МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

# МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

**з дисципліни**

# "ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ"

**(для бакалаврів)**

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2013

Підготовлено кандидатом фізико-математичних наук, доцентом кафедри прикладної математики та програмування *М. П. Дяченко*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 2 від 30.10.08)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*

**Дяченко М. П.** Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи з дисципліни "Функціональний аналіз" (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2013. — 35 с.

Методична розробка містить пояснювальну записку, тематичний зміст дисципліни, а також список рекомендованої літератури.

Призначена для самостійної роботи студентів денної форми навчання, які вивчають дисципліну "Функціональний аналіз".

## *ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА*

1.1. Методичні рекомендації складені відповідно до навчальної програми з дисципліни “Функціональний аналіз” для бакалаврів за напрямом “Прикладна математика”. В документі викладено зміст ключових теоретичних питань курсу, проілюстрованих зразками розв’язаних типових практичних завдань, контрольних завдань для самостійного опрацювання та контрольних питань на перевірку глибини засвоєння програмного матеріалу. Для глибшого самостійного опрацювання теоретичного матеріалу викладення супроводжується посиланнями на відповідні літературні джерела.

1.2. Предметом курсу є узагальнення основних понять і методів класичного аналізу та суміжних галузей алгебри та геометрії на об’єкти більш загальної і складної природи, що дозволяє розглядати з єдиної точки зору ізольовані, на перший погляд, досягнення різних математичних дисциплін та встановлювати нові факти, які стають здобутком цілого ряду дисциплін одночасно. У даному курсі вивчаються метричні, топологічні, лінійні нормовані, банахові, евклідові, гільбертові простори, простори лінійних функціоналів та операторів, їх властивості та зв’язок із класичними розділами математики, а також множини в цих просторах та їх відображення. Викладення курсу базується на таких дисциплінах: математичний аналіз, алгебра та геометрія, дискретна математика.

1.3. Метою курсу є вивчення основних розділів функціонального аналізу, встановлення внутрішнього звязку між дисциплінами, що складають основу математичної підготовки бакалавра і формування відповідної теоретичної бази до застосування методів функціонального аналізу в наступних курсах з теорії оптимізації, чисельного аналізу, математичного моделювання та інших розділів прикладної математики.

1.4. В результаті вивчення дисципліни студент повинен:

**знати:**

- фундаментальні поняття (визначення), структуру та основні властивості топологічного, метричного, банахового, гільбертового функціональних просторів, підмножин у цих просторах та їх відображень (функцій, функціоналів, операторів);

**уміти:**

- застосовувати отримані знання при розв’язуванні задач класичного аналізу, обчислювальної математики, лінійної алгебри

(стискаючі відображення в метричних просторах, зв'язок між елементами лінійних нормованих просторів, спектральні розклади елементів та їх найкращі наближення, тощо);
- перевіряти аксіоми топологічної структури, метрики, норми, скалярного добутку, перевіряти підмножини на замкненість та відкритість у просторах;
- досліджувати метричні простори на повноту, застосовуючи принцип вкладених куль, будувати спектральні розклади Фур'є за системами ортогональних елементів, оцінювати локалізацію і знаходити спектри лінійних операторів;
- застосовувати принципи нерухомої точки та стискаючих відображень для встановлення факту існування розв'язків операторних рівнянь і для їх практичного знаходження.

**Мати уявлення:**
- про топологію як розділ математики в цілому та її роль і місце серед інших математичних дисциплін.

## *ЗМІСТ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ з дисципліни "ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ"*

### Тема 1. Метричні простори

Означення метрики та метричного простору. Приклади метричних просторів. Відкрита і замкнута кулі, окіл точки. Класифікація точок простору: точки дотику, граничні та внутрішні точки, замикання, щільність і сепарабельність множин у метричному просторі. Відкриті та замкнуті множини, зв'язок між ними. Відкриті та замкнуті множини на числовій прямій, канторова множина.

Відображення та неперервність відображень у метричних просторах. Ізометрія. Збіжність у метричних просторах. Фундаментальні послідовності та їх зв'язок зі збіжними послідовностями.

Повнота та приклади повних метричних просторів. Ознаки повноти. Теорема про вкладені кулі. Поняття доповнення простору. Нерухома точка та принцип стискаючих відображень. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування рівнянь та до дослідження існування розв'язків рівнянь. Задача Коші.

Цілковита обмеженість, властивості цілком обмежених множин, приклади. Цілковита обмеженість в метричному просторі скінченної розмірності. Компактність, необхідна і достатня умова компактності метричного простору. Передкомпактні множини, умови передкомпактності. Теорема Арцела. Неперервні відображення метричних компактів. Рівномірна неперервність.

*Література* [1–7]

**Методичні рекомендації.** Під час вивчення теоретичного матеріалу звернути увагу на наступні питання, важливі при розв'язанні задач:

- Означення та приклади найбільш вживаних метричних просторів.
- Класифікація елементів (точок) множин метричного простору та структура множин метричного простору.
- Збіжність послідовностей у метричних просторах.
- Повнота та поповнення метричних просторів, ознаки повноти.
- Поняття відображення у метричних просторах, стискаючі відображення та їх застосування.

***Основні положення і поняття теми.***

*Метричним простором* називається пара $(X,\rho)$, що складається з деякої множини (простору) $X$ елементів (точок) і відстані, тобто однозначної невід'ємної дійсної функції $\rho(x,y)$, визначеної для будь-яких елементів $x$ та $y$ з $X$ і яка задовольняє трьом аксіомам:

1. $\rho(x,y)\ge 0$, причому $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

2. Аксіома симетрії: $\rho(x,y)=\rho(x,y), \forall x,y\in X$.

3. Аксіома трикутника: $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y), \forall x,y,z\in X$.

*Функція* $\rho(x,y)$, яка визначає відстань між елементами простору *називається метрикою*.

*Полуметричним* називають простір, в якому існують неспівпадаючі точки з нульовою відстанню, а функцію, що визначає відстань між точками називають відповідно полуметрикою, або псевдометрикою.

*Метричний простір* $R^1$ утворює множина дійсних чисел з відстанню $\rho(x,y)=|x-y|$.

$n$ — *вимірним евклідовим простором* $R^n$ називається множина упорядкованих груп з $n$ дійсних чисел $x=\{x_1,x_2,x_3,\ldots x_n\}$ з відстанню

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}.$$

*n — <u>вимірним евклідовим простором</u>* $R_1^n$ називається множина упорядкованих груп з $n$ дійсних чисел $x=\{x_1, x_2, x_3, ... x_n\}$ з відстанню

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\left|y_k-x_k\right|.$$

*n — <u>вимірним евклідовим простором</u>* $R_0^n$ називається множина упорядкованих груп з $n$ — дійсних чисел $x=\{x_1, x_2, x_3, ... x_n\}$ з відстанню

$$\rho(x,y)=\max_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right|.$$

*<u>Нескінченно-вимірний простір</u>* $C_{[a,b]}$ утворює множина функцій, неперервних на проміжку $[a,b]$ з відстанню, що задається функцією

$$\rho(f,g)=\max_{a\le t\le b}\left|g(t)-f(t)\right|.$$

*n — <u>вимірний метричний простір</u>* $R_p^n$ утворює множина всіх упорядкованих груп з $n$ — дійсних чисел $x=\{x_1, x_2, x_3, ... x_n\}$ з відстанню

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{k=1}^{n}\left|y_k-x_k\right|^p\right]^{1/p}, \text{ при } p\ge 1.$$

*<u>Нескінченно-вимірний простір</u>* $l_2$ утворює множина нескінченних послідовностей чисел $x=\{x_1, x_2, x_3, ... x_n, ...\}$, що задовольняють умову $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$ з відстанню, яка визначається формулою

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2}.$$

*<u>Простір неперервних функцій</u>* $C_{[a,b]}^2$ утворює множина функцій, неперервних на проміжку $[a,b]$ з відстанню

$$\rho(f,g)=\left[\int_a^b (g(t)-f(t))^2\,dt\right]^{1/2}.$$

*<u>Простір неперервних функцій</u>* $C_{[a,b]}^p$ утворює множина всіх функцій, неперервних на проміжку $[a,b]$ з відстанню, що задається функцією

$$\rho(f,g)=\left[\int_a^b \left|g(t)-f(t)\right|^p dt\right]^{1/p}, \text{ при } p\ge 1.$$

*<u>Відкритою кулею</u>* $O(x,x_0)$ в метричному просторі $(X,\rho)$ називають сукупність точок $x\in X$, які задовольняють умову $\rho(x,x_0)<r$. Точка $x_0$ називається центром, а число $r$ — радіусом кулі.

Відкриту кулю радіуса $\varepsilon$ з центром в $x_0$ будемо називати *<u>відкритим околом точки</u>* $x_0$ і позначатимемо його символом $o_\varepsilon(x_0)$.

*<u>Замкнутою кулею</u>* $O(x,x_0)$ в метричному просторі $(X,\rho)$ називають сукупність точок $x\in X$, які задовольняють умову $\rho(x,x_0)\le r$. Точка $x_0$ називається центром, а число $r$ — радіусом кулі.

*<u>Точкою дотику</u>* до множини $M\subseteq X$ називають таку точку $x\in X$, будь-який окіл якої містить хоча б одну точку із $M$.

*<u>Замиканням множини</u>* $M\subseteq X$ є множина $[M]$, доповнена всіма точками дотику до $M$ із множини $X$.

*<u>Точка</u>* $x$ *<u>називається</u>* *<u>внутрішньою</u>* точкою множини $M$, якщо вона належить їй разом з якимось своїм околом.

*<u>Точка</u>* $x$ *<u>називається ізольованою</u>* точкою множини $M$, якщо вона має якийсь окіл, що не містить інших точок $M$ відмінних від $x$.

*<u>Точка</u>* $x\in X$ *<u>називається граничною</u>* точкою множини $M$, якщо будь-який її окіл містить нескінченну множину точок із $M$.

*<u>Множина</u>* $A\in X$ *<u>є відкритою</u>*, якщо вона складається тільки з внутрішніх точок. Усяка відкрита множина на числовій прямій є сумою скінченного або зліченого числа інтервалів, які попарно не перетинаються.

*<u>Множина</u>* $A\in X$ *<u>є замкнутою</u>*, якщо її доповнення в $X$ відкрите, і навпаки, доповнення до відкритої множини в $X$ замкнуте.

Усяка відкрита множина в числовій прямій є сумою скінченного або зліченого числа інтервалів, що попарно не перетинаються.

*<u>Множина</u>* $A\in X$ *<u>називається щільною в множині</u>* $B\in X$, якщо її замикання належить $B$, тобто $[A]\subset B$.

*<u>Множина</u>* $A\in X$ *<u>називається щільною всюди</u>*, якщо її замикання збігається з $X$.

*<u>Простір називається сепарабельним</u>*, якщо він містить всюду щільну злічену множину.

*<u>Послідовність</u>* $\{x_1,x_2,x_3,\ldots x_n\ldots\}\subset X$ точок метричного простору $(X,\rho)$ є *<u>збіжною</u>* до точки $x_0\in X$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $N_\varepsilon$, що $\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$ для всіх $n>N_\varepsilon$.

*<u>Послідовність</u>* $\{x_1,x_2,x_3,\ldots x_n\ldots\}$ точок метричного простору $(X,\rho)$ будемо називати *<u>фундаментальною</u>*, якщо вона задовольняє критерію

Коші, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $N_\varepsilon$, що $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всіх $n > N_\varepsilon$ та $m > N_\varepsilon$.

*Метричний простір є повним*, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність є збіжною.

*Твердження*: щоб метричний простір $R$ був повним необхідно і достатньо, щоб у ньому всяка послідовність вкладених одна в одну замкнутих куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.

*Множину називають обмеженою*, якщо її можна цілком помістити в кулю скінченного радіуса.

*Множина називається компактною*, якщо будь-яка нескінченна послідовність її елементів має хоча б одну граничну точку.

*Множина* $A \subset X$ є $\varepsilon$ — *сіткою* для множини $M$, якщо для будь-якої точки $x \in M$ знайдеться така точка $a \in A$, що $\rho(x, a) < \varepsilon$.

*Обмежена множина називається цілком обмеженою*, якщо для неї при будь-якому $\varepsilon > 0$ існує скінченна $\varepsilon$ — сітка. Цілком обмежена множина є сепарабельною.

Множина називається передкомпактною, якщо будь-яка нескінченна послідовність елементів множини є фундаментальною, тобто її замикання є множиною компактною. Для того щоб множина, яка лежить у повному метричному просторі була передкомпактною, необхідно і достатньо, щоб вона була цілком обмеженою.

*Простір називається зліченно-компактним*, якщо кожна його нескінченна множина має хоча б одну граничну точку. Зліченно-компактний простір є цілком обмеженим, компактним і сепарабельним.

*Множина* $\hat{O}$ *функцій* $\varphi(t)$, визначених на відрізку $[a, b]$, *є рівномірно обмеженою*, якщо існує таке число $K$, що $|\varphi(t)| < K$ для всіх $t \in [a, b]$ і всіх $\varphi \in \Phi$.

*Множина* $\hat{O}$ *функцій* $\varphi(t)$ називається рівностепенево неперервною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < \varepsilon$$

для всіх $t_1, t_2, \in [a, b]$ і всіх $\varphi \in \Phi$.

*Теорема Арцела:* Для того щоб множина неперервних функцій, обмежених на відрізку $[a, b]$, була передкомпактною в $C_{[a,b]}$ необхідно і достатньо, щоб вона була рівномірно обмеженою і рівностепенево неперервною.

*Відповідністю* між множинами $A$ та $B$ називають яку завгодно підмножину $C \subset A\text{x}B$, де $A\text{x}B$ — декартовий добуток множин $A$, $B$ тобто, сукупність упорядкованих пар $(a, b)$ елементів із $A$ та $B$.

*Ізометрією* називають взаємнооднозначну відповідність (бієкцію) $f$ між метричними просторами $(X, \rho_x)$ та $(Y, \rho_y)$, якщо для будь-яких пар $x_1, x_2 \in X$ має місце рівність $\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2))$.

*Відображенням* $A \to B$ називається відповідність, в якій кожному елементу із $A$ відповідає тільки один елемент із $B$.

*Відображення*, що діє в метричному просторі, називають неперервним, якщо воно неперервне в кожній точці простору.

*Відображення* $f$ є неперервним в точці $a$ простору, якщо воно задовольняє умовам Коші (Гейне).

*Умови Коші* для відображення $f$ точці $a \in X$: якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, таких що $\rho(a, x) < \delta$ виконується нерівність $(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

*Умови Гейне:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Умови Коші і Гейне еквівалентні.

*Відображення є рівномірно-неперервним*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що нерівність $(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ виконується для всіх пар $x_1, x_2 \in X$, таких що $\rho(x_1, x_2) < \delta$, одночасно.

*Відображення* $F : X \to Y$ *є стискаючим*, якщо існує число $\alpha < 1$, таке, що для будь-якої пари точок $x, y \in X$ виконується нерівність:

$$\rho(Fx, Fy) < \alpha\rho(x, y)$$

Число $\alpha < 1$ називають коефіцієнтом стискання відображення $F$.

*Нерухомою точкою* відображення $F$ називають розв'язок рівняння $Fx = x$.

*Принцип стискаючих відображень*: усяке стискаюче відображення у повному метричному просторі $(X, \rho)$ має одну і тільки одну нерухому точку.

*Нерухома точка* є границею збіжної послідовності

$$x_0, Fx_0, F^2x_0, F^3x_0, \ldots F^nx_0, \ldots,$$

яка утворюється в результаті здійсненя процедури послідовних наближень, починаючи з довільної точки простору $x_0 \in X$.

*Теорема про доповнення:* кожний метричний простір має єдине, з точністю до ізометрії, доповнення, що залишає нерухомі точки нерухомими.

**Розв'язування задач та дослідження.**

1.1. Чи вірне твердження, що послідовність вкладених відкритих куль

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots E_n \ldots$$

в повному метричному просторі має непорожній перетин, якщо

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} diam(E_n) = 0?$$

Відповідь: контрприклад — $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(1,\frac{1}{n})$ — порожній.

1.2. Чи вірне твердження, що послідовність вкладених замкнутих куль

$$\bar{E}_1 \supset \bar{E}_2 \supset \bar{E}_3 \supset \ldots \bar{E}_n \ldots$$

в повному метричному просторі має непорожній перетин, якщо

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} diam(E_n) = 0?$$

*Відповідь:* так, на основі теореми про вкладені кулі.

1.3. Довести, що множина раціональних чисел не є повною.

Відповідь: послідовність $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ збігається до числа $e$, що не є раціональним числом.

1.4. Довести, що простір многочленів $P_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}$ не є повним.

*Відповідь:* послідовність $P_1(t), P_2(t) P_3(t) \ldots P_n(t) \ldots$ має границею функцію $e^t$, що не є многочленом.

1.5. Які з функцій

$$\rho(x,y) = |x-y|$$

$$\rho(x,y) = x^3 - y^3$$

$$\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$$

$$\rho(x,y) = |arctg(x) - arctg(y)|$$

є функціями метрики?

*Вказівка:* скористайтесь визначенням функції метрики.

1.6. Довести, що евклідів простір $E^n$ є повним (див. 2: с. 66–67).

1.7. Довести, що простір неперервних функцій $C_{[a,b]}$ є повним (див. 2: с. 67).

1.8. Довести, що простір функцій $C^2_{[a,b]}$ не є повним (див. 2: с. 68–69).

1.9. Визначте відстань між функціями

$y(t)=t$ та $y(t)=t^2$

в метриці інтегрованих з квадратом функцій на проміжку $[0,1]$.

*Вказівка:* Використайте функцію метрики простору $L^2$.

1.10. Визначте відстань між функціями

$y(t)=t$ та $y(t)=t^2$

в метриці неперервних на проміжку $[0,1]$ функцій.

*Вказівка:* Використайте функцію метрики простору $C_{[a,b]}$.

1.11. Чи є відображення $F:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\frac{1}{3}]$ при $F(x)=x^2$ стискаючим?

*Відповідь:* так, оскільки

$$\rho(F(x_2),F(x_1))=\left|x_2^2-x_1^2\right|\le\left|x_2+x_1\right|\left|x_2-x_1\right|\le\frac{2}{3}\left|x_2-x_1\right|.$$

1.12. Чи є відображення $F:[0,1]\to[0,1]$, при $F(x)=x^2$ стискаючим?

*Відповідь:* ні, доведення по аналогії з попереднім.

1.13. Чи є відображення $F:R\to R$, при $F(x)=\frac{\pi}{2}+x\ -arctg(x)$ стискаючим?

*Вказівка:* для доведення застосуйте теорему Лагранжа (4: с.158–162).

1.14. Встановіть, чи рівняння $10x=e^x$ має розв’язок на проміжку [0, 1].

*Вказівка*: зважте, що розв’язок рівняння, якщо він існує, співпадає з нерухомими точками відображення $F(x)=0.1e^x$.

1.15. Встановіть, чи рівняння $\sin(x)=2x-0.5$ має розв’язок на [0, 1].

1.16. Доведіть, що рівняння

$$f(x)+\frac{1}{2}\sin(f(x))+\varphi(x)=0,$$

де $\varphi(x)$ — неперервна функція, має розв’язок.

*Вказівка:* зведіть рівняння до вигляду

$$F(x,y)=y+\frac{1}{2}\sin(y)+\varphi(x)=0,$$

прийміть до уваги неперервність функції $F(x,y)$ від обох змінних та врахуйте обмеженість її часткової похідної $F_y'(x,y)$ зверху і знизу (див. 5: с. 157).

1.17. Доведіть, що рівняння $3f(x)+arctg(f(x))+\varphi(x)=0$, де $\varphi(x)$ — неперервна функція, має розв'язок.

*Вказівка:* доведення аналогічне попередньому.

1.18. Розв'яжіть рівняння $\varphi(t)=\frac{5}{6}t+\frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi(s)ds$.

*Вказівка:* перевірте умову стисливості оператора

$$A\varphi=\frac{5}{6}t+\frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi(s)ds$$

прийнявши до уваги, що ядро $K(t,s)=ts$ є неперервним і обмеженим в області його визначеності, потім застосуйте ітеративну процедуру:

$$\varphi_0=0$$

$$\varphi_1(t)=\frac{5}{6}t+\frac{1}{2}\int_0^1 tsds=\frac{5}{6}t$$

$$\varphi_2(t)=\frac{5}{6}t+\frac{t}{2}\int_0^1 s\frac{5}{6}sds=\frac{5}{6}t(1+\frac{1}{6})$$

$$\varphi_3(t)=\frac{5}{6}t+\frac{t}{2}\int_0^1 s\frac{5}{6}s(1+\frac{1}{6})ds=\frac{5}{6}t(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2})$$

.................................................................

$$\varphi_n(t)=\frac{5}{6}t(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+....+\frac{1}{6^{n-1}})=t(1-\frac{1}{6^n})$$

і виконайте граничний перехід при $n\to\infty$.

1.19. Знайдіть наближений розв'язок рівняння

$$\varphi(t)=1+2\int_0^1 t^2s\varphi(s)ds.$$

*Вказівка:* застосуйте методику, викладену в попередньому прикладі.

1.20. Виведіть умову стисливості інтегрального оператора Фредгольма в просторі неперервних функцій.

*Вказівка:* врахуйте обмеженість ядра і неперервних функцій на замкнутому проміжку.

1.21. Побудуйте відображення, нерухома точка якого на заданому інтервалі співпадає з розв'язком рівняння $f(x)=0$.

1.22. Що таке куля одиничного радіусу з центрами в точках $x \quad =0$ та $x(t)=0$ і як вона виглядає в метриках

$$\rho(x,y)=\max\left|x \quad - y \quad\right|$$

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}\left|x(t)-y(t)\right|.$$

## Тема 2. Топологічні простори

Поняття топологічного простору та топології. Класифікація точок (елементів) топологічного простору. Відкриті та замкнені множини. Оператор замикання. Порівняння топологій. Аксіоми віддільності точок простору. База та передбаза топологічного простору. Аксіоми віддільності. Упорядкованість і збіжність в топологічних просторах. Відображення, його неперервність. Гомеоморфні відображення. Компактність в топологічних просторах. Неперервні відображення компактних просторів. Зліченна компактність. Локально компактні простори. Метризовність і метризаційні теореми.

*Література* [3; 8]

**Методичні рекомендації.** Під час вивчення теоретичного матеріалу звернути увагу на співвідношення положень в топологічних і метричних просторах.

***Основні положення і поняття теми.***

*Множина* є сукупністю елементів довільної природи, об'єднаних за спільною ознакою. Порядок елементів на множині не визначений.

*Породжуюча множина* — це деяка множина $X$, на якій визначено клас множин.

*Клас множин* або система множин – це довільна множина підмножин породжуючої множини.

*Топологічним простором* називають клас множин $\tau$ породжуючої множини $X$ з наступними властивостями:

а) породжуюча $X$ та порожня $\varnothing=\{\}$ множини належать $\tau$;

б) довільне (не обов'язково скінченне чи злічене) об'єднання $\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ підмножин $V_{\alpha} \in \tau$ належить $\tau$;

в) перетин $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ скінченної множини підмножин $V_i \in \tau$ також належать $\tau$.

Поняття <u>*відкритої множини*</u> в топології є аксіомою, а <u>*замкнута множина*</u> визначається як доповнення до відкритої в $X$.

<u>*Окіл точки*</u> $x_0 \in X$ — це всяка відкрита множина із $\tau$, яка містить $x_0$.

<u>*Точка*</u> $x_0 \in A$ <u>*є внутрішньою*</u> відносно $A$, якщо вона міститься в $A$ разом з якимось своїм околом.

<u>*Точка*</u> $x_0 \in X$ <u>*є точкою дотику*</u> до множини $A$, якщо вона містить хоча б одну точку із $A$.

<u>*Точка*</u> $x_0 \in X$ <u>*є граничною точкою*</u> множини $A$, якщо в її околі міститься хоча б одна точка із $A$, відмінна від $x_0$. Гранична точка множини $A$ одночасно є її точкою дотику, але точка дотику до $A$ може бути і не внутрішньою, і не граничною для $A$.

<u>*Множина*</u> $A$ <u>*є відкритою*</u>, якщо вона складається із внутрішніх точок.

<u>*Множина*</u> $A$ *є замкнутою*, якщо вона містить всі свої точки дотику.

<u>*Перша аксіома віддільності*</u>: для будь-яких двох точок простору $x$ та $y$ існує окіл точки $x$, що не містить $y$ і навпаки, існує окіл точки $y$, який не містить $x$.

<u>*Друга аксіома віддільності*</u>: дві різні точки топологічного простору мають неперетинні околи.

<u>*Третя аксіома віддільності*</u>: будь-яка точка $x$ і замкнута множина, що не містить цієї точки, мають неперетинні околи.

<u>*Четверта аксіома віддільності*</u>: всякі дві неперетинні замкнуті множини мають неперетинні околи.

<u>*Топологічний простір*</u>, який задовольняє четвертій аксіомі віддільності називається нормальним.

<u>*Базою топології*</u> називають клас відкритих множин, із якого можна побудувати всі останні множини топології за допомогою операцій об'єднання довільного числа множин і перетину скінченного числа множин даного класу.

*Простори зі зліченою базою* називають просторами з другою аксіомою зліченості. Якщо в топологічному просторі є злічена база, то в ньому є злічена скрізь щільна множина (така злічена множина, замикання якої співпадає з усім простором). Простір із зліченою всюду щільною множиною називають *сепарабельним*.

*Метричний простір* має злічену базу тоді, і тільки тоді, коли він сепарабельний.

*Твердження*: якщо топологічний простір має зліченну базу, то з усякого його відкритого покриття можна вибрати скінченне або зліченне підпокриття.

*Передбазою* називають клас відкритих множин, який можна перетворити в базу застосуванням до нього операцій перетину скінченного числа його елементів. Який завгодно клас множин, об'єднання яких співпадає з породжуючою множиною $X$ може бути передбазою деякої топології.

Топологічний простір називається *компактним*, якщо всяке відкрите покриття його містить скінченне підпокриття.

*Відкрите покриття* множини $A$ — це довільне об'єднання відкритих множин, що містить $A$.

Топологічний простір називається *зліченнокомпактним*, якщо кожна нескінченна підмножина його має хоча б одну граничну точку.

*Твердження*: всякий компактний топологічний простір є зліченнокомпактним.

Топологічний простір називають *метризовним*, якщо його топологію можна задати за допомогою якої-небудь функції метрики.

*Твердження*: для того щоб топологічний простір із зліченною базою був метризовним, необхідно і достатньо, щоб він був нормальним.

*Топологічний простір називається локально компактним*, якщо він віддільний (задовольняє першу аксіому віддільності) і всяка його точка має компактний окіл.

*Послідовність* $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \ldots$ в топологічному просторі називають *збіжною* до $x_0$, якщо будь-який окіл $x_0$ містить майже всі точки послідовності (тобто всі, за винятком скінченного їх числа).

*Відображення* $f$ топологічного простору $X$ в топологічний простір $Y$ є неперервним у точці $x_0$, якщо для якого завгодно околу $U_{y_0}$ точки $y_0 = f(x_0)$ знайдеться такий окіл $V_{x_0}$ точки $x_0$, що $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$.

*Твердження*: для того щоб відображення $F$ топологічного простору $X$ в простір $Y$ було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз любої відкритої множини в $Y$ був відкритим.

*Гомеоморфізм* — це взаємно-однозначне і неперервне відображення.

*Твердження*: неперервне відображення компактного простору є компактним простором.

## Тема 3. Лінійні та нормовані простори

Означення, приклади лінійних просторів. Лінійна незалежність елементів лінійного простору, поняття базису. Підпростори, фактор-простори. Замкнутий відрізок, опуклі множини та опуклі тіла в лінійному просторі. Означення норми та нормованого простору, простір Банаха. Приклади нормованих просторів. Підпростори. Означення евклідового простору, норма в евклідовому просторі. Нерівність Коші-Буняківського. Приклади евклідових просторів. Ортогональні базиси та їх існування, процес ортогоналізації. Нерівність Бесселя та рівність Парсеваля. Теорема Ріса-Фішера. Коефіцієнти і ряди Фур'є. Зв'язок між замкнутими і повними ортонормованими системами. Необхідна і достатня умова повноти ортонормованої системи. Комплексні евклідові простори.

Гільбертовий простір, теорема про ізоморфізм. Підпростори, ортогональні доповнення та прямі суми. Характеристична властивість евклідових просторів. Комплексні евклідові простори.

*Література* [2; 3; 5]

**Методичні рекомендації.** Під час вивчення теоретичного матеріалу звернути увагу на роль і місце базису в структурі лінійних просторів, на поняття скалярного добутку в евклідових і гільбертових просторах та існування і особливості практичного застосування ортонормованих базисів у скінченно- і нескінченновимірних просторах.

***Основні положення і поняття теми.***

*Лінійний простір* — це непорожня множина $L=\{x,y,z,...\}$, елементи якої називаються векторами, така що:

а) для будь-яких 2-х елементів $x,y\in L$ однозначно визначається 3-й елемент з $L$, який позначимо $x+y$ та назвемо їх сумою, такий що виконуються наступні закони:

1. $x+y=y+x$ для $\forall x,\forall y$.
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ для $\forall x,\forall y,\forall z$.

3. Існує нульовий елемент $0 \in L$, такий що $\forall x, x+0=x$.

4. $\forall x, \exists(-x)$ — протилежний елемент з $L: x+(-x)=0$.

б) для будь-якого числа $\alpha$ і будь-якого елемента $x \in L$ однозначно визначається елемент з $L$, який будемо називати добутком числа $\alpha$ на елемент $x$ і позначати $\alpha x$, причому такі, що виконуються закони:

1. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta, \forall x;$

2. $1x=x, \forall x;$

3. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x, \forall x, \forall \alpha, \beta;$

4. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \forall \alpha, \forall x, y.$

*Лінійний простір* є дійсним при $\alpha \in R$ і комплексним, якщо $\alpha \in C$.

*Множина* $\{x_i\}\big|_{i=1}^{n}$ векторів є *лінійно залежною*, якщо існує набір коефіцієнтів $\{\alpha_i\}\big|_{i=1}^{n}$, які не всі нулі такий, що $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$.

*Множина* $\{x_i\}\big|_{i=1}^{n}$ векторів є *лінійно незалежною*, якщо рівність $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$ можлива тільки тоді, коли всі $\alpha_i=0$.

Натуральне число $n$, що відповідає максимально можливій кількості лінійно незалежних векторів *називають вимірністю* лінійного простору $L$ і позначають $\dim L=n$. Прикладом скінченновимірного простору може бути $n$ — вимірний евклідів простір.

Яка завгодно множина із $n$ лінійно незалежних векторів *називається базисом* лінійного простору.

*Простір* $L$ називають нескінченновимірним, якщо $\forall n \in N$ існує система векторів $\{x_i\}\big|_{i=1}^{n}$, яка є лінійно незалежною. Прикладами нескінченновимірних лінійних просторів можуть бути простір нескінченних послідовностей $l_2$ та простір $C_{[a,b]}$ неперервних на проміжку $[a,b]$ функцій.

*Підпростором* $L'$ лінійного простору можна назвати яку завгодно підмножину лінійного простору $L$, якщо вона утворює лінійний простір відносно визначених у ньому операцій додавання та множення на число.

*Два елементи* $x, y$ із $L$ назвемо $L'$ — еквівалентними, якщо $x-y \in L'$. Клас $L'$ *еквівалентних елементів* назвемо класом суміжності по підпростору $L'$, а множину всіх класів суміжності назвемо фактор-простором. Прикладом фактор-простору може бути клас площин в евклідовому просторі, паралельних якійсь площині ( $L'$ ).

<u>*Замкнутим відрізком*</u>, який сполучає дві точки $x, y$ із $L$ , назовемо сукупність елементів вигляду $\alpha x + \beta y$ , де $\alpha, \beta > 0$ і $\alpha + \beta = 1$.

<u>*Опуклою множиною*</u> називають множину, яка разом з будь-якими її точками містить і відрізок, що їх сполучає. Прикладами опуклих множин у тривимірному евклідовому просторі можуть бути куля, тетраедр, куб.

<u>*Опуклою оболонкою*</u> довільної множини $A$ лінійного простору називають мінімальну опуклу множину, що містить $A$. Прикладом опуклої оболонки трьох точок на площині може бути множина точок площі трикутника, побудованого на заданих точках як на вершинах. У даному випадку трикутник як опуклу оболонку трьох точок на площині називають двовимірним симплексом.

<u>*Симплекс із вершинами*</u> $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ є сукупність усіх точок, які можна зобразити у вигляді $x = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k$, де $\alpha_k > 0$ і $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$.

<u>*Нормований простір*</u> — це лінійний простір $L$, на якому визначена норма. Нормою є яка завгодно функція, що позначається $\|x\|$ і задовольняє наступим умовам:

1. $\|x\| \ge 0 \, \forall x \in L; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in L;$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in L, \forall \alpha.$

Зв'язок між нормою та метрикою: $\rho(x, y) = \|x - y\|, \|x\| = \rho(x, 0)$.

<u>*Банахів простір*</u> –це повний нормований простір відносно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

<u>*Скалярний добуток у лінійному просторі*</u> $L$ називається дійсна функція, яка визначена $\forall x, y \in L$ і яку позначимо $(x, y)$ так, що виконуються закони:

1. $(x, x) \ge 0, \forall x \in L; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $(x, y) = (y, x), \forall x, y \in L;$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \forall x_1, x_2, y \in L;$
4. $(\alpha x, y) = \alpha (x, y), \forall x, y \in L, \forall \alpha.$

<u>*Для комплексного*</u> лінійного простору умова 2 замінюється на умову 2. $(x, y) = \overline{(y, x)}, \forall x, y \in L;$

*Евклідів простір* — це лінійний простір зі скалярним добутком.

Зв'язок між скалярним добутком та нормою: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

*Нерівність Коші-Буняківського* визначається на довільних елементах $a, b$ евклідового простору і має вигляд $|(a \cdot b)| \le \|a\| \cdot \|b\|$.

*Елементи* $a, b$ називають ортогональними, якщо $(a \cdot b) = 0$.

*Твердження*: в сепарабельному евклідовому просторі існує не більш як злічений ортогональний нормований базис $e_1, e_2, ..., e_n, ...$, тобто всякий елемент $x$ простору можна представити у вигляді розкладу

$$x = \sum_i c_i x_i \text{ , де } (e_i \cdot e_j) = 0 \text{, якщо } i \neq j \text{ і } \|e_i\| = 1 .$$

*Ортогональний базис називають замкнутим*, якщо для нього має місце рівність $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ (рівність Парсеваля).

*Гільбертів простір* — це нескінченновимірний простір зі скалярним добутком (евклідів простір), який є повним відносно метрики

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \text{, де } \|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Прикладом гільбертового простору може бути простір нескінченних послідовностей $l_2$.

*Лінійною многостатністю* в гільбертовому просторі $H$ будемо називати таку сукупність $L$ елементів з $H$, що для будь-яких $x, y \in L$, буде справедливим і відношення $(\alpha x + \beta y) \in L$. Замкнута лінійна многостатність утворює підпростір гільбертового простору.

*Твердження*: кожний підпростір $L$ гільбертового простору містить ортонормовану систему елементів $\{\varphi_n\}$, лінійне замикання якої збігається з $L$.

*Ортогональним доповненням* до $L$ в гільбертовому просторі $H$ називають множину всіх елементів $g$ із $H$, таких що $(g \cdot f) = 0$ для всіх $f \in L$. Ортогональне доповнення утворює підпростір $H$ і позначається $L^{\perp}$. Будь-який елемент $h \in H$ можна однозначно представити у вигляді $h = h' + h^{\perp}$, де $h' \in L$, а $h^{\perp} \in L^{\perp}$.

**Розв'язування задач та дослідження.**

3.1. Довести, що множина неперервних на інтервалі $[0,1]$ функцій утворює лінійний простір.

*Вказівка:* перевірте справедливість аксіом лінійного простору для простору неперервних функцій.

3.2. Довести, що множина многочленів $P_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k t^k$ утворює лінійний простір.

*Вказівка:* доводиться аналогічно попередньому.

3.3. Довести, що до лінійного простору належить $0$ — елемент.

*Вказівка*: побудуйте лінійну комбінацію з коефіцієнтами $\alpha=1$, $\beta=-1$.

3.4. Доведіть, що вектори з пропорціональними координатами є лінійнозалежними.

*Вказівка*: вектори з пропорціональними координатами є колінеарні.

3.5. Покажіть, що є нуль-, одно- та двох- вимірними симплексами.

*Відповідь*: точка, відрізок, трикутник.

3.6. Довести, що множина функцій $1,x,x^2...,x^n,...$, заданих на інтервалі $(0,1)$ є лінійно незалежною.

*Вказівка*: доведіть, що при яких завгодно значеннях $n$ рівність $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k t^{i_k}=0$ можлива для всіх значень $t\in(0,1)$ тільки при всіх $\alpha_k=0$.

3.7. Доведіть, що система елементів лінійного простору $l_2$

$$\begin{array}{l}1,0,0,...,0,...\\0,1,0,...,0,...\\0,0,1,...,0,...\\..................\\0,0,0,...,1,...\end{array}$$

є лінійно незалежною.

*Вказівка:* прийміть до уваги, що в просторі $l_2$ визначено скалярний добуток.

3.8. Доведіть, що система елементів лінійного простору $l_2$ із попередньої задачі є ортонормальною.

3.9. Доведіть, що розклад елемента лінійного простору за системою базисних векторів є єдиним.

*Вказівка:* доведення від протилежного.

3.10. Доведіть, що система функцій $\frac{1}{2},\sin t,\sin 2t,...,\sin nt,...$, що задані на проміжку $[-\pi,\pi]$ в просторі інтегрованих з квадратом функцій є лінійнонезалежною.

*Вказівка:* доведення є аналогом попередньої задачі.

3.11. Доведіть нерівність Коші-Буняківського виходячи з означення норми для вектора $(\lambda x + y)$, де $x, y$ — елементи евклідового простору, а $\lambda$ — дійсне число.

*Вказівка*: скористайтесь означенням скалярного добутку вектора самого на себе.

3.12. Виведіть теорему Піфагора для гільбертового простору.

*Вказівка*: скористайтесь тим, що в гільбертовому просторі існує ортонормальний базис.

3.13. Доведіть тотожність для елементів $x, y$ евклідового простору:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

3.14. Знайдіть кут між векторами $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ та $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ в просторі $l_2$ сумованих з квадратом послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ із скалярним добутком

$$\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

3.15. Знайдіть кут між елементами $f(x) = \sin 2x$ та $g(x) = \cos 3x$ в просторі неперервних на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функцій зі скалярним добутком

$$(f, g) = \int_0^{\pi/2} f(x) g(x) dx.$$

3.16. Доведіть, що два різних сепарабельних гільбертових просторів є ізоморфними.

*Вказівка:* скористайтесь тим, що елементи різних гільбертових просторів можуть представлятись однаковими послідовностями чисел (коефіцієнтів Фур'є).

## Тема 4. Лінійні функціонали

Означення та приклади лінійних функціоналів. Ядро лінійного функціонала, корозмірність ядра. Теорема про продовження функціонала. Неперервність функціоналів у лінійних топологічних та нормованих просторах. Норма функціонала, теорема Хана-Банаха в нормованому просторі. Поняття спряженого простору, приклади спряжених просторів. Властивість простору, спряженого з гільбертовим простором.

Слабка збіжність. Умови слабкої збіжності. Приклади слабкозбіжних послідовностей, слабка збіжність у спряженому просторі.

*Література* [2; 3; 5; 8]

**Методичні рекомендації.** Під час вивчення теоретичного матеріалу звернути увагу на наступні питання, котрі застосовуються при роз-в'язанні задач: поняття лінійного функціоналу, теорему про продов-ження лінійного функціоналу, зв'язок між неперервністю і обмежені-стю лінійного функціоналу, поняття спряженого простору, сильної та слабкої збіжності в нормованому і спряженому просторах.

***Основні положення і поняття теми.***

*Відображення* $f : L \to R^1$, де $L$ довільний лінійний простір, а $R^1$ — простір скалярів, будемо називати функціоналом.

*Лінійним* будемо називати функціонал з наступними властивостями:

1. $f\left(x+y\right)=f(x)+f(y), \forall x, y \in L$ (аддитивність);
2. $f\left(\alpha x\right)=\alpha f(x), \forall x \in L, \forall \alpha$ (однорідність).

*Функціонал* $f$ *є неперервним* у точці $x_0 \in L$ лінійного топологічного простору $L$, якщо для всякого $\varepsilon > 0$ існує такий окіл $U$ точки $x_0$, що для всякого $x \in U$ виконується нерівність $\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon.$

*Функціонал* $f$ *є неперервним* на $L$, якщо він неперервний у кожній точці простору $L$.

*Твердження*: якщо лінійний функціонал неперервний в одній точці лінійного топологічного простору (наприклад, в околі точки $0$), то він неперервний у просторі всюди.

*Ознака*: щоб лінійний функціонал $f$ був неперервним у нормованому лінійному просторі, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим на кулі одиничного радіуса з центром в точці $0$, тобто, щоб для всіх $\|x\|<1$ існувало число $C$ таке, що $|f(x)| \le C$. Верхню межу всіх значень $|f(x)|$ на кулі одиничного радіуса будемо називати нормою функціоналу і позначати

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| .$$

*Твердження*: якщо $E$ — лінійний нормований простір, $L$ — його підпростір, а $f$ — лінійний функціонал, визначений в $L$, то цей функціонал можна продовжити до деякого лінійного функціоналу у всьому просторі $E$ із збереженням норми $f$ (теорема Хана-Банаха).

<u>*Спряжений простір*</u> $L^*$ до простору $L$ – це простір лінійних функціоналів $f$ в $L$, на яких визначені операції додавання та множення на число. Він є повним лінійним нормованим простором з нормою $\|f\|$.

<u>*Приклад*</u>: якщо вибрати в $n$ — вимірному просторі $L$ базис $e_1, e_2, .., e_n$, то лінійний функціонал $f$ у ньому задається значеннями $n$ чисел $f(e_1), f(e_2), .., f(e_n)$, оскільки $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$.

Тому простір функціоналів є також $n$-вимірним векторним простором.

Будемо казати, що послідовність функціоналів $\{f_n\} \subset L^*$ <u>*збігається сильно*</u> до $f$, якщо $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in N, \forall n > N_\varepsilon, \|f_n - f\| < \varepsilon$. Інакше кажучи, сильна збіжність є збіжністю за нормою.

Будемо казати, що послідовність точок $\{x_n\} \subset L$ <u>*слабко збігається*</u> до $x_0 \in L$, якщо $\forall f \in L^*$ послідовність $f(x_n)$ збігається до $f(x_0)$.

<u>*Слабка збіжність*</u> є збіжністю функціоналів у спряженому просторі.

В $n$ — вимірному просторі слабка збіжність співпадає з сильною.

<u>*Приклад*</u>: нехай $\varphi(t)$ — сумовна з квадратом функція в проміжку $[0,1]$, а $x_n(t) = \sin n\pi t$, тоді послідовність функціоналів такого вигляду

$$f(x_n) = \int_0^1 \varphi(t) \sin(n\pi t) dt$$

буде збіжною як послідовність коефіцієнтів Фурьє для функції $\varphi(t)$, в той час як послідовність $x_n(t) = \sin n\pi t$ збіжною не буде, оскільки

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 [\sin(n\pi t) - \sin(m\pi t)]^2 dt = 1 .$$

<u>*Твердження*</u>: щоб послідовність лінійних функціоналів $\{f_n\}$ слабко збігалась до функціоналу $f$, необхідно і достатньо, щоб $\{\|f_n\|\}$ була обмеженою, а $f_n(x) \to f(x)$ мала місце для якого завгодно $x$ із деякої множини $M$, лінійні комбінації елементів якої всюди щільні в $L$.

<u>*Твердження*</u>: якщо $H$ — дійсний гільбертів простір, то для всякого неперервного лінійного функціоналу $f$ на $H$ існує єдиний елемент

$x_0 \in H$ такий, що $f(x) = (x \cdot x_0)$ для всіх $x \in H$, причому $\|f\| = \|x_0\|$ і навпаки.

**Розв'язування задач та дослідження.**

4.1. Доведіть, що множина лінійних функціоналів утворює лінійний нормований простір.

*Вказівка*: доведення спирається на аксіоми лінійного простору.

4.2. Доведіть, що лінійний функціонал неперервний в одній точці, буде неперервним у всьому просторі.

*Вказівка*: доведення спирається на означення неперервності функціоналу.

4.3. Доведіть або спростуйте твердження: функціонал, неперервний в якійсь точці є обмеженим.

*Вказівка*: доведення аналогічне попередньому.

4.4. Доведіть еквівалентність двох визначень норм функціонала:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| \quad \text{та} \quad \|f\| = \sup_{\|x\|\ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} .$$

*Вказівка:* скористайтесь властивістю однорідності лінійного функціонала і зведіть друге визначення до першого.

4.5. Нехай маємо для лінійного функціонала число $C > 0$ таке, що $|f(x)| \le C\|x\|$. Доведіть, що $\|f\| = \inf C$, $\inf$ береться по всіх $C$, які задовольняють нерівність $|f(x)| \le C\|x\|$.

4.6. Покажіть, що простір, спряжений з $n$-вимірним лінійним простором є також лінійним $n$-вимірним простором.

4.7. Доведіть лінійність функціонала $f_1(x) = \int_0^{1/2} x(t)dt - \int_{1/2}^{1} x(t)dt$ в просторі $C\,[0,1]$ та оцініть його норму.

4.8. Доведіть лінійність функціонала $\mathrm{f(x)} = \alpha \mathrm{x}(0) + \beta \mathrm{x}(1)$ в просторі $C\,[0,1]$ та оцініть його норму.

## Тема 5. Лінійні оператори

Визначення та приклади лінійних операторів. Обмеженість, неперервність лінійних операторів. Норма лінійного оператора. Операції над лінійними операторами. Простір лінійних обмежених операторів, його повнота. Оборотний і обернений оператор. Лінійність оберненого оператора. Розклад оберненого оператора $(I - A)^{-1}$. Спряжені та самоспряжені оператори в евклідовому просторі. Спектр та резольвента лінійного оператора, локалізація спектра.

Компактні оператори та їх властивості. Компактні оператори та самоспряжені компактні оператори в просторі Гільберта. Інтегральний оператор у просторі C [a, b] та його компактність. Збіжність і межа послідовності компактних операторів. Дії над компактними операторами. Спектр та власні значення компактного оператора. Теорема Гільберта-Шмідта та її застосування до розв'язування операторних рівнянь.

*Література* [2; 3; 5; 6]

**Методичні рекомендації.** Під час вивчення теоретичного матеріалу звернути увагу на наступні питання, котрі застосовуються при розв'язанні задач та утворюють теоретичний блок за даною темою:

• поняття лінійного оператора, оберненого і спряженого операторів, їх властивості в лінійному топологічному, нормованому, евклідовому і гільбертовому просторах та особливості їх дії в просторах при пере-ході від скінченної до нескінченної вимірності;

• суть задачі на власні значення, поняття спектра та системи власних векторів, зміст теореми Гільберта-Шмідта про спектральний розклад елементів гільбертового простору та її значення для прикладної математики.

***Основні положення і поняття теми.***

*Оператором* називають відображення $A$, що діє із деякого простору $X$ в простір $Y$ і позначають $A: X \to Y$.

*Елементи* $x \in X$, на які розповсюджується дія оператора, називають *прообразами*, а елементи $y \in Y$, що їм відповідають, називають *образами*, тобто образи і прообрази пов'язані відношенням $Ax = y$.

*Сукупність* усіх елементів $x \in X$, для яких оператор $A$ визначений називають *областю визначення* оператора $A$ і позначають $D_A$, а сукупність відповідних їм значень $y = Ax$ позначають $R_A$ і називають *областю значень* $A$.

*Оператор* $A$ *називають* неперервним у точці $x_0 \in D_A$, якщо для будь-якого околу $V$ точки $y_0 = Ax_0$ існує окіл $U$ точки $x_0$, що $Ax \in V$, як тільки $x \in U \cap D_A$.

*Оператор* називають *неперервним*, якщо він неперервний у кожній точці області визначення $D_A$.

*<u>Інше визначення функціоналу</u>*: це оператор, який відображує простір $X$ в числову пряму $R^1$ .

*<u>Оператор</u>* $A$ *<u>називають</u>* лінійним, якщо наступне співвідношення

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$$

справедливе для всіх елементів $x_1, x_2 \in D_A$ і для всіх $\alpha, \beta \in R^1$.

*Приклади*:

а) одиничний оператор, який переводить кожну точку $x \in D_A$ в себе $Ax = x$ (індивідуальне позначення $Ix = x$ ),

б) диференціальний оператор $y(t) = x'(t)$,

в) інтегральний оператор $y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$, лінійність яких очевидна.

*<u>Лінійний оператор</u>* називається *<u>обмеженим</u>*, якщо він визначений на всьому $X$ і яку завгодно обмежену множину простору $X$ переводить в обмежену множину простору $Y$. Умова обмеженості записується так:

$$\|Ax\| \le C\|x\|, \text{ де стала } C > 0 .$$

*<u>Найменше з чисел</u>* $C$, що задовольняють цю нерівність називають нормою оператора $A$ і позначають $\|A\|$.

*<u>Норма оператора</u>* може обчислюватись за наступними формулами:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} |Ax|, \text{ або } \|A\| = \sup_{\|x\| \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \text{ які є рівнозначними.}$$

*<u>Властивість</u>* оператора $A$, заданого на топологічному просторі $X$ з першою аксіомою зліченності, (якими є всі нормовані та зліченно-нормовані простори): обмеженість $A$ рівносильна неперервності.

*<u>Множина всіх лінійних операторів</u>* $A$, що діють на лінійному просторі $X$, з визначеними на них операціями додавання та множення на число, утворюють лінійний нормований простір з нормою $\|A\|$ .

*<u>Оператор</u>* $A$ називають *<u>оборотним</u>*, якщо для якого завгодно $y \in R_A$ існує єдиний розв'язок рівняння $Ax = y$. В такому випадку між елементами $x \in X$ і $y \in Y$ можна встановити обернену відповідність, яка реалізується оператором $A^{-1}$, оберненим до $A$, тобто $x = A^{-1}y$.

*<u>Твердження</u>*: якщо лінійний обмежений оператор $A$ взаємно однозначно відображає банахів простір $X$ на банахів простір $Y$, тоді

обернений оператор $A^{-1}$ обмежений (теорема Банаха про обернений оператор).

*Твердження*: якщо лінійний обмежений оператор $A$ відображає банахів простір в себе і $\|A\| < 1$, тоді оператор $(I - A)^{-1}$ існує, обмежений і зображається у вигляді $(I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$ ($I$ — одиничний оператор).

*Оператор* $A^*$ називають *спряженим* до лінійного обмеженого оператора $A$, якщо $A^* g(x) = g(Ax)$, де $g$ — довільний елемент (функціонал) лінійного простору $Y^*$, спряженого з лінійним простором $Y$, простором образів оператора $A$. Якщо оператор $A$ відображує евклідів простір на себе, то спряжений оператор визначається відношенням:

$$(Ax \cdot y) = (x \cdot A^* y) .$$

Оператор, який діє в евклідовому просторі, називається самоспряженим, якщо $A^* = A$, тобто коли $(Ax \cdot y) = (x \cdot Ay)$.

*Твердження*: оператор $A^*$ є лінійним і обмеженим $\|A^*\| = \|A\|$.

*Число* $\lambda$ називається власним числом оператора $A$, якщо рівняння $Ax = \lambda x$ для нього має ненульові розв'язки. Самі розв'язки при цьому називаються власними векторами.

Ті *значення* $\lambda$, для яких існує обернений оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, визначений на всьому просторі (а значить обмежений), називаються *регулярними*. Сукупність усіх інших значень $\lambda$ називають *спектром* оператора $A$. До спектра входять значення $\lambda$, для яких оператор $R_\lambda$ не існує, або існує, але визначений не на всьому лінійному просторі. В першому випадку сукупність значень $\lambda$ утворює точковий спектр, а в другому — *неперервний* спектр оператора $A$. Оператор $R_\lambda$ називається *резольвентою*.

*Твердження*: якщо $A$ — обмежений лінійний оператор у банаховому просторі й $\lambda > \|A\|$, то $\lambda$ є числом регулярним.

*Оператор називається компактним* (цілком неперервним), якщо він кожну обмежену множину переводить в передкомпактну.

*У скінченновимірному* нормованому просторі всякий лінійний оператор є компактним.

*Твердження*: усякий компактний оператор $A$ у банаховому просторі має лише скінченне число лінійно незалежних векторів, які відповідають власним числам, що перевищують число $\delta > 0$ при якому завгодно його значенні.

<u>*Власні числа*</u> самоспряженого оператора в гільбертовому просторі <u>*дійсні*</u>, а <u>*власні вектори*</u>, що відповідають різним власним числам — <u>*ортогональні*</u>.

<u>*Теорема Гільберта-Шмідта*</u>: для будь-якого компактного самоспряженого оператора $A$ у гільбертовому просторі $H$ існує ортогональна нормована система $\{\varphi_n\}$ власних векторів, які відповідають власним числам $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \neq 0$, така, що кожний елемент $x \in H$ записується єдиним способом у вигляді $x = \sum_k c_k \varphi_k + \xi$, де $\xi$ такі, що $A\xi = 0$.

Якщо ж, при цьому, система $\{\varphi_n\}$ нескінченна, то $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

**Розв'язування задач та дослідження.**

5.1. Довести, що ядро лінійного оператора $A\ \{x : Ax = 0\}$ утворює лінійний простір.

*Вказівка*: досить скористатися визначенням лінійного простору та лінійністю оператора $A$.

5.2. Доведіть, що лінійний оператор $A$, який переводить скінченновимірний простір у скінченновимірний, має вигляд матриці.

*Вказівка*: запишіть довільний вектор простору у вигляді розкладу за базисними векторами і подійте на розклад лінійним оператором $A$; покажіть, що $A$ представляється матрицею перетворення базисних векторів лінійного простору.

5.3. Довести, що оператор $\psi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$ в просторі $L^2_{[a,b]}$ є лінійним і неперервним.

*Вказівка*: лінійність — очевидна, для доведення неперервності досить довести його обмеженість.

5.4. Довести, що оператор $\psi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$ в просторі $C_{[a,b]}$ є лінійним і неперервним.

*Вказівка*: доведення аналогічне попередньому.

5.5. Довести, що диференційний оператор $D\varphi(t) = \varphi'(t)$ в просторі неперервних функцій є лінійним, але не неперервним.

*Вказівка*: покажіть, що диференціальний оператор обмежену послідовність $\varphi_n(t) = \sin nt$ відображає в непередкомпактну.

5.6. Довести, що оператор $\psi(t) = \varphi_0(t)\varphi(t)$, де $\varphi_0(t)$ — фіксована неперервна функція, в просторі $C_{[a,b]}$ є лінійним і неперервним.

5.7. Довести лінійність оператора, оберненого лінійному.

*Вказівка*: використайте два означення — лінійного та оберненого операторів.

5.8. Довести, що оператор тотожного перетворення $I$ в нормованому просторі не є компактним.

*Вказівка*: знайдіть нескінченну обмежену множину елементів нормованого простору, яка лежить на поверхні кулі одиничного радіуса і не є компактною.

5.9. Довести, що власні числа самоспряженого оператора в гільбертовому просторі є дійсними.

*Вказівка*: скористайтесь означенням самоспряженого оператора, рівнянням задачі на власні значення і поняттям скалярного добутку.

5.10. Довести, що власні вектори самоспряженого оператора в гільбертовому просторі є ортогональними.

*Вказівка*: скористайтесь вказівкою до попередньої задачі.

5.11. Довести, що спектр лінійного оператора $A$ в нормованому просторі знаходиться всередині круга радіусом $r = \|A\|$.

*Вказівка*: скористайтесь теоремою про розклад оператора $(I - A)^{-1}$.

5.12. Довести, якщо оператор $A$ — компактний, а $B$ — обмежений, то оператори $AB$ та $BA$ також компактні.

*Вказівка*: доведення випливає з означення добутку операторів та означення компактності.

5.13. Доведіть, що у нескінченновимірному просторі компактний оператор $A$ не може мати обмеженого оберненого.

*Вказівка*: інакше оператор $I = A^{-1}A$ був би, згідно з попередньою задачею, компактним. Але ж він є компактним.

5.14. Чим, на вашу думку, визначається важливість теореми Гільберта-Шмідта.

## *ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ*

1. Яка принципова різниця між точками простору та елементами множини?
2. В чому суть узагальнення поняття геометричної відстані між точками до відстані між елементами функціональних просторів?
3. Сформулюйте аксіоми метрики та наведіть приклади метрики в функціональних просторах.
4. В чому відмінність між метрикою та псевдометрикою?
5. Що таке ізометрія?
6. Дайте класифікацію точок метричного простору.
7. Яка різниця між точками дотику і граничними точками метричного простору?
8. Що таке внутрішня точка?
9. Що таке ізольована точка?
10. Яка послідовність точок метричного простору називається збіжною?
11. Чи завжди межа збіжної послідовності належить цій послідовності?
12. Як називається збіжна послідовність, яка не обов'язково містить в собі межу?
13. Дайте визначення фундаментальної послідовності точок метричного простору.
14. Який простір називається повним?
15. Що таке замикання підмножини метричного простору?
16. Наведіть властивості операції замикання.
17. Наведіть приклади повних і неповних метричних просторів.
18. Опишіть процедуру поповнення неповного метричного простору.
19. Чим відрізняється відкрита куля від замкнутої кулі в метричному просторі?
20. Які точки множини метричного простору називають внутрішніми і які граничними?
21. Що таке окіл точки в метричному просторі?
22. Дайте визначення щільності множини $M$ у множині $R$, спираючись на поняття: a) окіл точки, b) замикання, c) межі збіжної послідовності.
23. Дайте визначення сепарабельності метричного простору.
24. Яка множина є скрізь щільною в евклідовому просторі?

25. Яка множина є скрізь щільною в просторі $C_{[a,b]}$?
26. Яка множина є скрізь щільною в просторі $L_2$?
27. Яке значення має поняття щільності для апроксимації функцій?
28. Яка підмножина метричного простору називається обмеженою?
29. В чому різниця між поняттями: збіжна послідовність і обмежена послідовність точок метричного простору?
30. Чи із всякої обмеженої множини метричного простору можна вибрати фундаментальну послідовність? Сформулюйте теорему Больцано-Вейєрштраса.
31. Доведіть, що нескінченна обмежена множина базисних ортонормальних функцій простору $L_2$ не є фундаментальною. Прокоментуйте, чи не суперечить це теоремі Больцано-Вейєрштраса. Чим відрізняється наведена послідовність від об'єкту теореми Вейєрштраса?
32. Як називаються множини функціонального метричного простору, для яких справедлива теорема Больцано-Вейєрштраса?
33. Дайте визначення передкомпактної та компактної множин в термінах теореми Больцано-Вейєрштраса.
34. Що таке покриття множини? Дайте визначення компактності, спираючись на поняття покриття.
35. Сформулюйте ознаку компактності множини, спираючись на поняття $\varepsilon$ — сітки (теорема Хаусдорфа).
36. Доведіть еквівалентність означень компактності в термінах послідовностей та покрить.
37. Наведіть приклад передкомпактної некомпактної множини.
38. Наведіть приклад замкненої некомпактної множини.
39. Дайте визначення обмеженості та рівномірної обмеженості функцій $\varphi(t) \in C_{[a,b]}$.
40. Дайте визначення рівномірної неперервності та рівностепеневої неперервності функцій $\varphi(t) \in C_{[a,b]}$.
41. Сформулюйте критерій компактності для підмножин метричного функціонального простору $C_{[a,b]}$ (теорема Арцела).
42. Сформулюйте визначення топологічного простору в термінах відкритих множин.
43. Чи можна дати визначення відкритої множини в топологічному просторі?
44. Дайте класифікацію точок топологічного простору.

45. Охарактеризуйте співвідношення між відкритими та закритими множинами топологічного простору.
46. Сформулюйте аксіоми віддільності в топологічному просторі.
47. Якій аксіомі віддільності відповідає поняття нормального простору?
48. Доведіть, що метричний простір є нормальний простір.
49. Наведіть приклад ненормального простору.
50. Який топологічний простір називають простором з першою аксіомою зліченності?
51. Який топологічний простір називають простором з другою аксіомою зліченності?
52. Що таке база топологічного простору?
53. Яка система множин утворює передбазу?
54. Як передбазу перетворити в базу?
55. Як називають простір, який має зліченну базу?
56. Який метричний простір має зліченну базу?
57. Дайте визначення відображення та неперервного відображення в термінах відкритих та замкнутих множин.
58. В чому полягає суть двоїстості визначення неперервних відображень?
59. Як називаєсья взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення?
60. Наведіть приклад неперервного нерівномірно неперервного відображення.
61. Дайте визначення оберненого і взаємно однозначного відображення.
62. Визначте практичний зміст задачі побудови оберненого відображення, та дайте означення коректної по Адамару задачі.
63. Сформулюйте поняття лінійного простору.
64. Чим відрізняється підпростір лінійного простору від підмножини лінійного простору?
65. Дайте визначення понять лінійної залежності та незалежності множини елементів скінченновимірного лінійного простору.
66. Що таке вимір лінійного простору?
67. Дайте визначення лінійної незалежності нескінченної множини елементів нескінченновимірного лінійного простору та наведіть приклади.
68. Що таке базис лінійного простору?

69. Дайте визначення лінійної многостатності та охарактеризуйте її співвідношення з лінійним підпростором?
70. Опишіть конструкцію фактор-простору.
71. Дайте визначення опуклої множини.
72. Дайте визначення опуклої оболонки довільної множини.
73. Що таке симплекс?
74. Дайте визначення однорідно-опуклого функціоналу.
75. Який простір називають нормованим?
76. Дайте визначення норми.
77. Чи є нормованим метричний простір?
78. Наведіть приклади нормованих просторів.
79. Дайте визначення скалярного добутку.
80. В яких просторах норма елементів визначається через скалярний добуток?
81. Як виглядає нерівність Коші-Буняківського?
82. Який базис називають ортонормальним?
83. В якому просторі існує не більш як злічена ортонормована система?
84. Що таке процес ортогоналізації?
85. Яка ортонормована система називається замкнутою?
86. Сформулюйте теорему Ріса-Фішер для довільної ортонормованої системи в повному евклідовому просторі.
87. Що є спільного та чим відрізняються евклідові та гільбертові простори?
88. Сформулюйте необхідну і достатню умову повноти ортонормованої системи в евклідовому просторі.
89. Чому два різні сепарабельні гільбертові простори ізоморфні?
90. Що таке ортогональне доповнення підпростору гільбертового простору?
91. Чим відрізняється комплексний евклідів простір від дійсного?
92. Який простір називають банаховим?
93. Дайте визначення лінійного функціоналу.
94. Який зв'язок між неперервністю та обмеженістю лінійного функціоналу?
95. Що таке норма лінійного функціоналу?
96. Дайте визначення спряженого простору та наведіть приклад спряжених просторів.
97. Сформулюйте теорему Хана-Банаха про продовження лінійного функціоналу в нормованому просторі.

98. Дайте визначення сильної та слабкої збіжності послідовності елементів нормованого простору.
99. Дайте визначення компактної множини.
100. Наведіть властивості компактних операторів.
101. Доведіть, що в скінченновимірному просторі лінійний оператор є компактним.
102. Довести, що оператор тотожного відображення не є компактним.

## *СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ*


1. *Баскаков А. Г.* Сжимающие отображения и решения нелинейных уравнений // СОЖ, 1997. — № 5. — с. 118–121.
2. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1965.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
4. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. — М., 1973.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
6. *Макаров И. П.* Дополнительные главы математического анализа. — М., 1968.
7. *Шашкин Ю. А.* Неподвижные точки. — М.: Наука, 1989.
8. *Пугачев В. С.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Изд-во МАИ, 1996.

### *ЗМІСТ*



| | |
|---|---|
| Відповідальний за випуск | *А. Д. Вегеренко* |
| Редактор | *Ю. А. Носанчук* |
| Комп’ютерне верстання | *А. М. Голянда* |

Зам. № ВКЦ-4536

Формат 60×84/16 . Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний. Наклад 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. ХХ

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008*