МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

“ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ”

(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2011

Підготовлено професором кафедри прикладної математики та програмування доктором фізико-математичних наук *Р. М. Чернігою* і доцентом кафедри прикладної математики та програмування, кандидатом технічних наук *В. А. Дуткою*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 2 від 30.10.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Черніга Р. М., Дутка В. А. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни "Теорія функції комплексної змінної" (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2011. — 23 с.

Методичні матеріали містять пояснювальну записку, тематичний план, теми для самостійного вивчення, питання для самоконтролю, задачі і приклади для самоконтролю, зразки відповідей на запитання, а також список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

"Теорія функції комплексної змінної" — це математична дисципліна, яка вивчає основи аналізу комплексних чисел і комплексних функцій, методи диференціального та інтегрального числення для комплексних функцій, властивості аналітичних функцій, основи теорії конформних відображень, особливі точки та ряди Лорана, теорію лишків та застосування для розв'язання деяких задач математичної фізики. Мета дисципліни — опанування студентами знаннями, уміннями та навичками розв'язування задач з теорії функції комплексної змінної.

Для вивчення дисципліни необхідні знання з математичного аналізу, лінійної алгебри та звичайних диференціальних рівнянь.

У процесі навчання студенти здобувають знання і формують навички розв'язання основних задач теорії функції комплексної змінної, які потрібні у подальшому вивченні математичних дисциплін за програмою підготовки бакалавра за спеціальністю "Прикладна математика", зокрема, у вивченні:

- рівнянь математичної фізики;
- чисельних методів рівнянь математичної фізики;
- диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- методів математичного моделювання;
- варіаційного числення.

Для підсумкової перевірки засвоєних знань студенти складають іспит.

Самостійне вивчення окремих розділів тем з навчально-тематичного плану дисципліни "Теорія функції комплексної змінної" є важливою передумовою успішного засвоєння цієї фундаментальної математичної дисципліни. Загальновідомо, що лише постійне самостійне опрацювання матеріалу дає можливість краще оволодіти знаннями, умінням і навичками, що дасть змогу заявити про себе як про професіонала в майбутньому. Студент, який хоче якомога краще оволодіти професією, має добре розуміти: на занятті викладач подає основи знань, виділяє ті наріжні камені дисципліни, які повинні пробуджувати потяг до їх поглиблення й удосконалення. Збагачення загальною сумою знань, накопичених людством, розширення загального світогляду, усвідомлення наявної перспективи щодо реалізації певних знань є основним мотивом до сумлінного відношення до навчання. Самостійне опрацювання матеріалу студентом буде лише тоді результативним, коли воно ґрунтуватиметься на внутрішній потребі та усвідомленні того, що на ринку праці ціниться професіоналізм і здатність до самонавчання.

Згідно з державними стандартами навчальний матеріал дисципліни "Теорія функції комплексної змінної", передбачений робочою навчальною програмою для засвоєння студентом в процесі самостійної роботи, виноситься на підсумковий контроль поряд з навчальним матеріалом, який опрацьовувався при проведенні лекцій та практичних занять. Самостійна робота студента над засвоєнням навчального матеріалу з конкретної дисципліни може виконуватися у бібліотеці вищого навчального закладу чи іншій бібліотеці науково-технічного спрямування, навчальних кабінетах, комп'ютерних класах (лабораторіях) та домашніх умовах. Самостійна робота студента повинна бути спланована, організаційно і методично спрямована як особиста творча праця без прямої взаємодії з викладачем. Навчальний час, відведений для самостійної роботи, регламентується робочою навчальною програмою і повинен становити значну частку від загального обсягу навчального часу студента, відведеного для вивчення дисципліни "Теорія функції комплексної змінної". За необхідністю ця робота проводиться відповідно до заздалегідь складеного графіка, що гарантує можливість індивідуального доступу студента для консультації з викладачем чи використання персонального комп'ютера та доступу до відповідних баз даних. Необхідно наголосити, що уміння знаходити потрібний матеріал для самостійного вивчення окремих розділів тем цієї дисципліни в епоху тотальної інформатизації суспільства набуває важливого значення. Мова іде перш за все про вміння студента користуватися пошуковими базами даних в Інтернеті, роботу з якими студент спеціальності "прикладна математика" засвоює під час вивчення відповідних дисциплін комп'ютерного спрямування.

Вивчення студентом матеріалу з дисципліни "Теорія функції комплексної змінної", винесеного на самостійне опрацювання, повинне здійснюватись шляхом:

- опрацювання конспектів лекцій та аналізу задач і прикладів, розв'язаних на практичних заняттях;
- опрацювання основної та додаткової літератури;
- опрацювання окремих частин матеріалу за науковою і спеціальною літературою з використанням сучасних спеціалізованих пошукових систем в Інтернеті (наприклад, scholar.google.com, www.sciencedirect.com);
- розв'язання задач та прикладів, запропонованих як домашні завдання на практичних заняттях і сформульованих нижче як зразки;
- самотестування з використанням питань для самоконтролю та сформульованих відповідей як зразків.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
дисципліни
"ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ"

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
	Змістовий модуль I. Основи аналізу функції комплексної змінної
1	Комплексні числа
2	Функції комплексної змінної
3	Похідна функції комплексної змінної
4	Означення та властивості аналітичних функцій
5	Інтегрування аналітичних функцій
6	Ряди Лорана та класифікація особливих точок
	Змістовий модуль II. Застосування функцій комплексної змінної
7	Конформні відображення
8	Основи теорії та її застосування
9	Гармонічні функції та їх застосування
Разом годин: 108	

ТЕМИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ

Самостійне вивчення окремих частин тем з тематичного плану дисципліни "Теорія функції комплексної змінної" є необхідною умовою успішного засвоєння основного матеріалу цієї дисципліни.

Лекційний матеріал призначається для опанування студентами найбільш важливих понять, означень, теорем та їх застосування з курсу дисципліни "Теорія функції комплексної змінної". У ньому акцентується увага на найбільш складних, вузлових питаннях цієї дисципліни.

Перелік матеріалу з теоретичного курсу дисципліни "Теорія функції комплексної змінної", який може бути запропонованим для самостійного вивчення, подано відповідно до тем тематичного плану.

Змістовий модуль I. Основи аналізу функції комплексної змінної

Тема 1. Комплексні числа

Комплексні числа. Означення, модуль та аргумент комплексного числа. Зображення комплексних чисел. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Основні операції над комплексними числами та поле комплексних чисел. Алгебраїчна замкненість поля комплексних чисел. Невпорядкованість комплексних чисел. Послідовності комплексних чисел. Граничні точки. Нескінченно віддалена точка та компактифікація поля комплексних чисел. Стереографічна проекція.

Зразки розв'язання задач

Приклад 1. Записати дійсну та уявну частини суми, різниці, добутку та відношення двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$.

Розв'язання. Виконаємо дії з комплексними числами z_1 і z_2:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)\,;\ z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)\,;$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)\,;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Піднесення до натурального степеня комплексного числа z (формула Муавра)

$$z^n = \left(|z|(\cos\phi + i\sin\phi)\right)^n = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi),\ n \in N\,.$$

Приклад 2. Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа $z = \dfrac{(1+4i)^4}{(2-3i)^3}$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку вирази чисельника і знаменника:

$$(1+4i)^4 = \left((1+4i)^2\right)^2 = (1+8i-16)^2 = (8i-15)^2 = -64 - 240i + 225 = 161 - 240i,$$

$$(2-3i)^3 = 8 + 27i - 18i(2-3i) = 8 + 27i - 36i - 54 = -46 - 9i\,.$$

Тоді

$$z = \frac{(1+4i)^4}{(2-3i)^3} = \frac{161-240i}{-46-9i} = \frac{(161-240i)(-46+9i)}{(-46-9i)(-46+9i)} =$$

$$= \frac{-7406 + 2160 + i(11040 + 1449)}{2116 + 81} =$$

$$= \frac{-5246 + 12489i}{2197} = -2\frac{852}{2197} + 5\frac{1504}{2197}i.$$

Відповідь: $-2\dfrac{852}{2197} + 5\dfrac{1504}{2197}i.$

Тема 2. Функції комплексної змінної

Функція комплексної змінної. Неперервні функції. Однозначні та багатозначні функції. Приклади елементарних однозначних та багатозначних функцій — лінійна, степенева, корінь *n*-го степеня. Збіжність функціональних та степеневих рядів з комплексними членами. Теорема Коші-Адамара. Показникова функція та тригонометричні і гіперболічні функції комплексної змінної. Логарифмічна функція. Інтеграл від функції комплексної змінної вздовж спрямленої (кусково-гладкої) кривої та його властивості. Формула зведення обчислення від інтеграла від функції комплексної змінної до інтеграла Рімана.

Зразки розв'язання задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^n}{n\cdot 5^n}$.

Розв'язання. Використаємо теорему Коші-Адамара: радіус R збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ обчислюється за однією із формул: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ або $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. Тоді для всіх z таких, що $|z| < R$, ряд збігається абсолютно, а при $|z| = R$ збіжність ряду потрібно досліджувати окремо. Отже, знаходимо радіус збіжності ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{n\cdot 5^n}\right|}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot 5^n} = 5\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 5.$$

Для всіх z таких, що $|z-2i| < 5$, ряд збігається абсолютно, а при $z - 2i = -5$ ряд збігається як знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$.

Відповідь: при $|z-2i| < 5$ ряд збігається абсолютно, крім того, при $z - 2i = -5$ ряд збігається умовно.

Приклад 2. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної $\int\limits_L (z - 2\bar{z})dz$ по дузі L параболи $y = x^2$ від точки $z_1 = 1 + i$ до точки $z_2 = 0$.

Розв'язання. $\displaystyle\int\limits_L (z-2\bar{z})dz = \left|\begin{array}{c} z = x + iy = x + ix^2,\ \bar{z} = x - ix^2,\ y = x^2, dy = 2xdx \\ dz = dx + idy = dx + i2xdx,\quad x_1 = 1, x_2 = 0 \\ z - 2\bar{z} = x + ix^2 - 2(x - ix^2) = -x + i3x^2 \end{array}\right| =$

$$= \int_1^0 (-x+i3x^2)(dx+i2xdx) = \int_1^0 (-xdx+i3x^2dx-i2x^2dx-6x^3dx) =$$

$$= \int_1^0 (-xdx-6x^3dx+ix^2dx) = -\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{6x^4}{4}+i-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{6}{4}-i\frac{1}{3} = 2-\frac{i}{3}.$$

Відповідь: $2-\dfrac{i}{3}$.

Тема 3. Похідна функції комплексної змінної

Похідна функції комплексної змінної: означення та приклади. Формальні правила обчислення похідних. Теорема про диференційованість функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана в декартових та полярних координатах. Приклади застосування умов Коші-Рімана для встановлення диференційованості елементарних функцій. Формула обчислення уявної частини диференційованої функції комплексної змінної через відому дійсну частину.

Зразки розв'язання задач

Приклад 1. Перевірити, що функція $f(z)=\dfrac{1}{z}$ задовольняє умови Коші-Рімана, і знайти її похідну.

Розв'язання. $z=x+iy$; $f(z)=u+iv$;

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2};$$

$$u=\frac{x}{x^2+y^2};\quad v=\frac{-y}{x^2+y^2};$$

$$u_x=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};\quad v_x=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};\quad u_x=v_y,\quad u_y=-v_x.$$

Знаходимо похідну: $f'(z)=u_x+iv_x=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+i\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$

$$=\left|x=\frac{z+\overline{z}}{2};\ y=\frac{z-\overline{z}}{2i};\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+i\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-\overline{z}^2}{\left(z\overline{z}\right)^2}\right|=-\frac{1}{z^2}.$$

Приклад 2. Записати формулу для обчислення похідної функції комплексної змінної $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в декартових координатах.

Розв'язання. Якщо функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ має похідну в точці $z=x+iy$, то з урахуванням умов Коші-Рімана вираз для похідної $f'(z)$ функції має вигляд

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y=u_y+iv_y=-v_x+iu_x.$$

Тема 4. Означення та властивості аналітичних функцій

Поняття аналітичної функції. Означення та основні властивості аналітичних функцій. Два різні способи означення аналітичної функції — через диференційованість та через суму збіжного степеневого ряду. Геометрична інтерпретація аналітичної функції. Означення однолисткової функції. Приклади однолисткових функцій та їх геометрична інтерпретація. Поняття конформного відображення.

Зразки розв'язання задач

Приклад 1. Задано дійсну частину $u=xy-x^2+y^2$ аналітичної функції $f(z)=u+iv$. Знайти цю функцію, використавши при цьому задане її значення $f(1-i)=-1+5i$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції u:

$$u_x=y-2x,\quad u_y=x+2y.$$

Якщо функція $f(z)$ є аналітичною, то її дійсна та уявна частини задовольняють умови Коші-Рімана: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$. Отже, має виконуватись рівність $v_y=y-2x$. Звідси знаходимо вигляд для v:

$$v=\int v_y dy=\int(y-2x)dy=\frac{y^2}{2}-2xy+\phi(x).$$

Для того, щоб знайти вигляд функції $\phi(x)$, використовуємо другу умову Коші-Рімана $v_x=-u_y$: $v_x=-2y+\phi'(x)=-(x+2y)$. Звідси дістанемо $\phi'(x)=-x$, а далі і вигляд функції $\phi(x)$ і $v(x,y)$:

$$\phi(x)=\int\phi'(x)dx=-\int xdx=-\frac{x^2}{2}+C,\quad v=\frac{y^2-x^2}{2}-2xy+C.$$

Отже, $f(z)=xy-x^2+y^2+i\left(\dfrac{y^2-x^2}{2}-2xy+C\right)$. Постійну C знаходимо, використавши значення функції $f(z)$ в заданій точці:

$$f(1-i)=-1-1+1+i\left(\frac{1-1}{2}+2+C\right)=-1+5i.$$

Зсідси отримуємо: $-1+2i+Ci=-1+5i,\quad C=3.$

Таким чином, $f(z)=xy-x^2+y^2+i\left(\dfrac{y^2-x^2}{2}-2xy+3\right)=$

$$= xy - x^2 + y^2 + i\left(\frac{y^2 - x^2}{2} - 2xy + 3\right) = -z^2\left(1 + \frac{i}{2}\right) + 3i.$$

Відповідь: $f(z) = -z^2\left(1+\frac{i}{2}\right) + 3i.$

Тема 5. Інтегрування аналітичних функцій

Інтеграл вздовж замкненого контура від аналітичної функції в однозв'язній та багатозв'язній області. Інтегральна формула Коші. Теорема про середнє значення. Теорема про максимум модуля. Формула Коші для похідної аналітичної функції. Оцінки модуля похідної аналітичної функції. Нескінченна диференційованість аналітичної функції. Теорема Ліувіля.

Зразки розв'язання задач

1. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=6} \frac{dz}{(z+i)^2+36}$.

Розв'язання. Перепишемо інтеграл у вигляді

$$\oint\limits_{|z|=6} \frac{dz}{(z+i)^2+36} = \oint\limits_{|z|=6} \frac{dz}{(z+i)^2-(6i)^2} = \oint\limits_{|z|=6} \frac{dz}{(z+7i)(z-5i)}$$

і використаємо інтегральну формулу Коші

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz,$$

де точка z_0 лежить всередині області, обмеженої контуром *L*. У даному випадку точка $z=-7i$ лежить за кругом $|z|=6$, а точка $z=5i$ знаходиться всередині цього круга. Тому у формулі Коші функція *f*(*z*) матиме вигляд

$f(z) = \frac{1}{z+7i}$, точка $z_0 = 5i$, а значення інтегралу буде таким:

$$\oint\limits_{|z|=6} \frac{dz}{(z+7i)(z-5i)} = \oint\limits_{|z|=6} \frac{f(z)dz}{(z-5i)} = 2\pi i\, f(5i) = 2\pi i \frac{1}{5i+7i} = \frac{2\pi i}{12i} = \frac{\pi}{6}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

2. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z(z-1)}$.

Розв'язання. Використаємо інтегральну формулу Коші. Для цього перепишемо даний інтеграл у вигляді

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z(z-1)} = \oint\limits_{|z|=2} e^z\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right)dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z-1} - \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z}.$$

Точки $z_{01}=1$ і $z_{02}=0$ знаходяться всередині круга радіусом 2, тому значення інтегралу буде таким:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z-1} - \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z} = 2\pi i(e^1 - e^0) = 2\pi i(e-1).$$

Відповідь: $2\pi i(e-1)$.

3. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z dz}{z^2-\pi^2}$.

Розв'язання. Використаємо інтегральну формулу Коші. Перепишемо даний інтеграл у вигляді

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z dz}{z^2-\pi^2} = \oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z dz}{(z-\pi)(z+\pi)}.$$

Точки $z_{01}=\pi$ і $z_{02}=-\pi$ знаходяться всередині круга радіусом 4.

Обчислюємо значення інтегралу:

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z dz}{(z-\pi)(z+\pi)} = 2\pi i(\cos\pi - \cos(-\pi)) = 0.$$

Відповідь: 0.

Тема 6. Ряди Лорана та класифікація особливих точок

Аналітичі функції та їх степеневі ряди. Нулі аналітичної функції. Єдиність завдання аналітичної функції. Аналітичне продовження. Представлення рядом Лорана однозначної функції. Класифікація особливих точок однозначних аналітичних функцій. Цілі функції. Мероморфні функціЇ. Поведінка однозначної аналітичної функції в околі полюса та суттєво особливої точки.

Зразки розв'язання задач

Приклад 1. Дати класифікацію *ізольованих особливих точок однозначної аналітичної функції f(z).*

Ізольована особлива точка z = a $\in$

(i) усувною точкою, якщо $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c$, $c \in C$,

(ii) полюсом, якщо $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$,

(iii) суттєво особливою точкою, якщо ця границя не існує.

Приклад 2. Знайти всі особливі точки функції $f(z)=\dfrac{e^{1/(z-i)}\sin z}{z(z-2)^2(z+3i)}$ та визначити їх характер.

Розв'язання. Знаходимо точки, в яких функція $f(z)$ не визначена: $z_1=0,\ z_2=2,\ z_3=-3i,\ z_4=\infty$. Дослідимо поведінку функції в кожній із цих точок.

1) $z_1=0$. $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{1/(z-i)}\sin z}{z(z-2)^2(z+3i)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}\times$

$\times\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{1/(z-i)}}{(z-2)^2(z+3i)}=1\cdot\dfrac{e^{-1/i}}{4\cdot 3i}=\dfrac{e^{i}}{12i}$.

Границя функції в точці z_1 є точкою комплексної площини, отже, точка $z_1=0$ є усувною особливою точкою.

2) $z_2=2$. $\lim\limits_{z\to 2} f(z)=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{e^{1/(z-i)}\sin z}{z(z-2)^2(z+3i)}=\infty$.

$\lim\limits_{z\to 2} f(z)(z-2)^2=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{e^{1/(z-i)}\sin z}{z(z+3i)}=\dfrac{e^{1/(2-i)}\sin 2}{2(2+3i)}$. Отже, точка $z_2=2$ — полюс другог порядку.

3) $z_3=-3i$. $\lim\limits_{z\to -3i} f(z)=\lim\limits_{z\to -3i}\dfrac{e^{1/(z-i)}\sin z}{z(z-2)^2(z+3i)}=\infty$.

$\lim\limits_{z\to -3i} f(z)(z+3i)=\lim\limits_{z\to -3i}\dfrac{e^{1/(z-i)}\sin z}{z(z-2)^2}=\dfrac{e^{1/(-3i-i)}\sin(-3i)}{-3i(3i+2)^2}$. Отже, точка $z_3=$ $=-3i$ є простим полюсом.

4) $z_4=\infty$. $\lim\limits_{z\to \infty} f(z)=\lim\limits_{z\to \infty}\dfrac{e^{1/(z-i)}\sin z}{z(z-2)^2(z+3i)}$ – не існує, оскільки не існує границя $\lim\limits_{z\to\infty}\sin z$. Отже, точка $z_4=\infty$ — суттєво особлива точка.

Змістовий модуль ІІ. Застосування функцій комплексної змінної

Тема 7. Конформні відображення

Означення та властивості конформних відображень. Основна задача теорії конформних відображень. Теорема Рімана. Дробово-лінійні конформні відображення та їх властивості. Формула знаходження дробово-лінійнийного відображення за трьома точками. Конформне відображення комплексної півплощини та круга в півплощину або в круг. Відображення багатокутників. Інтеграл Крістофеля-Шварца.

Зразки розв'язання задач

Приклад 1. Визначити, яка частина комплексної z-площини стискається, і яка розтягується при відображенні $w=f(z)=z^2-2z$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $f(z)$:

$f'(z)=2z-2=2(x+iy)-2=2(x-1)+2yi$. Обчислимо модуль похідної: $|f'(z)|=\sqrt{4(x-1)^2+4y^2}$. Оскільки коефіцієнт лінійного розтягу дорівнює модулю похідної, то область z-площини, де $|f'(z)|<1$, стискається при відображенні $w=f(z)$, а область z-площини, в якій $|f'(z)|>1$, розтягується.

Знайдемо межову лінію, де $|f'(z)|=1$:

$$|f'(z)|=1;\ \sqrt{4(x-1)^2+4y^2}=1;\ (x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

Отже, межею є коло з центром в точці $z_0=1$ і радіусом $r=1/2$. Внутрішня частина круга стискається, а зовнішня розтягується.

Тема 8. Основи теорії лишків та її застосування

Означення лишка. Методи обрахунку лишка однозначної аналітичної функції. Обчислення лишка в полюсі. Лишок в нескінченно віддаленій точці. Основна теорема теорії лишків. Обчислення контурних інтегралів. Обчислення невласних інтегралів дійсного аналізу за допомогою теорії лишків. Логарифмічний лишок.

Зразки розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити лишки функції $f(z)=\dfrac{tg\,z}{z(z+2)}$ в точках $z_1=0$ і $z_2=-2$.

Розв'язання. Визначаємо характер кожної з цих точок і після того знаходимо лишок у відповідній точці.

Для точки $z_1=0$:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{tg\,z}{z(z+2)}=\lim_{z\to 0}\frac{tg\,z}{z}\times\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+2)}=\frac{1}{2}.$$

Точка $z_1=0$ — усувна особлива точка. Тому $\underset{z=0}{res}\, f(z)=\underset{z=0}{res}\dfrac{tg\,z}{z(z+2)}=0.$

Для точки $z_2=-2$:

$$\lim_{z\to -2} f(z)=\lim_{z\to -2}\frac{tg\,z}{z(z+2)}=\frac{tg\,2}{2}\lim_{z\to -2}\frac{1}{(z+2)}=\infty.$$

Точка $z_2=-2$ — простий полюс. Тому $\underset{z=-2}{res}\, f(z)=\lim\limits_{z=-2}\dfrac{(z+2)tg\,z}{z(z+2)}=\dfrac{tg2}{2}$.

Тема 9. Гармонічні функції та їх застосування

Гармонічні функції. Аналітичні та спряжені гармонічні функції. Побудова гармонічної функції за спряженою. Інваріантність оператора Лапласа відносно конформних відображень. Задача Діріхле. Розв'язання задачі Діріхле за допомогою функції Гріна. Функція Гріна задачі Діріхле. Означення, фізичний зміст. Формула Гріна. Побудова функції Гріна для півплощини та круга. Розв'язання задачі Діріхле для круга. Формула Пуассона. Розв'язання задачі Діріхле для півплощини. Формула Шварца.

Зразки розв'язання задач

Приклад 1. Знайти аналітичну функцію $f(z)=u+iv$ за відомою уявною $v=v(x,y)$ частиною і значенням $f(z_0)$ після попередньої перевірки заданої функції на гармонічність: $v(x,y)=x^2-y^2-3x$, $f(-i)=1-i$.

Розв'язання. Перевіримо, чи задвольняє задана функція $v(x,y)=$ $=x^2-y^2-3x$ рівняння Лапласа:

$v_x=2x-3$, $v_y=-2y$, $v_{xx}=2$, $v_{yy}=-2$, $v_{xx}+v_{yy}=2-2=0$.

Функція $v=v(x,y)$ задвольняє рівняння Лапласа, отже, вона є гармонічною. Знайдемо дійсну частину $u=u(x,y)$ функції $f(z)$. Для цього використаємо умови Коші-Рімана: $u_x=v_y=-2y$, $u_y=-v_x=-2x+3$ і співвідношення

$$u=\int_{z_0}^{z}u_xdx+u_ydy=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(-2y)dx+(-2x+3)dy=$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(-2y)dx+(-2x+3)dy+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(-2y)dx+(-2x+3)dy=$$

$$=\int_{0}^{y}(-2x+3)dy=-2xy+3y+C,\ C\in R.$$

Записуємо вигляд функції $f(z)$: $f(z)=-2xy+3y+C+i(x^2-y^2-3x)$.

Щоб визначити сталу C, потрібно використати задане значення $f(-i)=1-i$:

$$f(-i)=-3+C+i(-1)=1-i\ .$$

Звідси дістанемо: $C=4$.

Відповідь: $f(z)=-2xy+3y+4+i(x^2-y^2-3x)$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Записати формули для визначення модуля і аргументу комплексного числа.
2. Яка тригонометрична форма комплексного числа?
3. Яка показникова форма комплексного числа?
4. Як виконуються арифметичні дії над комплексними числами?
5. Записати формулу Муавра.
6. Записати формулу для знаходження *n* коренів з комплексного числа.
7. Дати означення границі послідовності комплексних чисел.
8. Що таке нескінченно віддалена точка комплексної площини?
9. Дати означення функції комплексної змінної.
10. Як вводиться поняття неперервності функції комплексної змінної?
11. Дати приклад одно- та багатозначної функції комплексної змінної.
12. Дати означення поточкової збіжності функціонального ряду з комплексними членами.
13. Дати означення рівномірної збіжності функціонального ряду з комплексними членами.
14. Який загальний запис степеневого ряду з комплексними членами?
15. Сформулювати теорему Коші-Адамара для степеневих рядів.
16. Дати поняття множини та навести означення дій над множинами.
17. Як виражаються тригонометричні функції комплексного аргументу через показникову функцію?
18. Як виражаються гіперболічні функції комплексного аргументу через показникову функцію?
19. Який зв'язок між гіперболічним синусом та звичайним синусом у випадку комплексної змінної?
20. Який зв'язок між гіперболічним косинусом та звичайним косинусом у випадку комплексної змінної?
21. Дати означення області на комплексній площині.
22. Дати означення однозв'язної області.
23. Дати означення інтеграла від функції комплексної змінної вздовж кривої.
24. Як зміниться значення інтеграла від функції комплексної змінної, якщо змінити орієнтацію кривої?
25. Записати формулу зведення обчислення інтеграла від функції комплексної змінної до інтеграла Рімана.
26. Дати означення диференційованості функції комплексної змінної в точці.
27. Записати умови Коші-Рімана.

28. Записати умови Коші-Рімана в полярній системі координат.
29. Сформулювати теорему про умови диференційованості функції комплексної змінної.
30. Записати формулу похідної для диференційованої функції.
31. Записати формулу похідної для диференційованої функції в полярній системі координат.
32. Довести, що для функції sh*(z)* виконуються умови Коші-Рімана.
33. Довести, що для функції cos*(z)* виконуються умови Коші-Рімана.
34. Чи гарантує диференційованість функції комплексної змінної диференційовність її дійсної та уявної частин?
35. Навести приклад функції комплексної змінної диференційованої лише в одній точці.
36. Чи є диференційованою функція, яка є добутком двох диференційованих функцій?
37. Дати означення аналітичної функції в точці.
38. Дати означення аналітичної функції в області.
39. Чи є сума, різниця та добуток двох аналітичних функцій також аналітичною функцією?
40. Сформулювати теорему про аналітичну функцію як суму збіжного степеневого ряду.
41. Розвинути експоненту від комплексної змінної z в степеневий ряд.
42. Дати означення однолисткової функції.
43. Навести геометричну інтерпретацію однолисткової аналітичної функції на прикладі лінійної функції.
44. Чи є похідна від аналітичної функції в деякій області знову аналітичною в тій самій області?
45. У що перетворює лінійна функція $w = az,\ a \in C$ промінь з початком в точці 0?
46. У що перетворює лінійна функція $w = az,\ a \in C$ коло з центром в точці 0?
47. Як перетворюється промінь з початком в точці 0 при дії функції $w = 1/z$?
48. Як перетворюється круг з центром в точці 0 при дії функції $w = 1/z$?
49. В яких областях показникова функція є однолистковою?
50. Дати означення конформного відображення.
51. Що таке коефіцієнт лінійного розтягу в заданій точці z при дії аналітичної функції $f(z)$?
52. На який кут повертаються всі криві, що проходять через задану точку z, при дії конформного відображення $f(z)$?
53. Записати формулу обчислення образу кривої при дії конформного відображення $f(z)$.

54. Записати формулу обчислення образу області при дії конформного відображення $f(z)$.
55. Як обчислити інтеграл вздовж замкненої кривої (контуру) від аналітичної функції в однозв'язній області?
56. Записати інтегральну формулу Коші.
57. Сформулювати теорему Ліувіля.
58. Що таке аналітичне продовження?
59. Що таке ряд Лорана?
60. Як класифікуються особливі точки аналітичних функцій?
61. Яка поведінка аналітичної функції в околі полюса?
62. Чи є суперпозиція конформних відображень конформним відображенням ?
63. Сформулювати теорему Рімана.
64. Записати загальну формулу для дробово-лінійного перетворення та обернене до нього.
65. У що відображає дробово-лінійне відображення коло?
66. У що відображає дробово-лінійне відображення пряму?
67. Записати формулу знаходження дробово-лінійного відображення за трьома різними точками та їх образами.
68. Записати дробово-лінійне відображення, яке відображає дві різні задані точки у точку нуль та нескінченно віддалену точку.
69. Записати будь-яке конформне відображенні, яке відображає комплексну півплощину в півплощину.
70. Дати означення ізольованої особливої точки, яка є полюсом.
71. Дати приклади функцій, що мають ізольовану особливу точку, яка відповідно є полюсом і суттєво особливою.
72. Дати означення ізольованої особливої точки, яка є суттєво особливою.
73. Привести приклад обчислення будь-якого інтеграла за допомогою лишків.
74. Дати означення лишка.
75. Як обчислити значення лишка в полюсі.
76. Який лишок в нескінченно віддаленій точці?
77. Сформулювати основну теорему теорії лишків.
78. Яка сума лишків функції, що є аналітичною скрізь, крім скінченної кількості ізольованих точок?
79. Навести приклад обчислення невласного інтегралу від дійсної функції за допомогою теорії лишків.
80. Навести приклад обчислення невласного інтегралу — інтегрального синуса — за допомогою теорії лишків.

81. Дати означення гармонічної функції.
82. Яка формула побудови гармонічної функції за спряженою?
83. Записати оператор Лапласа для двох незалежних функцій.
84. Що отримається в підсумку, якщо подіяти оператором Лапласа на дійсну частину аналітичної функції?
85. Що отримається в підсумку, якщо подіяти оператором Лапласа на уявну частину аналітичної функції?

ЗАДАЧІ І ПРИКЛАДИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тема 1. Комплексні числа

1. Зобразити на комплексній площині числа:

а) $z=2+\sqrt{3}i$; *б)* $z=-\sqrt{10}+\sqrt{10}i$; *в)* $z=7-14i$;
г) $z=-3-4i$; *д)* $z=(1-i)(2+3i)$; *е)* $z=(3-2i)^2$;
є) $z=1-i+2i^3$; *ж)* $z=\dfrac{1-i}{i^2+2i-1}$; *з)* $z=(2-3i)^{-2}$.

2. Знайти дійсну та уявну частини комплексних чисел:

а) $z=\dfrac{1+i}{2-3i}$; *б)* $z=\dfrac{(2+i)^2}{1-i}$; *в)* $z=\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$;
г) $z=(3-4i)(2+i)$; *д)* $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$; *е)* $z=(2+\sqrt{3}i)^5$.

3. Знайти модуль та аргумент комплексного числа:

а) $z=5i$; *б)* $z=2-3i$; *в)* $z=-1+2i$;
г) $z=2$; *д)* $z=125$; *е)* $z=-\sqrt{3}+i$;
є) $z=1+\sqrt{3}i$; *ж)* $z=\dfrac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{5})^5}$; з) $z=(-\sqrt{3}+i)^{-1}$.

Тема 2. Функції комплексної змінної

1. Розв'язати рівняння:

а) $2z^2-5z+3=0$; *б)* $3z^2+2z+4=0$;
в) $6z^3+7z-1=0$; *г)* $z^4-3z^2-4=0$;
д) $z^2+|z|=0$; *е)* $z^2+|z|^2=0$;
є) $(z^2+z+1)(z^2+z+2)=0$; *ж)* $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

2. Довести, що якщо значення многочлена $P(z_0)=0$, то $P(\bar{z}_0)=0$.
3. Який вигляд має комплексне число z, якщо $z=\bar{z}$?
4. Знайти всі значення кореня:

а) $\sqrt{-9i}$; *б)* $\sqrt[3]{1-i}$; *в)* $\sqrt[4]{1}$;
г) $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$; *д)* $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{1-i}}$; *е)* $\sqrt[6]{2-\sqrt{3}i}$.

Тема 3. Похідна функції комплексної змінної

1. Чи має похідну функція:

а) $f(z)=z+|z|$; *б)* $f(z)=xy+iy$; *в)* $f(z)=y-ix$; *г)* $f(z)=\dfrac{1}{x-iy}$;
д) $f(z)=z|z|$; *е)* $f(z)=z-\bar{z}$?

Тема 4. Означення та властивості аналітичних функцій

1. Задана дійсна u або уявна v частина аналітичної функції $f(z)$. Знайти цю функцію:

а) $u(x,y)=x^2-y^2-x$; *б)* $v(x,y)=x+y$;
в) $v(x,y)=2^x\cos(y\ln 5)$; *г)* $u(x,y)=\sin x\ chy$;
д) $u(x,y)=3xy-x^2-y^2$; *е)* $v(x,y)=xy-x-y$.

2. Знайти аналітичну функцію за відомою дійсною u чи уявною v її частиною та значенням функції у вказаній точці:

а) $u(x,y)=xy-x^2+y^2,\quad f(i\sqrt{2})=2$;
б) $v(x,y)=2xy-y,\quad f(1+i)=-1+i$;
в) $u(x,y)=x^2-y^2-2y,\quad f(2i)=3-2i$;
г) $v(x,y)=x^2-y^2+2x,\quad f(1-i)=-4$;
д) $u(x,y)=y^3-3x^2y-y,\quad f(1+i)=-4i$.

Тема 5. Інтегрування аналітичних функцій

1. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної вздовж заданої лінії L:

а) $\int\limits_{L_{AB}}(z^2+1)dz,\qquad L_{AB}:\ \operatorname{Im} z=(\operatorname{Re} z)^2,\ z_A=0,\ z_B=1+i$;

б) $\int\limits_{L_{AB}} ze^{-z}dz,\qquad L_{AB}:\ \operatorname{Im} z=2,\ \ z_A=2+2i,\ \ z_B=2i$;

в) $\int\limits_{L_{AB}}(z+2\bar{z})dz, L_{AB}:$ відрізок прямої від $m.z_A=1-3i$ 4> $m.z_B=-1+2i$;

г) $\int\limits_{L_{AB}}(\operatorname{Im} z+i\operatorname{Re} z)dz,\ L_{AB}:$ дуга парабули $y^2=2x$ *від* $m.z_A=1+i\sqrt{2}$;

д) $\int\limits_{L_{AB}}(z+|z|^2)dz,\ L_{AB}:$ відрізок прямої від $m.\ z_A=0$ 4> $m.\ z_B=2-i$.

Тема 6. Ряди Лорана та класифікація особливих точок

1. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)$ в околі точки z_0:

а) $f(z)=\dfrac{z^4}{(z-2)^2}$, $z_0=2$; *б)* $f(z)=\dfrac{1}{(2z-5)}$, $z_0=\infty$;

в) $f(z)=\dfrac{z+i}{z^2}$, $z_0=i$; *г)* $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-2i}$, $z_0=1$;

д) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z^2-9)}$, $z_0=1$; *е)* $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$, $z_0=0$.

Тема 7. Конформні відображення

1. За допомогою відображення $w=z^2$ відобразити на w-площину пряму $x+y=1$.

2. За допомогою відображення $w=-z^2$ відобразити на w-площину прямі $x=1$, $y=-2$.

3. За допомогою функції $w=2z+1$ відобразити на w-площину коло $x^2+y^2=1$.

4. За допомогою функції $w=z^2+1$ відобразити на w-площину квадрат з вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$.

5. Показати, що кут між прямими $y=1$ і $y=x-1$ не зміниться після відображення $w=(1+i)z+1-i$.

6. За допомогою функції $w=\dfrac{1}{z}$ відобразити на w-площину пряму $y=x+1$.

7. За допомогою функції $w=z^2$ відобразити на w-площину параболу $y=x^2$.

Тема 8. Основи теорії лишків та її застосування

1. Обчислити лишки функції $f(z)$:

а) $f(z)=\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)^2}$; *б)* $f(z)=\dfrac{z}{(z+5)(z-1)}$;

в) $f(z)=\dfrac{z+i}{(z-1)^2z}$; *г)* $f(z)=\dfrac{3z}{(z-i)(z+2i)}$;

д) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^3}$.

Тема 9. Гармонічні функції та їх застосування

1. Довести, що якщо функція $v(x,y)$ є гармонічною в однозв'язній області D, то спряжена до неї функція $u(x,y)$ може бути подана у вигляді

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y dx - v_x dy + \text{const}.$$

2. Перевірити умову гармонічності функції $v(x,y)$. Якщо $v(x,y)$ гармонічна, то вважати її уявною частиною аналітичної функції $f(z)$, знайти дійсну частину $u(x,y)$ функції $f(z)$ і саму функцію $f(z)$:

а) $v(x,y)=x^3-6x^2y-3xy^2-2y^3$;

б) $v(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$;

в) $v(x,y)=-3x^2y+y^3+x^2-y^2-4xy$;

г) $v(x,y)=x\sin x\, chy-y\cos x\, shy$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Гольдберг А. А., Шеремета М. М., Заболоцький М. В., Стаськів О. Б.* Комплексний аналіз. — Л.: Афіша, 2002. — 204 с.
2. *Мартиненко М. А., Юрик І. І.* Теорія функції комплексної змінної. — К.: Слово, 2008 — 296 с.
3. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — Ч. 1. — М.: Наука, 1985. — 336 с.
4. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
5. *Грищенко А. Е., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П.* Теория функций комплексной переменной. Решение задач. — К.: Вища шк., 1986. — 336 с.
6. *Білоколос Є. Д., Шека Д. Д.* Збірник задач з комплексного аналізу. — К.: Київ. ун-т, 2004. — 57 с.

Додаткова

7. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979. — 392 с.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
9. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
10. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 296 с.
11. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. — М.: Наука, 1968. — 472 с.

12. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984. — 432 с.
13. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1976.
14. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. — 436 с.
15. *Godement R.* Analyse methematique. III. — Springer-Verlag, Berlin, 2002. — 490 p.
16. *Godement R.* Analyse methematique. IY. — Springer-Verlag, Berlin, 2003. — 599 p.
17. *Kaczor W. J. and Nowak M. T.* Problems in mathematical analysis. II.— AMS, Providence, 2001. — 398 p.
18. *Kaczor W. J. and Nowak M. T.* Problems in mathematical analysis. III.— AMS, Providence, 2003. — 356 p.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *Т. К. Валицька*
Комп’ютерне верстання *А. П. Нечипорук*

Зам. № ВКЦ-4473

Формат 60×84/$_{16}$. Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний.
Ум. друк. арк. 1,33. Обл.-вид. арк. 0,11. Наклад 30 пр.
Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008