МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

“ДОДАТКОВІ ГЛАВИ АНАЛІЗУ, ОСНОВИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ”

(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2011

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики та праграмування
І. В. Степахно

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та праграмування
(протокол № 2 від 30.10.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Степахно І. В. Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни "Додаткові глави аналізу, основи теорії функцій та функціонального аналізу" (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2011. — 39 с.

Методичні вказівки містять пояснювальну записку, питання з кількох розділів дисципліни "Додаткові глави аналізу, основи теорії функцій та функціонального аналізу", які потребують додаткових пояснень, приклади роз'яснювальних завдань, умови задач, а також список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Самостійна робота студентів з дисципліни "Додаткові глави аналізу, основи теорії функцій та функціонального аналізу" є складовою навчального процесу, важливим чинником, який формує уміння навчатися, сприяє активізації засвоєння студентом знань та придбання необхідних навичок.

Самостійна робота — це основний засіб опанування навчального матеріалу в позааудиторний час. Значно підвищується значення та статус самостійної роботи при введенні кредитно-модульної технології навчання, за якою скорочується обсяг аудиторної роботи студентів.

Мета самостійної роботи — сприяння засвоєнню у повному обсязі навчальної програми та формуванню самостійності як особистісної риси та важливої професійної якості, сутність якої полягає в умінні систематизувати, планувати та контролювати власну діяльність.

У пропонованих методичних рекомендаціях розглянуті питання з кількох розділів предмета "Додаткові глави аналізу, основи теорії функцій та функціонального аналізу", які потребують окремих пояснень та визначень.

По кожному з питань неведено основні теореми, твердження, приклади задач.

МЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР

1. *Означення метричного простору. Приклади метричних просторів.*
2. *Підпростір метричного простору.*
3. *Відкриті та замкнені множини метричного простору.*
4. *Всюди щільні множини та ніде не щільні множини метричного простору.*

1. Означення метричного простору. Приклади метричних просторів

Метричним простором називається пара (X, ρ), яка складається з деякої *множини* (простору) X *елементів* (точок) і *відстані,* тобто однозначної, невід'ємної, дійсної функції $\rho(x, y)$, визначеної для будь-яких x і y з множини X і підпорядкованої наступним трьом аксіомам:

1) $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксіома симетрії);
3) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксіома трикутника).

Сам метричний простір, тобто пару (X, ρ) ми будемо позначати, як правило, однією буквою:

$$R = (X, \rho).$$

Наведемо приклади метричних просторів.

1. Множина дійсних чисел з відстанню

$$\rho(x, y) = |x–y|$$

утворює метричний простір R^1.

2. Множина впорядкованих систем з n дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з відстанню

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2} \qquad (1.1)$$

називається n-мірним арифметичним евклідовим простором R^n.

3. Множина $C [a, b]$ всіх неперервних дійсних функцій, визначених на сегменті $[a, b]$, з відстанню

$$\rho(f, g) = \max_{a \le t \le b} |g(t) - f(t)| \qquad (1.2)$$

також утворює метричний простір.

4. Позначимо через l_2 метричний простір, точками якого слугують всякі можливі послідовності $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ дійсних чисел, що задовольняють умові

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty ,$$

а відстань визначається формулою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2} . \qquad (1.3)$$

5. Вкажемо ще один цікавий приклад метричного простору. Його елементами є всякі можливі послідовності дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, такі, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^p < \infty,$$

де $p \ge 1$ — деяке фіксоване число, а відстань визначається формулою

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | y_k - x_k |^p \right)^{\frac{1}{p}} . \qquad (1.4)$$

Цей метричний простір позначимо l_p.

2. Підпростір метричного простору

Нехай $R = (X, \rho)$ — метричний простір і M — будь-яка підмножина в X. Тоді M з тією ж функцією $\rho(x, y)$, яку ми вважаємо визначеною для x і y з M, теж представляє собою метричний простір; він називається *підпростором* простору R.

3. Відкриті та замкнені множини метричного простору

Множина M, що лежить в метричному просторі R, називається *замкненою,* якщо воно співпадає із своїм замиканням: $[M] = M$. Інакше кажучи, множина називається замкненою, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Приклади.

1) Усякий відрізок $[a, b]$ числової прямої є замкнена множина.
2) Замкнена куля представляє собою замкнену множину. Зокрема, у просторі $C[a, b]$ множина функцій f, що задовольняють умову $| f(t) | \le K$, замкнена.
3) Який би не був метричний простір R, пуста множина $\varnothing$ і R замкнені.
4) Всяка множина, що складається із скінченої кількості точок, замкнена.

Основні властивості замкнених множин можна сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема. Перетин будь-якої кількості і сума будь-якої скінченої кількості замкнених множин є множини замкнені.

Точка x називається *внутрішньою* точкою множини M, якщо існує окіл $O_\varepsilon(x)$ цієї точки, який повністю міститься в M.

Множина, всі точки якої внутрішні, називається *відкритою*.

Приклади.

1) Інтервал (a, b) числової прямої R^1 є відкрита множина.
2) Відкрита куля $B(a, r)$ у будь-якому метричному просторі R є відкрита множина.
3) Множина неперервних функцій на $[a, b]$, що задовольняють умові $f(t)<g(t)$, де $g(t)$ — деяка фіксована неперервна функція, представляє собою відкриту підмножину простору $C[a, b]$.

Теорема. Для того, щоб множина M була відкритою, необхідно і достатньо, щоб його доповнення R/M до всього простору було замкненим.

Теорема. Сума будь-якого (скінченого або нескінченого) числа і перетин будь-якого скінченого числа відкритих множин є відкриті множини.

4. Всюди щільні множини та ніде не щільні множини метричного простору

Нехай A і B — дві множини в метричному просторі R. Множина A називається щільною в B, якщо $[A] \supset B$. Зокрема, множина A називається всюди щільною (у просторі R), якщо її замикання $[A]$ співпадає з усім простором R. Наприклад, множина раціональних чисел всюди щільна на числовій прямій. Множина A називається ніде не щільною, якщо вона не щільна ні в одній кулі, тобто в кожній кулі $B \subset R$ міститься інша куля B', що не має з A ні одної спільної точки.

Простори, в яких міститься злічена всюди щільна множина, називають *сепарабельними.*

Приклади.

1) На дійсній осі R^1 — раціональні точки утворюють злічену всюди щільну множину.
2) У n-мірному евклідовому просторі R^n і в просторах R_1^n, R_∞^n — сукупність векторів з раціональними координатами утворюють злічену всюди щільну множину.
3) У просторі $C[a, b]$ — сукупність усіх многочленів з раціональними коефіцієнтами утворюють злічену всюди щільну множину.

Тобто множини $R^1, R^n, R_1^n, R_\infty^n$ є сепарабельними.

ЗБІЖНІСТЬ У МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ВІДОБРАЖЕННЯ В МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ

1. *Означення збіжності послідовності у метричному просторі.*
2. *Властивості збіжних послідовностей.*
3. *Збіжність у просторі R^n.*
4. *Збіжність у просторі l_2.*
5. *Збіжність у просторі $C[a, b]$.*

1. Означення збіжності послідовності у метричному просторі

Нехай R — метричний простір і $\{x_n\}$ — послідовність, що належить йому.

Означення. *Границею послідовності* $\{x_n\}$ називається елемент $x_0 \in R$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

і записується це так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, або $x_n \to x_0$.

Послідовність, що має границю, називається *збіжною*. Послідовність, що не має границі, називається *розбіжною*.

2. Властивості збіжних послідовностей

Якщо послідовність збігається, то вона має єдину границю.

Якщо послідовність збігається, то вона фундаментальна.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається до елемента x_0, то довільна її підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ також збігається до елемента x_0.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається до x_0, послідовність $\{y_n\}$ збігається до y_0, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x_0, y_0).$$

3. Збіжність у просторі R^n

Нехай послідовність $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$ належить простору R^n.

Означення. Послідовність $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$ збігається покоординатно до елемента $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)}$ для довільного $i = \overline{1, n}$.

Теорема 1. Збіжність за метрикою простору R^n еквівалентна покоординатній збіжності.

Твердження. Із збіжності за метрикою простору R^n випливає покоординатна збіжність.

Теорема 2. Якщо a — гранична точка для множини E, то з E можна виділити послідовність точок, що збігається до a.

Теорема 3. Якщо E всюди щільна в M, то для будь-якої точки $a \in M$ знайдеться послідовність (x_n) точок із E, що збігається до a.

4. Збіжність у просторі l_2

Теорема 1. Із збіжності послідовності точок $x^{(k)}$ до точки x простору l_2 випливає покоординатна збіжність $x^{(k)}$ до x.

У просторі l_2 задана послідовність так званих *координатних ортів*:

$$e_n = (\underbrace{0, ..., 0, 1}_{n}, 0, ...)\ (n \in N).$$

Теорема 2. Послідовність координатних ортів утворює базис у просторі l_2.

5. Збіжність у просторі C[a, b]

Теорема. Множина многочленів із простору $C[a, b]$ не є ні замкненою, ні відкритою.

ПОВНІ МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ. ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ

1. *Означення фундаментальної послідовності.*
2. *Означення повного метричного простору.*
3. *Приклади повних та неповних метричних просторів.*
4. *Принцип вкладених куль.*
5. *Теорема Бера.*
6. *Поповнення метричного простору.*

1. Означення фундаментальної послідовності

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору R називається *фундаментальною*, якщо вона задовольняє критерію Коші, тобто якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число N_ε, що $\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$ для всіх $n' > N_\varepsilon$, $n'' > N_\varepsilon$.

Із аксіоми трикутника безпосередньо випливає, що всяка збіжна послідовність фундаментальна. Дійсно, якщо $\{x_n\}$ збігається до x, то для даного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число N_ε, що $\rho(x_{n'}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $n' > N_\varepsilon$ і $\rho(x_{n''}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $n'' > N_\varepsilon$.

Тоді $\rho(x_{n'}, x_{n''}) \le \rho(x_{n'}, x) + \rho(x_{n'}, x) < \varepsilon$ для будь-яких $n' > N_\varepsilon, n'' > N_\varepsilon$.

2. Означення повного метричного простору

Якщо у просторі R будь-яка фундаментальна послідовність збігається до елемента з цього простору, то цей простір називається *повним*.

3. Приклади повних та неповних метричних просторів

1) У просторі ізольованих точок фундаментальні лише стаціонарні послідовності, тобто такі, в яких, починаючи з деякого номера, повторюється весь час одна і та сама точка. Всяка така послідовність, звичайно, збігається, тобто цей простір повний.
2) Простір R^1 — сукупність дійсних чисел — повний, це відомо ще з аналізу.
3) Повнота евклідового простору R^n безпосередньо випливає із повноти R^1.
4) Простір $C[a, b]$ повний.
5) Простір l_2 повний.
6) Простір $C_2[a, b]$ не повний.

4. Принцип вкладених куль

В аналізі широко використовується так звана лема про вкладені відрізки. У теорії метричних просторів аналогічну роль відіграє наступна *теорема про вкладені кулі.*

Теорема. Для того, щоб метричний простір R був повним, необхідно і достатньо, щоб у ньому всяка послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.

5. Теорема Бера

Повний метричний простір R не може бути представлений у вигляді об'єднання зліченого числа ніде не щільних множин.

Зокрема, всякий повний метричний простір без ізольованих точок незлічений. Дійсно, в такому просторі кожна множина, що містить лише одну точку, ніде не щільна.

6. Поповнення метричного простору

Якщо простір R не повний, то його завжди можна включити деяким способом у повний простір.

Означення. Нехай R — метричний простір. Повний метричний простір R^* називається поповненням простору R, якщо:

1) R є підпростором простору R^*;
2) R всюди щільний в R^*, тобто $[R]=R^*$;

(Тут $[R]$ означає, звичайно, замикання простору R в R^*).

Наприклад, простір усіх дійсних чисел є поповненням простору раціональних чисел.

ПРИНЦИП СТИСЛИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

1. *Означення оператора стискання. Неперервність оператора стискання. Приклади.*
2. *Означення нерухомих точок оператора.*
3. *Теорема Банаха про нерухому точку (принцип стислих відображень).*
4. *Застосування принципу стислих відображень до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.*
5. *Теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння в банаховому просторі.*

1. Означення оператора стискання. Неперервність оператора стискання. Приклади

Нехай R — метричний простір. Відображення A простору R на себе називаються стискаючим відображенням, або коротше, стисканням, якщо існує таке число $0<\alpha<1$, що для будь-яких двох точок $x, y \in R$ виконується нерівність

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y). \quad (1.1)$$

Всяке стискаюче відображення неперервне. Дійсно, якщо $x_n \to x$, то в силу (1.1) і $Ax_n \to Ax$.

2. Означення нерухомих точок оператора

Точка x називається *нерухомою* точкою відображення A, якщо $Ax = x$. Інакше кажучи, нерухомі точки — розв'язки рівняння $Ax = x$.

3. Теорема Банаха про нерухому точку (принцип стислих відображень)

Всяке стискаюче відображення, визначене в повному метричному просторі R, має одну і лише одну нерухому точку.

4. Застосування принципу стислих відображень до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай H — m-вимірний унітарний простір, y – заданий вектор в H, а $B \in L(H)$. Для знаходження розв'язків рівняння

$$x - Bx = y \tag{4.1}$$

часто застосовується так званий метод простої ітерації. При цьому розв'язок рівняння (4.1) відшукується як границя послідовності

$$x_{n+1} = Bx_n + y,\ n = 0,1,\ldots, \tag{4.2}$$

а початкове наближення x_0 задане. Якщо $x_n \to x$ при $n \to \infty$ (x_n — розв'язок (4.2), а x — розв'язок (4.1)), то кажуть, що метод простої ітерації збігається.

З точки зору принципу стислих відображень рівняння (4.1) слід записати у вигляді $x = \Phi(x)$, де $\Phi(x) = Bx + y$. При цьому

$$\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| = \|Bx' - Bx''\| \le \|B\|\|x' - x''\|.$$

Якщо $\|B\| < 1$, то оператор Φ є стислим і метод простих ітерацій збігається.

Теорема. Для збіжності методу простих ітерацій при бідь-якому початковому наближенні необхідно і достатньо, щоб усі власні значення оператора B за модулем були менші за 1.

5. Теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння в банаховому просторі

Принцип стислих відображень дозволяє дати просте доведення різних теорем про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для диференціальних рівнянь.

Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \tag{5.1}$$

де $F(t, x)$ — нелінійний оператор від двох змінних: дійсної змінної $t \ge 0$ і змінної x дійсного банахового простору X; значення F також лежать в X. Для рівняння (5.1) ставиться задача Коші, тобто задається початкова умова ($a \in X$)

$$x|_{t=0} = a. \tag{5.2}$$

Теорема 1. Нехай $F(t, x)$ неперервний по t на $[0,\theta]$ при кожному фіксованому x з $\|x - x_0\| \le r$ і при $t \in [0,\theta]$ і x таких, що $\|x - x_0\| \le r$, задовольняє наступним умовам:

$$\|F(t,x)\| \le c; \tag{5.3}$$

$$\|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| \le m\|x_2 - x_1\|. \tag{5.4}$$

Тоді на $[0,\theta_1]$, де

$$\theta_1 = \min\left(\frac{r}{c}, \frac{1}{m}, \theta\right), \tag{5.5}$$

існує єдиний розв'язок $x(t)$ задачі Коші (5.1)–(5.2). При цьому на $[0,\theta_1]$ $\|x(t) - x_0\| \le r$.

Теорема 2. Нехай оператор $F(t, x)$ неперервний по t на $[0,\theta_1]$ при кожному фіксованому $x \in X$ і задовольняє умові Ліпшица (5.4) при цих самих значеннях змінних. Тоді на $[0,\theta_1]$ існує єдиний розв'язок задачі Коші (5.1)–(5.2).

Розглянемо задачу Коші для лінійного диференціального рівняння в банаховому просторі:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + y(t), \quad t \ge 0, \quad x(0) = a. \tag{5.6}$$

Нехай $y(t)$ і $A(t)$ — відповідно абстрактна функція із значеннями в X і оператор-функція із $L(X)$, неперервні на $[0,+\infty)$.

Оскільки на кожному $[0,\theta]$ $\max\|A(t)\| < +\infty$, то із теореми 2 випливає існування і єдиність розв'язку задачі (5.6) на півосі $[0,+\infty)$.

Теорема 3. Кожний метричний простір R має поповнення, і це поповнення єдине з точністю до ізометрії, що залишає нерухомими точки із R.

КОМПАКТНІ МНОЖИНИ У МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

1. *Означення компактної множини та компакта у метричному просторі.*
2. *Теорема Хаусдорфа про компактність множини у повному метричному просторі.*
3. *Критерій компактності в C[a, b]. Теорема Арцела.*

1. Означення компактної множини та компакта у метричному просторі

Фундаментальну роль в аналізі відіграє наступний факт, відомий під назвою леми Гейне–Бореля:

Із будь-якого покриття відрізка $[a, b]$ числової прямої інтервалами можна вибрати скінчене підпокриття.

Це твердження залишиться справедливим, якщо замість інтервалів розглядати будь-які відкриті множини: із усякого відкритого покриття відрізка $[a, b]$ можна виділити скінчене підпокриття.

Топологічний простір T називається *компактним*, якщо будь-яке його відкрите покриття містить скінчене підпокриття.

Компактний топологічний простір, який задовольняє аксіомі відокремленості Хаусдорфа, називається компактом. Аксіома відокрмленості Хаусдорфа говорить про те, що будь-яка точка і замкнена множина, яка цю точку не містить, мають околи, що не перетинаються.

2. Теорема Хаусдорфа про компактність множини у повному метричному просторі.

Множина Ψ банахового простору X називається *бікомпактною*, якщо з кожної послідовності $\{x_n\} \subset \Psi$ можна вибрати збіжну послідовність, границя якої належить Ψ.

Усяка бікомпактна множина обмежена.

Теорема 1. Компактна множина в нормованому просторі бікомпактна тоді і тільки тоді, коли вона замкнена.

Нехай X — нормований простір і множина $M \subset X$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Множина M_ε називається ε-сіткою множини M, якщо для будь-якої точки $x \in M$ знайдеться точка $\hat{x} \in M_\varepsilon$ така, що $\|x - \hat{x}\| < \varepsilon$.

Теорема 2 (Хаусдорф). Множина M в нормованому просторі X компактна тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ в X існує скінчена ε-сітка.

Наслідок 1. Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ для множини M існує компактна ε-сітка в X, то M компактна.

Наслідок 2. Компактна множина обмежена.

Наслідок 3. Всяка компактна множина сепарабельна.

3. Критерій компактності в C[a, b]. Теорема Арцела

Множина M, яка лежить в деякому топологічному просторі T, називається *предкомпактною* (або *компактним відносно T*), якщо її замикання в T компактне.

Сімейство Φ функцій φ, визначених на деякому відрізку $[a, b]$, називається рівномірно обмеженим, якщо існує таке число K, що

$$|\phi(x)| < K$$

для всіх $x \in [a, b]$ і всіх $\varphi \in \Phi$.

Сімейство $\Phi = \{\varphi\}$ називається рівностепенево неперервним, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon$$

для всіх x_1 і x_2 із $[a, b]$ таких, що $\rho(x_1, x_2) < \delta$ і для всіх $\varphi \in \Phi$.

Теорема Арцела. Для того, щоб сімейство Φ неперервних функцій, визначених на $[a, b]$, було предкомпактне в $C[a, b]$, необхідно і достатньо, щоб це сімейство було рівномірно обмежене і рівностепенево неперервне.

ЛІНІЙНИЙ ПРОСТІР

1. *Означення лінійного простору. Приклади лінійних просторів*
2. *Лінійна залежність та незалежність елементів лінійного простору.*
3. *Підпростори. Приклади підпросторів*
4. *Факторпростір.*
5. *Означення лінійного функціонала. Геометричний зміст лінійного функціонала.*

1. Визначення і приклади лінійних просторів

Непорожня множина L елементів $x, y, z, \ldots$ називається *лінійним*, або *векторним, простором*, якщо воно задовольняє наступним умовам:

I. Для будь-яких двох елементів $x, y \in L$ однозначно визначений третій елемент $z \in L$, який називаэться їхньою сумою і що позначається $x+y$, причому

1) $x+y = y+x$ (комутативність);
2) $x+(y+z) = (x+y)+z$ (асоціативність);
3) у L існує такий елемент 0, що $x + 0 = x$ для всіх $x \in L$ (існування нуля);
4) для кожного $x \in L$ існує такий елемент $-x$, що $x + (-x) = 0$ (існування протилежного елемента).

II. Для будь-якого числа а і будь-якого елемента $x \in L$ визначений елемент $ax \in L$ (добуток елемента x на число a), причому

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
2) $1 \cdot x = x$;
3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Залежно від того, який запас чисел (усі комплексні чи тільки дійсні) використовуються, різні комплексні і дійсні лінійні простори. Всюди, де не обговорене супротивне, наші побудови будуть вірні як для дійсних, так і для комплексних просторів.

Помітимо, що всякий комплексний лінійний простір можна розглядати як деякий дійсний простір, якщо обмежитися в ньому множенням векторів на дійсні числа.

Розглянемо деякі приклади лінійних просторів.

1. Пряма лінія R^1, тобто сукупність дійсних чисел зі звичайними арифметичними операціями додавання і множення, являє собою лінійний простір.

2. Сукупність усіляких систем n дійсних чисел $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, де додавання і множення на число визначаються формулами

$$(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n);$$
$$\alpha(x_1,x_2,...,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n),$$

також є лінійним простором. Воно називається дійсним n-вимірним арифметичним простором і позначається символом R^n. Аналогічно, комплексний n-вимірний арифметичний простір C^n визначається як сукупність систем n комплексних чисел (із множенням на будь-які комплексні числа).

3. Неперервні (дійсні чи комплексні) функції на деякому відрізку $[a, b]$ зі звичайними операціями додавання функцій і множення їх на числа утворять лінійний простір $C[a, b]$, що є одним з найважливіших для аналізу.

4. Простір l_2 в якому елементами служать послідовності чисел (дійсних і комплексних)

$$x=(x_1,x_2,...,x_n,...),$$

задовольняючі умові

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty,$$

з операціями

$$(x_1,x_2,...,x_n,...)+(y_1,y_2,...,y_n,...)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n,...),$$
$$\alpha(x_1,x_2,...,x_n,...)=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n,...),$$

є лінійним простором. Той факт, що сума двох послідовностей, що задовольняють умові, також задовольняє цій умові, випливає з елементарної нерівності $(\alpha_1+\alpha_2)^2\le 2\alpha_1^2+2\alpha_2^2$.

5. Послідовності, що збігаються до 0 з тими ж операціями додавання і множення, також утворюють лінійний простір.

2. Лінійна залежність та незалежність елементів лінійного простору.

Елементи $x, y,..., \omega$ лінійного простору L називаються *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $\alpha, \beta,..., \lambda$, не всі рівні нулю, що

$$\alpha x+\beta y+...+\lambda\omega=0. \qquad (2.1)$$

У протилежному випадку ці елементи називаються лінійно незалежними. Інакше кажучи, елементи $x, y,..., \omega$ лінійно незалежні, якщо з рівності (2.1) випливає $\alpha = \beta = ... = \lambda = 0$.

Нескінченна система елементів $x, y,...$ простору L називається лінійно незалежною, якщо будь-яка її скінченна підсистема лінійно незалежна.

Якщо у просторі L можна знайти n лінійно незалежних елементів, а будь-які $n+1$ елементів цього простору лінійно залежні, то кажуть, що простір L має розмірність n. Якщо ж у L можна вказати систему з довільного скінченного числа лінійно незалежних елементів, то кажуть, що простір L нескінченновимірний. Базисом в n-вимірному просторі L називається будь-яка система з n лінійно незалежних елементів.

ПІДПРОСТОРИ. ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ

1. *Підпростори. Приклади підпросторів.*
2. *Фактор-простір.*
3. *Означення лінійного функціонала. Геометричний зміст лінійного функціонала.*

1. Підпростори. Приклади підпросторів

Непуста множина L^1 лінійного простору L називається *підпростором*, якщо він сам утворює лінійний простір по відношенню до певних в L операцій додавання і множення на число.

Інакше кажучи, $L'\subset L$ є підпростір, якщо з $x\in L'$, $y\in L'$ випливає, що $\alpha x+\beta y\in L'$ при будь-яких α і β.

У всякому лінійному просторі L існує підпростір, який складається з одного нуля, — нульовий підпростір. З іншого боку, весь L можна розглядати як свій підпростір. Підпростір, що відрізняється від L і містить хоча б один ненульовий елемент, називається *власним*.

Наведемо приклади власних підпросторів.

1. Нехай L — який-небудь лінійний простір і x — деякий його ненульовий елемент. Сукупність елементів $\{\lambda x\}$, де λ пробігає всі числа (відповідно комплексні або дійсні), утворюючи, очевидно, одновимірний підпростір. Він є власним, якщо розмірність L більша 1.

2. Розглянемо простір неперервних функцій $C[a, b]$ і в ньому сукупність усіх многочленів $P[a, b]$. Зрозуміло, що многочлени утворюють в $C[a, b]$ підпростір (що має, як і всі $C[a, b]$, нескінченну розмірність). У той же час сам простір $C[a, b]$ можна розглядати як підпростір більш обширного простору всіх неперервних і розривних функцій на $[a, b]$.

3. Розглянемо простори l_2, c_0, c, m і R^∞. Кожен з них є власним підпростором наступного.

Нехай $\{x_\alpha\}$ — довілна непуста множина елементів лінійного простору L. Тоді в L існує найменший підпростір, який містить $\{x_\alpha\}$. Дійсно, хоча б один підпростір, що містить $\{x_\alpha\}$, в L існує: це весь L. Далі зрозуміло, що перетин будь-якої множини $\{L_\gamma\}$ підпросторів є знову підпростір. Справді, якщо $L^* = \bigcap\limits_\gamma L_\gamma$ і $x, y \in L^*$, то і $\alpha x + \beta y \in L^*$ при всіх α і β. Візьмемо тепер весь підпростір, що містить систему векторів $\{x_\alpha\}$, і розглянемо їх перетин. Це і буде найменший підпростір, що містить систему $\{x_\alpha\}$. Такий мінімальний підпростір назвемо підпростором, породженим множиною $\{x_\alpha\}$, або лінійною оболонкою множини $\{x_\alpha\}$. Позначатимемо цей підпростір $L(\{x_\alpha\})$.

2. Фактор-простір

Нехай L — лінійний простір і L' — деякий його підпростір. Два елементи x і y з L еквівалентні, якщо їх різниця $x–y$ належить L'. Це відношення рефлексивне, симетричне і трианзитивне, тобто визначає розбиття усіх $x \in L$ на класи. Клас еквівалентних елементів називається класом суміжності (по підпростору L'). Сукупність усіх таких класів назвемо фактор-простором L по L' і позначатимемо L/L'.

Кожен фактор-простір L/L' (з тими ж операціями додавання і множення на число) представляє собою лінійний простір.

Якщо L — n-вимірний простір, а його підпростір L' має розмірність k, то фактор-простір L/L' має розмірність $n–k$.

Нехай L — довільний лінійний простір і L' — деякий його підпростір. Розмірність фактор-простору L/L' називається корозмірністю підпростору L' в просторі L.

3. Означення лінійного функціонала. Геометричний зміст лінійного функціонала

Числову функцію f, визначену на деякому лінійному просторі L, називатимемо *функціоналом*. Функціонал f називається *адитивним*, якщо

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \text{ для всіх } x, y \in L;$$

він називається однорідним, якщо

$$f(\alpha x)=\alpha f(x) \ (\alpha \text{ — довільне число}).$$

Адитивний однорідний функціонал називається *лінійним функціоналом*.

Функціонал f, визначений в комплексному лінійному просторі, називається *спряжено-однорідним*, якщо $f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$, де $\bar{\alpha}$ — число, комплексно спряжене α.

Наведемо приклади лінійних функціоналів.

1. Нехай R^n є n-вимірний арифметичний проостір з елементами $E = (E_1, ..., E_n)$ і $a = (a_1, ..., a_n)$ — довільний набір з n фіксованих чисел. Тоді

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

лінійний функціонал в R^n. Вираз

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i$$

представляє собою спряжено-лінійний функціонал в C^n.

Нехай f — деякий відмінний від тотожнього нуля лінійний функціонал на лінійному просторі L. Сукупність тих елементів x із L, які задовольняють умові

$$f(x) = 0,$$

представляє собою підпростір простору L — підпростір нулів або ядро функціонала f. Дійсно, якщо $f(x) = f(y) = 0$, то

$$f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y) = 0.$$

Цей підпростір позначається $\mathrm{Ker}\, f$.

Підпростір $\mathrm{Ker}\, f$ має корозмірність 1. Підпростір $\mathrm{Ker}\, f$ визначає лінійний функціонал, який обертається на ньому в нуль, з точністю до постійного множника.

Для всякого підпростору L^1 можна вказати такий функціонал f, що $\mathrm{Ker}\, f = L^1$. Достатньо вибрати довільний елемент $x_0 \notin L'$ і представити кожний елемент $x \in L$ у вигляді $x = \alpha x_0 + y$. Таке представлення єдине. Поклавши $f(x)=\alpha$, отримаємо лінійний функціонал f, для якого $\mathrm{Ker}\, f = L^1$.

Нехай L^1 – якийсь підпростір корозмірності 1 в лінійному просторі L; тоді всякий клас суміжності простору L по підпростору L^1 називається гіперплощиною, паралельною підпростору L^1. Іншими словами, гіперплощина M^1, паралельна підпростору L^1, — це множина, яка отримується із L^1 паралельним переносом на якийсь вектор $x_0 \in L$:

$$M' = L' + x_0 = \{y : y = x + x_0, x \in L'\}.$$

Між усіма нетривіальними лінійними функціоналами, визначеними на L, і усіма гіперплощинами в L, що не проходять через початок координат, існує взаємно однозначна відповідність.

ЛІНІЙНИЙ НОРМОВАНИЙ ПРОСТІР

1. *Означення норми та лінійного нормованого простору; приклади нормованих лінійних просторів. Простір Банаха.*
2. *Підпростір нормованого простору.*
3. *Неперервні лінійні функціонали у нормованому просторі.*
4. *Теорема Хана-Банаха.*

1. Означення норми та лінійного нормованого простору; приклади нормованих лінійних просторів. Простір Банаха

Визначення норми та лінійного нормованого простору; приклади лінійних нормованих просторів. Простір Банаха.

Лінійний простір E називається *нормованим* простором, якщо кожному числу $x \in E$ поставлено у відповідність невід'ємне число $\|x\|$ (норма x) так, що виконані наступні аксіоми:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ у тім і тільки в тому випадку, коли $x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Таким чином, норма — це визначена усюди на E функція з невід'ємними значеннями і з властивостями 1–3. Помітимо, що аксіома 1 називається умовою невиродженості норми, аксіома 2 — умовою однорідності норми, а аксіома 3 — нерівністю трикутника. У випадку векторів аксіома 3 означає, що довжина сторони в трикутнику не перевищує суми довжин двох інших його сторін. Як наслідок звідси маємо: довжина будь-якої сторони трикутника чи більше рівна різниці довжин двох інших його сторін. Відповідна нерівність для норми має вигляд:

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| .$$

Доведемо цю нерівність. По нерівності трикутника маємо:

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

відкіля $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$; змінюючи ролями x і y, одержимо

$$\|x - y\| \geq \|y\| - \|x\| .$$

Обидві останні нерівності в сукупності дають нерівність 1.

У нормованому просторі можна ввести відстань між будь-якими двома його елементами за формулою

$$\rho(x, y) = \|y - x\| .$$

Наведемо приклади деяких лінійних нормованих просторів.

1. Пряма лінія R^1 стає нормованим простором, якщо покласти $\|x\| = |x|$.

2. Якщо в дійсному n-вимірному просторі R^n з елементам $x = (x_1, ...x_n)$ покласти

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$

то всі аксіоми норми будуть виконаними. Формула

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

визначає в R^n ту саму метрику, що розглядалась в R^n .

У цьому просторі можна ввести норму

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

і норму

$$\|x\|_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| .$$

Таким чином, метричні простори можна вважати узагальненнями нормованих просторів.

Розглянемо в нормованому просторі E множину $S_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$, де $x_0 \in E$ — фіксована точка, а $r > 0$. Множина $S_r(x_0)$ називається відкритим шаром з центром в x_0, радіуса r. Аналогічно, множина

$$\overline{S}_r(x_0) = \{x \in E : \| x - x_0 \| \leq r\}$$

називається *замкненим шаром* (з центром в x_0, радіуса r). Множина

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in E : \| x - x_0 \| = r\}$$

називається *сферою*. Очевидно, $\overline{S}_r(x_0) = S_r(x_0) \cup \sigma_r(x_0)$.

Приклад. Простір c^m. Введемо в R^m норму

$$\|x\|_k = \max_{1 \leq i \leq m} |\xi_i|.$$

Перевіримо аксіоми норми:

1) $\|x\|_k \geq 0$ — це очевидно. Нехай $\|x\| = 0$, тобто $\max\limits_{1 \leq i \leq m} |\xi_i| = 0$; але тоді всі $\xi_i = 0$ і $x = \{0\}_{i=1}^{m} = 0$;

2) $|\lambda \xi_i| = |\lambda| \cdot |\xi_i|$, звідки витікає однорідність норми;

3) $|\xi_i + \eta_i| \leq |\xi_i| + |\eta_i| \leq \max\limits_i |\xi_i| + \max\limits_i |\eta_i|$ тобто $|\xi_i + \eta_i| \leq \|x\|_k + \|y\|_k$.

Переходячи в цій нерівності зліва до max по i, отримаємо нерівність трикутника.

Послідовність $\{x_n\} \subset X$ називається *фундаментальною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що для будь-яких номерів $n > N$ і будь-яких натуральних p виконується нерівність $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.

Лема. Всяка послідовність, що збігається в X, є фундаментальною.

Нормований простір називається *повним*, якщо в ньому всяка фундаментальна послідовність збігається до елемента з цього простору. Повний нормований простір називається *банаховим* простором. Наприклад, простори R^n, l_2, $C[a, b]$ є банаховими.

2. Підпростір нормованого простору

Замкнений лінійний многовид L в нормованому просторі E називається *підпростором* в E.

Визначимо відстань $\rho(E, L)$ від точки x до підпростору L наступною рівністю:

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\| .$$

Згадаємо, якщо деяка множина Ψ дійсних чисел обмежена знизу, то існує число α_0 таке, що

1) $\alpha_0 \leq E$ для будь-яких $x \in \Psi$ (тобто α_0 — нижня межа Ψ);

2) для будь-якого $\alpha^1 > \alpha_0$ існує $x^1 \in \Psi$ таке, що $x^1 < \alpha^1$ (тобто α_0 — найбільша із нижніх меж Ψ).

При цьому α_0 називається *точною нижньою межею* множини Ψ і позначається $\alpha_0 = \inf \Psi$ або $\alpha_0 = \inf\limits_{x \in \Psi} x$.

3. Неперервні функціонали у нормованому просторі

У нормованому просторі лінійний функціонал неперервний тоді і тільки тоді, коли його значення на одиничному шарі обмежені у сукупності.

Наведемо приклади лінійних функціоналів у нормованому просторі.

1. Нехай R^n є n-мірний евклідовий простір і a — певний фіксований вектор в ньому. Скалярний добуток

$$f(x) = (x, a),$$

де x пробігає всі R^n, представляє собою, очевидно, лінійний функціонал на R^n. В силу нерівності Коші-Буняковського

$$| f(x) | = | (x, a) | \leq \| x \| \cdot \| a \|; \tag{3.1}$$

тому цей функціонал обмежений, отже, і неперервний на R^n. Із нерівності (3.1) отримуємо:

$$\frac{| f(x) |}{\| x \|} \leq \| a \| .$$

Оскільки права частина цієї нерівності не залежить від x, то

$$\sup \frac{| f(x) |}{\| x \|} \leq \| a \|,$$

тобто $\| f \| \leq \| a \|$. Але покладемо $x = a$, отримаємо

$$| f(a) | = (a, a) = \| a \|^2, \text{ тобто } \frac{| f(a) |}{\| a \|} = \| a \| .$$

Тому $\|f\| = \|a\|$.

4. Теорема Хана-Банаха

Нехай E — дійсний нормований простір, L — його підпростір і f_0 — обмежений лінійний функціонал на L. Цей лінійний функціонал може бути продовжений до деякого лінійного функціонала f на всьому просторі E без збільшення норми, тобто так, що

$$\| f_0 \|_{наL} = \| f \|_{наE} .$$

Наслідок 1 (перша теорема відокремленості). Нехай A і B — опуклі множини в нормованому просторі X, причому хоча б одна з них, скажімо A, є опуклим тілом і його ядро не перетинається з B. Тоді існує ненульовий неперервний лінійний функціонал, розділяючий A і B.

Наслідок 2 (друга теорема відокремленості). Нехай A — замкнена множина в нормованому просторі X і $x_0 \in X$ — точка, що не належить A. Тоді існує неперервний лінійний функціонал, строго розділяючий x_0 і A.

Наслідок 3 (лема про анулятор). Для всякого (замкненого власного підпростору L банахового простору X існує ненульовий неперервний функціонал f, рівний нулю на L).

Наслідок 4. Якщо x_0 — ненульовий елемент в нормованому просторі X, то

$$| f(a) | = (a, a) = \| a \|^2, \text{ тобто } \frac{| f(a) |}{\| a \|} = \| a \| .$$

Тому $\|f\| = \|a\|$.

ЕВКЛІДІВ ПРОСТІР

1. *Простір Евкліда.*
2. *Унітарні простори.*
3. *Ортогональність елементів. Ортогональні та ортонормовані системи.*
4. *Приклади просторів зі скалярним добутком.*
5. *Процес ортогоналізації Шмідта.*

1. Простір Евкліда

Дійсний лінійний простір E називається евклідовим, якщо кожній парі його елементів x і y поставлено у відповідність дійсне число, яке позначається (x, y) і називається скалярним добутком, так що виконуються наступні аксіоми:

1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ в тому і тільки в тому випадку, коли $x = 0$;

2) (x, y) = (y, x);

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

4) (x+y, z) = (x, z)+(y, z).

Всякий евклідовий простір можна перетворити на нормований, визначивши на ньому норму за формулою

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}\ .$$

2. Унітарні простори

Комплексний лінійний простір *U* називається унітарним, якщо кожній парі його елементів *x* і *y* поставлено у відповідність комплексне число (*x*, *y*) — скалярний добуток *x* на *y* — і якщо при цьому виконуються наступні умови:

1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ в тому і тільки в тому випадку, коли *x* = 0;

2) (x, y) = $\overline{(y, x)}$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

4) (x+y, z) = (x, z)+(y, z).

Наведемо два елементарних наслідки, що спираються на аксіоми 1–4 і властивості комплексних чисел.

Наслідок 1. В унітарному просторі $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$.

Наслідок 2. (x, y+z) = (x, y)+(x, z).

3. Ортогональність елементів. Ортогональні та ортонормовані системи

Нехай *E* — простір зі скалярним добутком. Якщо (*x*, *y*) = 0, то елементи *x* і *y* називатимемо ортогональними і позначатимемо $x \perp y$. Очевидно, нуль простору *E* ортогональний будь-якому елементу. Розглянемо в *E* елементи x_1, x_2,..., x_m, усі не рівні нулю. Якщо $(x_k, x_l) = 0$ при будь-яких $k, l = 1, 2, \ldots, m$; $k \neq l$, то система елементів $x_1, x_2, \ldots, x_m$, називається ортогональною системою.

Теорема. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — ортогональна система; тоді $x_1, x_2, \ldots, x_m$ лінійно незалежні.

4. Приклади просторів зі скалярним добутком

1. Евклідовий простір E^m. Введемо в дійсному лінійному просторі E^m скалярний добуток за формулою

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \eta_k\ .$$

2. Простір l_2.

У лінійному просторі дійсних послідовностей $x = (\xi_k)_1^\infty$, $y = (\eta_k)_1^\infty$, таких, що $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 < +\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2 < +\infty$, введемо скалярний добуток за формулою

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k\ .$$

5. Процес ортогоналізації Шмідта

Будемо розглядати системи, що складаються з нескінченного числа елементів простору *E* (зі скалярним добутком), — $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ або, коротше, $\{x_k\}$. Систему $\{x_k\}$ називатимемо лінійно незалежною, якщо при будь-якому *n* = 1, 2,… система $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лінійно незалежна.

Систему $\{e_k\}$ будемо називати ортогональною, якщо всі $e_k \neq 0$ і (e_k, e_l) = = 0, якщо $k \neq l$. Систему $\{f_k\}$ називатимемо ортонормованою, якщо

$$(f_k, f_l) = \delta_{kl};\ k, l = 1, 2, \ldots$$

Виявляється, за будь-якою лінійно незалежною системою $\{x_k\}$ можна побудувати ортогональну систему $\{e_k\}$, а також ортонормовану систему $\{f_k\}$ за допомогою наступного процесу ортогоналізації Шмідта.

Покладемо $e_1 = x_1$ і помітимо, що $e_1 \neq 0$, так як система з одного елемента x_1 лінійно незалежна, як частина $\{x_k\}$. Далі e_2 шукаємо у вигляді $e_2 = x_2 - \lambda_{21} e_1$, де скаляр λ_{21} підберемо так, щоб було $e_2 \perp e_1$. Звідси $0 = (x_2 - \lambda_{21} e_1, e_1)$, тобто $\lambda_{21} = (x_2, e_1)/(e_1, e_1)$. Ітак, e_2 знайдено, причому $e_2 \neq 0$.

Далі, згідно методу математичної індукції, отримуємо наступне. Нехай $e_1, \ldots, e_{k-1}$ вже побудовані; e_k шукаємо у вигляді

$$e_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} e_i.$$

Скаляри λ_{ki} знаходимо з вимоги $e_k \perp e_l$; $l = 1, 2, \ldots, k-1$. Звідси $\lambda_{kl} = (x_k, e_l)/(e_l, e_l)$. При цьому $e_k \neq 0$. Отже, ортогональна система $\{e_k\}$ побудована. Вважаючи $f_k = e_k / \| e_k \|$, отримуємо ортонормовану систему $\{f_k\}$.

ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ

1. *Означення гільбертового простору.*
2. *Відстань від точки до замкненої випуклої множини.*
3. *Відстань від точки до підпростору.*
4. *Ортогональні доповнення.*
5. *Ряди Фур'є у гільбертовому просторі.*

1. Означення гільбертового простору

Простір зі скалярним добутком називається гільбертовим, якщо він повний в нормі, породженій скалярним добутком. Гільбертові простори звичайно позначають буквою H.

Прикладами гільбертових просторів є простори R^n, l_2, $L_2\ (a,b)$.

2. Відстань від точки до замкненої випуклої множини

Нехай в гільбертовому просторі H задана множина M і точка $x \in H$. Визначимо відстань від точки x до множини M за формулою

$$\rho(x,M) = \inf_{u\in M} \| x-u \| \ .$$

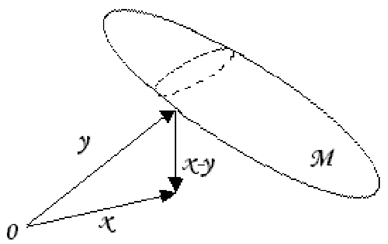

Рис. 1

Лема. Якщо $x \in M$, то $\rho(x, M)=0$. Якщо $x \notin M$ і M замкнена, то $\rho(x, M)>0$.

Теорема. Нехай M — замкнена випукла множина в гільбертовому просторі H і точка $x \notin M$. Тоді існує єдиний елемент $y \in M$ такий, що (див. рис. 1).

$$\rho(x,M) = \| x-y \|.$$

3. Відстань від точки до підпростору

Із попередньої теореми маємо наступні наслідки.

Наслідок 1. Існує єдиний елемент $y \in L$, що реалізує відстань від точки x до підпростору L: $\rho(x,L) = \| x-y \|$.

Звідси витікає ще одна теорема.

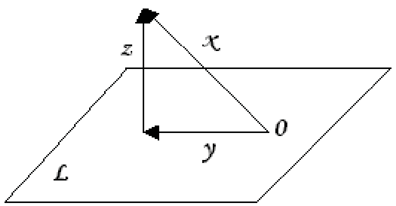

Рис. 2

Теорема. Нехай $\|x-y\|=\rho(x, L)$; тоді $x-y \perp$ L.

Наслідок 2. Нехай L — підпростір в H; тоді для будь-якого $x \in H$ справедливе розкладання (рис. 2)

$$x = y + z,$$

де $y \in L$, $z \perp L$, причому цей розклад єдиний.

4. Ортогональні доповнення

Нехай L — лінійний многовид в H. Сукупність всіх елементів з H, ортогональних до L, називається ортогональним доповненням до L і позначається $L^{\perp}$.

Теорема 1. $L^{\perp}$ — підпростір в H.

Теорема 2. Нехай L — лінійний многовид в гільбертовому просторі H. L щільна в H тоді і тільки тоді, коли $L^{\perp}=\{0\}$.

5. Ряди Фур'є у гільбертовому просторі

Нехай в нескінченомірному просторі E зі скалярним добутком дана ортогональна система $\{\varphi_k\}$, тобто $\varphi_k \neq 0$, $k=1,2,\ldots$; $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$ при $l \neq k$. Ряд виду $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \phi_k$ називається рядом по ортогональній системі $\{\varphi_k\}$. Нехай $x \in E$. Числа $c_k = \dfrac{(x,\phi_k)}{\| \phi_k \|^2}$, $k = 1,2,\ldots$, називаються коефіцієнтами Фурьє елемента x по ортогональній системі $\{\varphi_k\}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ називається рядом Фурьє (по ортогональній системі $\{\varphi_k\}$), складеним для елемента x (ряд Фурьє елемента x). Многочлен $\sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$ — часткова сума ряду Фурьє — називається многочленом Фурьє (елемента x).

Теорема. Нехай $\{\varphi_k\}$ ортогональна у просторі зі скалярним добутком E, нехай L_n — підпростір, натягнутий на $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. Тоді $d_n = \rho(x, L_n), x \in E$, дається наступними формулами:

$$d_n = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k \right\|,$$

$$d_n^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} | c_k |^2 \| \phi_k \|^2,$$

де c_k, $k = 1, 2,\ldots$, — коефіцієнти Фурьє елемента x по системі $\{\varphi_k\}$.

Наслідок. Якщо $m > n$, то

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k \right\|.$$

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА ОБМЕЖЕНІСТЬ

1. *Загальне означення оператора.*
2. *Взаємно однозначні оператори.*
3. *Суперпозиція (композиція) операторів.*
4. *Оператори в нормованих просторах. Границя та неперервність.*
5. *Означення лінійного оператора.*
6. *Неперервні лінійні оператори.*
7. *Обмежені лінійні оператори.*
8. *Еквівалентність понять лінійного неперервного та лінійного обмеженого операторів.*

9. *Приклади лінійних операторів у скінченовимірних просторах.*
10. *Приклади лінійних обмежених операторів у просторах послідовностей.*
11. *Інтегральні оператори у просторах функцій.*

1. Загальне означення оператора

Нехай X і Y — множини довільної природи. Нехай, далі, $D \subseteq X$, тобто в X виділено підмножину D. Якщо кожному елементу $x \in D$ ставиться у відповідність певний елемент $y \in Y$, то кажуть, що заданий оператор $y = F(x)$. При цьому множина D називається *областю визначення оператора* F і позначається $D(F)$. Множина $R = R(F) = \{y \in Y;\ y = F(x),\ x \in D\}$ називається *областю значень* оператора F. Схематично дію оператора F можна зобразити наступним чином:

$$X \supseteq D(F) \xrightarrow{F} R(F) \subseteq Y.$$

Або коротко можна записати: F: $X \to Y$.

2. Взаємно однозначні оператори

Нехай F: $X \to Y$. Фіксуємо $y \in R(F)$ і розглянемо множину всіх прообразів елемента y, яка далі позначатиметься $F^{-1}(y)$. Очевидно, ця множина не порожня. Дуже важливим є випадок, коли $F^{-1}(y)$ складається рівно з одного елемента, який ми позначимо через x.

Оператор $y = f(x)$ називається *взаємно однозначним*, якщо кожному образу $y \in R(F)$ відповідає єдиний прообраз $x = F^{-1}(y)$. Якщо F взаємно однозначний, то F^{-1}: $Y \to X$, який називається *оберненим* до F. Очевидно,

$$D(F^{-1}) = R(F), \quad R(F^{-1}) = D(F).$$

Оператор F^{-1} здійснює, таким чином, “обернену” відповідність.

3. Суперпозиція операторів

Нехай дано множини X, Y, Z довільної природи і оператори

$$F \text{ с } D(F) \subseteq X \text{ і } R(F) \subseteq Y;$$
$$\Phi \text{ с } D(F) \subseteq Y \text{ і } R(\Phi) \subseteq Z.$$

Якщо $R(F) \subseteq D(\$)$, то має смисл оператор Φ від оператора F, або, як часто кажуть, суперпозиція операторів F і Φ, тобто оператор $Z = \$[F(x)]$, який відображає $D(F)$ в $R(\Phi)$ (тобто $\$[F(D(F))] \subseteq R(\$)$). Цей оператор позначають іноді через $\Phi \cdot F$ і називають *добутком* операторів Φ і F.

4. Оператори в нормованих просторах. Границя і неперервність

Нехай X і Y — нормовані простори, і дано оператор F: $X \to Y$ такий, що його область визначення $D(F)$ містить окіл $S(x_0)$ точки x_0, за виключенням, можливо, самої точки x_0.

Елемент $y_0 \in Y$ називається *границею* $F(x)$ при $x \to x_0$ (записується $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} F(x)$ або, коротше, $F(x) \to y_0$ при $x \to x_0$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in S(x_0)$, що задовольняють нерівності $\|x - x_0\| < \delta$, маємо $\|F(x) - y_0\| < \varepsilon$.

Нехай дано оператор F: $X \to Y$, визначений в околі точки x_0. Оператор F називається *неперервним* в точці x_0, якщо $F(x) \to F(x_0)$ при $x \to x_0$.

Нехай $F(x)$ — оператор з областю визначення $D(F) \subset X$ і областю значень $R(F) \subset Y$, де X і Y — нормовані простори. Оператор F будемо називати *обмеженим*, якщо він переводить всяку обмежену в X множину із $D(F)$ у множину, обмежену в Y.

5. Означення лінійного оператора

Нехай X і Y — лінійні простори, обидва дійсні або обидва комплексні.

Оператор A: $X \to Y$ з областю визначення $D(A)$ називається *лінійним*, якщо:

1) $D(A)$ — лінійний многовид;

2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$

для будь-яких $x_1, x_2 \in D$ і будь-яких скалярів λ_1, λ_2.

Теорема. Область значень всякого лінійного оператора є лінійним многовидом.

6. Неперервні лінійні оператори

Нехай X і Y — нормовані простори і A: $X \to Y$, A — лінійний оператор з областю визначення $D(A) = X$.

Оператор A називається *неперервним* в точці $x_0 \in X$, якщо $Ax_0 \to Ax$ при $x \to x_0$.

Теорема. Нехай лінійний оператор A повсюди заданий в банаховому просторі X і зі значеннями в банаховому просторі Y неперервний в точці $0 \in X$; тоді A неперервний в будь-якій точці $x_0 \in X$.

7. Обмежені лінійні оператори

Якщо $Ax = 0$ для будь-якого $x \in X$, то оператор A називається *нулевим оператором* і позначається 0.

Лінійний оператор A з $D(A) = X$, $R(A) \subset X$ називається *обмеженим*, якщо він обмежений на одиничному шарі $\overline{S}_1(0)$, тобто обмежена множина $\{\|Ax\|, \|x\| < 1\}$.

Теорема 1. Оператор A обмежений тоді і тільки тоді, коли справедлива оцінка $\| Ax \| \le c \| x \|$ для будь-яких $x \in X$, де c — постійна.

Теорема 2. Нехай $M \subseteq X$ і M — обмежена множина; тоді множина $\{\| Ax \|, x \in M\}$ обмежена.

Наслідок. Якщо A — обмежений лінійний оператор, то він обмежений на будь-якому шарі $S_R(x_0)$ ($x_0 \in X$ і $R > 0$ — довільні).

8. Еквівалентність понять лінійного неперервного і лінійного обмеженого операторів

Теорема. Нехай A: $X \to Y$, А — лінійний оператор, X, Y — банахові простори, $D(A) = X$. Для того щоб A був неперервним, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим.

9. Приклади лінійних операторів у скінченновимірних просторах

Приклад 1. Оператор A розглядатимемо як оператор, діючий у просторі C^m. Доведемо, що A обмежений. Маємо оцінку

$$|\eta_i| \le \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \, |\xi_j| \le \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \sup_j |\xi_j| \le \gamma_m \| x \|_k .$$

Тому, $\| y \|_k \le \gamma_m \| x \|_k$, де $\gamma_m = \sup_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$.

Тоді $\| Ax \|_k \le \gamma_m \| x \|_{k.}$ Згідно теоремі 1 п.7 оператор A обмежений.

Приклад 2. Нехай оператор A діє в $l_p^{(m)}$, $p > 1$. Маємо наступну оцінку

$$\| Ax \|_{l_p^{(m)}}^p = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \xi_j \right|^p \le \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q \right)^{p/q} \|x\|_{l_p^{(m)}}^p .$$

Таким чином, $\| Ax \|_{l_p^{(m)}}^p \le \alpha_m \| x \|_{l_p^{(m)}}$, де $\alpha_m = \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q \right)^{p/q} \right]^{1/p}$.

10. Приклади лінійних операторів у просторах послідовностей

Формальний алгебраїчний вираз $y = Ax$, де x, y — стовпці нескінченого порядку, може визначати при деяких обмеженнях на матрицю (a_{ij}) лінійні оператори в нормованих просторах послідовностей:

а) якщо $\beta = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{1/q} < +\infty$, то A — лінійний обмежений оператор, що діє з l_p в l_q (p>1, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$);

б) якщо $\alpha = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{p/q} \right]^{1/q} < +\infty$, то A — лінійний обмежений оператор, що діє в l_p, p>1.

11. Інтегральні оператори в просторах функцій

Інтегральний вираз $\upsilon = Ku$, або

$$\upsilon(x) = \int_a^b K(x,s) u(s) ds,$$

в якому ми передбачаємо функцію $K(x, s)$ неперервною в квадраті $[a, b] \times [a, b]$, може визначати різноманітні інтегральні оператори.

Розглядаючи K як оператор в $C[a, b]$, отримаємо оцінку

$$\|\upsilon\|_{! \, [a,b]} \le \max_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x,s)| ds \|u\|_{C[a,b]}.$$

Аналогічно, якщо K діє з $\tilde{L}_p[a,b]$ в $\tilde{L}_q[a,b]$, то маємо (p>1, $p^{-1}+q^{-1}=1$)

$$|\upsilon(x)| \le \left| \int_a^b K(x,s) u(s) ds \right| \le \left(\int_a^b |K(xs)^q| ds \right)^{\frac{1}{q}} \|u\|_{\tilde{L}_p[a,b]},$$

звідки $|\upsilon(x)|^q \le \int_a^b |K(x,s)|^q \, ds \|u\|_{\tilde{L}[a,b]}^q$.

Інтегруючи, отримуємо, що якщо $\{u_n\}$ фундаментальна в $\tilde{L}_p[a,b]$, то $\{\upsilon_n\}$, де $\upsilon_n = Ku_n$, фундаментальна в $\tilde{L}_q[a,b]$.

Таким чином, K обмежений як лінійний оператор, діючий з $L_p[a,b]$ в $L_q[a,b]$.

Аналогічно визначаються інтегральні оператори, що відповідають інтегральному виразу

$$\upsilon(x) = \int_G K(x,s) u(s) ds,$$

де G — обмежена область, що кубується в R^m.

ОБЕРНЕНІ ОПЕРАТОРИ

1. *Обернені оператори в лінійних та в нормованих просторах. Множина нулів N(A).*
2. *Приклади обернених операторів.*
3. *Лівий та правий обернені оператори.*
4. *Існування $(I–C)^{-1}$.*
5. *Існування $(A–C)^{-1}$.*

1. Обернені оператори в лінійних та в нормованих просторах. Множина нулів N(A)

Нехай заданий оператор $A: X \to Y$, де X, Y — лінійні простори, причому його область визначення $D(A) \subseteq X$, а область значень $R(A) \subseteq Y$.

Введемо множину $N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ — множину нулів оператора A. Множина $N(A)$ не пуста, оскільки $0 \in N(A)$.

Теорема 1. Оператор A переводить $D(A)$ в $R(A)$ взаємно однозначно тоді і тільки тоді, коли $N(A) = \{0\}$ (тобто множина нулів A складається лише з елемента 0).

Теорема 2. Оператор A^{-1} існує і одночасно обмежений на $R(A)$ тоді і тільки тоді, коли для деякої константи $m > 0$ і будь-якого $x \in D(A)$ виконується нерівність

$$\|Ax\| \geq m\|x\|. \tag{1.1}$$

Означення. Лінійний оператор $A : X \to Y$ неперервно оборотний, якщо $R(A) = Y$, оператор A оборотний і $A^{-1} \in L(Y, X)$ (тобто обмежений).

Теорема 3. Оператор A неперервно оборотний тоді і тільки тоді, коли $R(A) = Y$ і деякої константи $m > 0$ і всіх $x \in D(A)$ виконується нерівність (1.1).

У випадку всюди визначеного і обмеженого оператора $A \in L(X, Y)$ має місце теорема Банаха про обернений оператор.

Теорема Банаха. Якщо A — обмежений лінійний оператор, що відображає взаємно однозначно банаховий простір X на банаховий простір Y, то обернений оператор A^{-1} обмежений.

2. Приклади обернених операторів

1) У лінійному просторі m-мірних стовпців R^m розглянемо лінійний оператор $y = Ax$, який записується в матричному вигляді

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{2.1}$$

Нехай $\det(a_{ij}) \neq 0$. Тоді за правилом Крамера систему (2.1) можна розв'язати однозначно відносно змінних $\xi_1, ..., \xi_m$ і знайти обернений оператор $x = A^{-1}y$, причому A^{-1} задається оберненою до (a_{ij}) матрицею.

2) Розглянемо у просторі m обмежених числових послідовностей лінійний оператор A, заданий нескінченою трикутною матрицею (a_{ij}):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 & ... \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & 0 & ... \end{pmatrix}.$$

Нехай ряди $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{i1}|, \quad \sum_{i=2}^{\infty}|a_{i2}|, ..., \sum_{i=n}^{\infty}|a_{in}|, ...$ збігаються. Тоді оператор A обмежений.

3) Задача Коші для лінійного диференціального рівняння n-го порядку. Нехай функції $y(t)$ і $a_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, неперервні на $[0, T]$. Розглянемо диференціальне рівняння

$$Ax \equiv x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_n(t)x(t) = y(t). \tag{2.2}$$

Знайдемо його розв'язок, який задовольняє початковим умовам

$$x(0) = x'(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{2.3}$$

З операторної точки зору це означає наступне: область визначення $D(A)$ нехай складається з n разів неперервно диференційованих на $[0, T]$ функцій $x(t)$, що задовольняють умовам (2.3).

Нехай $x_1(t), ..., x_n(t)$ — система з n лінійно незалежних розвя'зків відповідного (2.2) однорідного рівняння (тобто (2.2) при $y(t) \equiv 0$). Складемо визначник Вронського

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & ... & x_n(t) \\ x_2'(t) & ... & x_n'(t) \\ ... & ... & ... \\ x_1^{(n-1)}(t) & ... & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Відомо, що $W(t) \neq 0$ на $[0, T]$. Згідно методу Лагранжа варіації довільних постійних розв'язок задачі (2.2)–(2.3) відшукується у вигляді

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + ... + c_n(t)x_n(t),$$

причому для довільних невідомих функцій $c_i(t)$ виникає наступна система рівнянь:

$$c_1'(t)x_1(t) + ... + c_n'(t)x_n(t) = 0;$$
$$c_1'(t)x_1'(t) + ... + c_n'(t)x_n'(t) = 0;$$
$$..$$
$$c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + ... + c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = y(t).$$

Розв'язуючи її за правилом Крамера, знаходимо

$$c_k'(t) = \frac{\omega_k(t)}{\omega(t)} y(t), \quad k = 1, 2, ..., n,$$

де $\omega_k(t)$ — алгебраїчне доповнення k-го елемента n-го рядка визначника $W(t)$.

Враховуючи початкові умови (2.2), знаходимо розв'язок задачі (2.2)–(2.3) в явному вигляді:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_0^t \frac{\omega_k(s)}{\omega(s)}\,y(s)ds. \qquad (2.4)$$

Цей розв'язок єдиний, що слідує із загальної теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

Із формули (2.4) витікає неперервна оборотність оператора A. Дійсно,

$$\|x\|_{C[0,T]}\le c\|y\|_{C[0,T]};$$

$$c=\max_{[0,T]}\sum_{k=1}^{n}|x_k(t)|\int_0^t\left|\frac{\omega_k(s)}{\omega(s)}\right|ds.$$

3. Лівий та правий обернені оператори

Нехай $A\in L(X, Y)$. Оператор $U\in L(Y, X)$ називатимемо *правим оберненим* до A, якщо $AU=I_Y$.

Нехай $A\in L(X, Y)$. Оператор $V\in L(Y, X)$ називатимемо *лівим оберненим* до A, якщо $VA=I_X$.

Тут через I_Y позначено тотожний оператор у просторі Y, а через I_X — тотожний оператор у просторі X. Нижче для правого оберненого до A використовуватимемо позначення A_r^{-1}, а для лівого — A_l^{-1}.

Лема 1. Якщо існує правий обернений до A, то рівняння $Ax = y$ має розв'язок

$$x=A_r^{-1}y.$$

Якщо існує лівий обернений до A, то рівняння $Ax = y$ може мати не більше одного розв'язку.

Лема 2. Нехай для оператора $A\in L(X, Y)$ існує A_r^{-1} і A_l^{-1}. Тоді існує оператор A^{-1}, обернений до A, і

1) $A^{-1}=A_r^{-1}=A_l^{-1}$;

2) $D(A^{-1})=Y$, $R(A^{-1})=X$$;

3) правий обернений до A і лівий обернений до A єдині.

4. Існування (I–C)$^{-1}$

Нехай X — банаховий простір. Розглянемо банаховий простір $L(X)$ — простір лінійних, обмежених, всюди заданих операторів. Нехай I — тотожній оператор в $L(X)$. Очевидно, I — неперервно обернений. Разом з I неперервно обернені всі оператори $A\in S_1(I)$ — одиничного кола в $L(X)$, тобто всі такі A, для яких справедлива нерівність $\|A–I\|<1$. Для стислості покладемо $C=A–I$.

Теорема. Нехай $C\in L(X)$ і $\|C\|<1$; тоді оператор $I–C$ неперервно обернений. При цьому справедливі оцінки

$$\left\|(I-C)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\|C\|}; \qquad (3.1)$$

$$\left\|I-(I-C)^{-1}\right\|\le\frac{\|C\|}{1-\|C\|}. \qquad (3.2)$$

5. Існування (A–C)$^{-1}$

Лема. Нехай $A_1\in L(X, Y)$ і $A_2\in L(Y, Z)$ неперервно обернені. Тоді $A_2A_1\in L(X, Z)$ неперервно обернений і виконується нерівність

$$\left\|(B-A)A^{-1}\right\|<1.$$

Тоді B неперервно обернений і справедливі оцінки

$$\left\|B^{-1}\right\|\le\frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|(B-A)A^{-1}\right\|};$$

$$\left\|B^{-1}-A^{-1}\right\|\le\frac{\left\|A^{-1}\right\|\left\|(B-A)A^{-1}\right\|}{1-\left\|(B-A)A^{-1}\right\|}.$$

СПРЯЖЕНІ ТА САМОСПРЯЖЕНІ ОПЕРАТОРИ

1. *Означення спряженого оператора.*
2. *Приклади спряжених операторів.*
3. *Самоспряжені оператори. Приклади.*
4. *Оператори ортогонального проектування.*

1. Означення спряженого оператора

Розглянемо неперервний лінійний оператор $y = Ax$, який відображає лінійний топологічний простір E в такий самий простір E_1,. Нехай g — лінійний функціонал, визначений на E_1, тобто $g\in E_1^*$. Застосуємо функціонал g до елемента $y = Ax$; легко перевірити, що $g(Ax)$ є неперервний лінійний функціонал, визначений на E; позначимо його f. Функціонал f є, таким чином, елемент простору E^*. Кожному функціоналу $g\in E_1^*$ ми поставили у відповідність функціонал $f\in E^*$, тобто отримали деякий оператор, що відображає E_1^* в E^*. Цей оператор називається *спряженим* до оператора A і позначається A^*.

Позначивши значення функціонала f на елементі x символом (f, x), отримаємо, що $(g, Ax) = (f, x)$, або

$$(g, Ax) = (A^*g, x).$$

Це співвідношення можна прийняти за визначення спряженого оператора.

2. Приклади спряжених операторів

Спряжений оператор в скінченномірному просторі. Нехай дійсний n-мірний простір R^n відображається у простір R^m (m-мірний) оператором A і нехай $\|a_{ij}\|$ — матриця цього оператора. Відображення $y = Ax$ можна записати у вигляді системи рівностей

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1, 2, ..., m,$$

а функціонал $f(x)$ — у вигляді

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j x_j .$$

Із рівності $f(x) = g(Ax) = \sum_{i=1}^{m} g_i y_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$.

Отримаємо, що $f_i = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$. Оскільки $f = A^*g$, тоді звідси випливає, що оператор A^* задається матрицею, транспонованою по відношенню до матриці оператора A.

3. Самоспряжені оператори. Приклади

Обмежений лінійний оператор A, який діє в евклідовому просторі R, називається *самоспряженим*, якщо $A = A^*$, тобто якщо $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всіх $x, y \in R$.

Відмітимо наступні важливі властивості оператора A^*, спряженого до оператора A. Підпростір R_1 евклідового простору R називається *інваріантним* відносно оператора A, якщо із $x \in R_l$ випливає $Ax \in R_l$. Якщо підпростір R_1 інваріантний відносно A, то його ортогональне доповнення $R_1^{\perp}$ інваріантне відносно A^*. Дійсно, якщо $y \in R_1^{\perp}$, то для всіх $x \in R_1$ маємо

$$(x, A^*y) = (Ax, y) = 0,$$

оскільки $Ax \in R_1$. Зокрема, якщо A — самоспряжений оператор, то ортогональне доповнення до будь-якого його інваріантного підпростору само інваріантне відносно A.

4. Оператор ортогонального проектування

Розглянемо гільбертовий простір H і в ньому деякий підпростір H_l. Розклавши H в пряму суму підпростору H_1 і його ортогонального доповнення, тобто представимо кожний елемент $h \in H$ у вигляді

$$h = h_1 + h_2\ (h_1 \in H_1, h_2 \perp H_1),$$

покладемо $Ph = h_1$. Цей оператор називається оператором ортогонального проектування, або ортопроектором H на H_1. Ортопроектор лінійний і неперервний.

КОМПАКТНІ ОПЕРАТОРИ

1. *Означення компактного оператора.*
2. *Множина σ (X, Y).*
3. *Властивості компактних операторів.*
4. *Теорема Шаудера.*
5. *Приклади компактних операторів.*

1. Означення компактного оператора

Оператор A, що відображає банаховий простір E в себе (чи другий банаховий простір E_1), називається *компактним*, або *цілком неперервним*, якщо він кожну обмежену множину переводить в компактну множину.

У скінченновимірному нормованому просторі всякий лінійний оператор компактний, оскільки він переводить будь-яку обмежену множину в обмежену, а в скінченновимірному просторі всяка обмежена множина передкомпактна.

2. Множина σ (X, Y)

Оператор $A \in L(X,Y)$ *цілком неперервний*, якщо замкнену одиничну сферу простору X він переводить в компактну множину простору Y.

Теорема 1. Якщо $A \in L(X,Y)$ цілком неперервний, то будь-яку обмежену в X множину він переводить у множину, компактну в Y.

Множину всіх цілком неперервних операторів із $L(X,Y)$ будемо надалі позначати через $\sigma(X, Y)$.

Теорема 2. $\sigma(X, Y)$ є підпростором в $L(X,Y)$.

Теорема 3. Якщо X і Y скінченновимірні, то $\sigma(X, Y) = L(X,Y)$.

Наслідок 1. Всякий лінійний функціонал $f \in X^*$ цілком неперервний.

Наслідок 2. Якщо $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ (в матриці $L(X,Y)$), де A_n цілком неперервні або скінченномірні, то A цілком неперервний.

3. Властивості компактних операторів

Теорема 1. Якщо $\{A_n\}$ — послідовність компактних операторів у банаховому просторі E, яка збігається по нормі до деякого оператора A, то оператор A теж компактний.

Теорема 2. Якщо A — компактний оператор, а B — обмежений, то оператори AB і BA компактні.

Наслідок. У нескінченновимірному просторі E компактний оператор не може мати обмеженого оберненого.

Теорема 3. Оператор, спряжений до компактного, компактний.

4. Теорема Шаудера

Нехай $A \in L(X,Y)$, де Y — повний. Оператор A цілком неперервний тоді і тільки тоді, коли A^* цілком неперервний.

5. Приклади компактних операторів

1. Розглянемо в l^2 оператор $A\{\xi_k\} = \{\eta_k\}$, де $\eta_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\xi_l$, $k = 1, 2, \ldots$, а $\|a_{kl}\|$ – матриця, в якій $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|^2 < \infty$. Оператор A такого типу називається матричним оператором Гільберта-Шмідта. Лінійність очевидна. Доведемо обмеженість A.

Нехай $y = \{\eta_k\}$. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\xi_l\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|^2\sum_{s=1}^{\infty}|\xi_s|^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|^2\|x\|^2.$$

Це означає, що $\|Ax\| \le c\|x\|$, де $c = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|^2\right)^{1/2}$. Тому, $\|A\| \le c$. Отже, A обмежений, тобто $A \in L(l^2)$.

Доведемо тепер, що A цілком неперервний. Позначимо через A_n оператор, що переводить всякий вектор $\{\xi_k\}$ на вектор $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, 0, 0, \ldots)$. Область значень кожного з операторів A_n скінченновимірна. Тому оператори A_n цілком неперервні. Оскільки

$$\|A_n - A\|^2 \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

(як залишок збіжного ряду), то оператор A цілком неперервний.

2. Нехай $X = Y = C[a, b]$. Розглянемо лінійний інтегральний оператор $y = Kx$, що ставить у відповідність функції x функцію y за наступною формулою:

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

Припустимо, що функція $K(t,s)$ (ядро інтегрального оператора K) неперервна, як функція двох змінних в квадраті $Q = [a,b]\times[a,b]$. Нехай $M = \max_Q|K(t,s)|$. Візьмемо в $C[a,b]$ одиничну сферу

$$S = \{x \in C[a,b] : \|x\| \le 1\}.$$

Тоді

$$\|Kx\| = \max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right| \le \max_{t\in[a,b]}\int_a^b|K(t,s)||x(s)|ds \le (b-a)M\max_{t\in[a,b]}|x(t)| =$$
$$= (b-a)M\|x\| \le (b-a)M.$$

Таким чином, функції множини KS рівномірно обмежені.

Доведемо тепер рівно степеневу неперервність функцій з KS, тоді згідно з теоремою Арцела множина KS буде компактною і цим буде доведена повна неперервність оператора K. Для будь-якої функції $y(t) \in KS$ маємо

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left|\int_a^b K(t_1,s)x(s)ds - \int_a^b K(t_2,s)x(s)ds -\right| \le \int_a^b|K(t_1,s) -$$
$$- K(t_2,s)||x(s)|ds.$$

Але тоді за нерівністю Коші-Буняковського отримуємо:

$$|y(t_1) - y(t_2)|^2 \le \int_a^b|K(t_1,s) - K(t_2,s)|^2 ds\int_a^b|x(t)|^2 ds \le (b-a)\int_a^b |K(t_1,s) -$$
$$- K(t_2,s)|^2 ds.$$

Внаслідок рівномірної неперервності функції $K(t,s)$ на Q для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що для будь-яких $t_1, t_2 \in [a,b]$ і будь-якого $s \in [a,b]$, як тільки $|t_1 - t_2| < \delta$, відразу ж $|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \varepsilon$. Але тоді при $|t_1 - t_2| < \delta$ маємо $|y(t_1) - y(t_2)|^2 < (b-a)^2\varepsilon^2$, звідки отримуємо рівностепеневу неперервність множини KS.

Лема. Нехай x_1, x_2,... лінійно незалежні вектори в нормованому просторі E і нехай E_n — підпростір, породжений векторами x_1, x_2,..., x_n. Тоді існує послідовність векторів y_1, y_2,..., яка задовольняє наступним умовам: 1) $\|y_n\| = 1$; 2) $y_n \in E_n$; 3) $\rho(y_n, E_{n-1}) > 1/2$,

де $\rho(y_n, E_{n-1})$ — відстань вектора y_n від E_{n-1}, тобто

$$\inf_{x\in E_{n-1}}\|y_n - x\|.$$

1) Нехай A — неперервний лінійний оператор, що переводить банаховий простір E в деякий його скінченновимірний підпростір. Такий оператор компактний, оскільки він переводить всяку обмежену підмножину $M \subset E$ в обмежену підмножину скінченновимірного простору, тобто в передкомпактну множину.

Зокрема, в гільбертовому просторі оператор ортогонального проектування на підпростір компактний в тому і лише в тому випадку, якщо цей підпростір має скінченну розмірність.

2) У просторі неперервних функцій $C[a, b]$ важливий клас компактних операторів утворюють оператори, які представляються у вигляді:

$$Ax = y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt. \qquad (5.1)$$

Справедливе наступне твердження.

Якщо функція $K(s, t)$ обмежена на квадраті $a \le s \le b, a \le t \le b$ і всі її точки розриву лежать на скінченному числі кривих

$$t = \varphi_k(s), \quad k = 1, 2, ..., n,$$

де φ_k — неперервні функції, то формула (5.1) визначає у просторі $C[a, b]$ компактний оператор.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968.
2. *Люстерник Л. А., Соболев В. І.* Короткий курс функціонального аналізу. — К.: Вища шк., 1982.
3. *Соболев В. І.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. — М.: Наука, 1968.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *Т. К. Валицька*
Комп’ютерне верстання *А. П. Нечипорук*

Зам. № ВКЦ-4475

Папір офсетний. Друк ротаційний трафаретний.
Ум. друк. арк. 2,27. Обл.-вид. арк. 1,37. Наклад 30 пр.
Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП
ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008