1986. — 229 с.

14. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963.
15. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1985.
16. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967.

## ЗМІСТ

Пояснювальна записка .....	3
Тематичний план дисципліни “Чисельні методи математичної фізики” .....	4
Зміст дисципліни “Чисельні методи математичної фізики” .....	5
Питання для самоконтролю .....	8
Список літератури .....	12

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*  
 Редактор *Т. М. Тележенко*  
 Комп'ютерне верстання *А. П. Нечипорук*

Зам. № ВКЦ-4704

Формат 60×84/<sub>16</sub>. Папір офсетний.  
 Друк ротатійний трафаретний. Наклад 30 пр.  
 Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)  
 03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП  
 ДП «Видавничий дім «Персонал»  
 03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX  
 Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
 суб'єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008