МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”

(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2011

Підготовлено професором кафедри прикладної математики та програмування *В. І. Панчуком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 3 від 30.10.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Панчук В. І. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" (для бакалаврів). – К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2011. – 58 с.

Методична розробка містить пояснювальну записку, розгорнутий тематичний план дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика», приклади розв'язання типових задач, теми для самостійного вивчення, питання для самоконтролю, задачі для самостійного розв'язання, рекомендації щодо виконання завдань та список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Самостійна робота як складова навчального процесу є чинником, який формує вміння студентів навчатися та сприяє активізації засвоєння навчального матеріалу у позааудиторний час. Особливого значення та статусу самостійна робота набуває при введенні кредитно-модульної технології навчання, за якою скорочується обсяг аудиторної роботи.

Метою самостійної роботи студентів з теорії ймовірностей та математичної статистики є свідоме і глибоке засвоєння матеріалу навчальної програми в повному її обсязі, вироблення ймовірнісно-статистичного мислення та інтуїції, набуття навичок побудови ймовірнісних моделей дослідження та розв'язування відповідних задач, а також сприяння формуванню самостійності як особистісної риси та важливої професійної якості, сутність якої полягає в умінні систематизувати, планувати та контролювати власну діяльність.

Передбачається, що самостійна робота студентів має охоплювати всі важливі розділи курсу теорії ймовірностей та математичної статистики, розрахованого на підготовку фахівців вищої кваліфікації з напряму "Прикладна математика". Це стосується зокрема розділів: стохастичний експеримент, ймовірнісні події та величини, розподіли ймовірностей та числові характеристики випадкових величин, граничні теореми теорії ймовірностей, класичні задачі та методи теорії оцінювання статистичних параметрів і перевірки статистичних гіпотез, кореляційний та регресійний аналіз.

Працюючи над самостійними завданнями, студенти повинні виробити **уміння**:

- застосовувати методи обчислення ймовірностей простих та складених випадкових подій;
- використовувати математичний апарат для дослідження дискретних і неперервних випадкових величин;
- застосовувати методи аналізу статистичної інформації при розв'язуванні типових практичних задач з представленням результатів у необхідному вигляді (числа, формули, графіка тощо);
- встановлювати теоретико-ймовірнісні закономірності та використовувати отримані результати для обґрунтування прийнятих рішень;
- самостійно орієнтуватися в літературі з предмета тощо.

Самостійна робота студентів повинна не тільки сприяти глибокому засвоєнню основних понять та методів теорії ймовірностей, але покращити процес подальшого вивчення загальних і спеціальних дисциплін, стимулювати оволодіння теорією випадкових процесів, теорією керування для створення високонадійних систем, теорією масового обслуговування, теорією надійності та багатьма важливими напрямами сучасної науки й техніки.

Методичні рекомендації щодо виконання самостійної роботи містять загальні положення з предмета, а також переліки завдань для студентів.

При опрацюванні матеріалів навчальної програми з теорії ймовірностей та математичної статистики, які виносяться на самостійне вивчення, кожен студент повинен мати та уміти використовувати знання базових математичних дисциплін, зокрема таких: дискретна математика, основи комбінаторного аналізу, математичного аналізу, лінійної алгебри тощо.

Автор сподівається, що методичні рекомендації будуть корисними студентам та фахівцям не тільки математичних, але й інших спеціальностей, зокрема тих, де вивчаються та використовуються теорія ймовірностей та математична статистика.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
дисципліни
"ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА"

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
	Змістовий модуль І. Поняття ймовірності та основні правила її обчислення
1	Вступ до теорії ймовірностей. Випадкові події та ймовірності
2	Важливі теореми теорії ймовірностей
3	Послідовність незалежних випробовувань за схемою Бернуллі
	Змістовий модуль ІІ. Випадкові величини та процеси
4	Дискретні випадкові величини, їхні закони розподілів та основні числові характеристики
5	Неперервні випадкові величини, їхні функції розподілів та основні числові характеристики
6	Системи випадкових величин (випадкові вектори)
7	Важливі розподіли випадкових величин
8	Функції випадкових аргументів
9	Закон великих чисел. Граничні теореми теорії ймовірностей
10	Елементи теорії випадкових процесів
	Змістовий модуль ІІІ. Математична статистика
11	Описова математична статистика
12	Основи теорії оцінювання невідомих параметрів розподілів
13	Елементи теорії кореляції і регресії
14	Перевірка статистичних гіпотез

Змістовий модуль І. Поняття ймовірності та основні правила її обчислення

1.1. Питання для самостійного вивчення

- Випадкові події як підмножини в просторі елементарних подій.
- Про аксіоматичну побудову теорії ймовірностей та аксіоматичні властивості ймовірностей.
- Комбінаторний аналіз та його використання в теорії ймовірностей.
- Стохастична незалежність подій.
- Поняття розподілу ймовірностей у схемі Бернуллі. Ймовірність відхилення відносної частоти від заданої ймовірності.

Література: основна [1–5];
додаткова [11–18]

1.2. Короткий виклад теоретичного матеріалу та приклади розв'язування типових задач

Досить часто при вивченні реальних процесів, що відбуваються в природі та практичній діяльності людей, виникає необхідність знання особливої галузі математики – *теорії ймовірностей.* Теорія ймовірностей дає можливість будувати математичні моделі для опису масових однорідних випадкових явищ та встановлювати міру можливості їхньої появи. Оскільки багато реальних процесів піддаються випадковим впливам, то основи цієї теорії важливо знати фахівцям, діяльність яких пов'язана з природничими, технічними, економічними, соціальними та іншими сферами.

Події та ймовірності

Випадковим (стохастичним) дослідом називають процес реалізації комплексу певних умов з різними, заздалегідь не передбачуваними наслідками, який зазвичай може повторюватися скільки завгодно разів.

***Дослід* 1**. Найпростіший приклад, який завжди наводять у зв'язку з цим є проведення спостережень за результатами підкидання монети. Наперед невідомо, яким саме виявиться результат падіння монети – чи випаде герб, чи те число, що зображує її вартість. Якщо монета попередньо збалансована, то можливість появи герба або числа приблизно однакова, тобто становить 50 %.

Нехай випробування проводиться n разів і при цьому підраховується число k, скажімо, наслідків появи герба. Спостерігатимемо за значеннями ***відносної частоти*** $f = k/n$. Кожен може провести цей простий дослід і впевнитися, що зі збільшенням кількості підкидань n значенням f якомога менше відрізнятиметься від 1/2.

При великому числі дослідів відносна частота f досліджуваної події характеризує міру випадковості очікуваного результату або, як кажуть, її ***ймовірність*** p.

Усі можливі результати досліду зручно подати у вигляді таблиці, яку називають рядом розподілу ймовірностей:

Результат:	поява “герба”	поява “числа”
Імовірність р:	1/2	1/2

***Дослід* 2.** При проведенні випробувань число різних наслідків може бути різним. Так, наприклад, при підкиданні звичайного шестигранного грального кубика (рис. 1) існує шість різних *рівноможливих* наслідків появи очок на верхній грані з однаковою ймовірностю $p_i = 1/6$, ($i = 1,2,..., 6$).

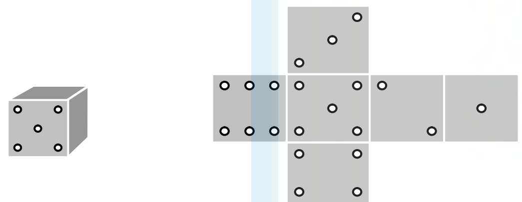


Рис. 1.

Розподіл ймовірностей у цьому випадку можна представити рядом:

Число очок:	1	2	3	...	6
Імовірність p_i:	1/6	1/6	1/6	...	1/6

***Дослід* 3.** Візьмемо кубик, одна з граней якого пофарбована у білий колір, а інші п’ять – у чорний. Тут результати досліду записються рядом:

Результат:	поява білої грані	поява чорної грані
Імовірність р:	1/6	5/6

У кожному з наведених прикладів множина різних наслідків є скінченною. Проте в багатьох дослідах множини наслідків є нескінченними.

Випадковою називається подія, яка при проведенні досліду може відбутися або ні, при цьому результат досліду непередбачуваний.

Подія, яка не допускає свого розкладу на простіші, називається *елементарною,* в протилєжному разі – *складеною.*

Наприклад, події A_i = {випало i очок} (i =1,6) є елементарними. Ними вичерпуються усі можливі прості результати експерименту.

Подія A = {випало парне число очок} є складеною, вона відбувається, коли має місце будь-яка з елементарних подій: або A_2 = {випало 2 очки}, або A_4 = або {випало 4 очки}, або A_6 = {випало 6 очок}.

Множину всіх можливих у досліді елементарних подій ω_i, i = 1, 2, називають *простором елементарних подій* $\Omega = \{\omega_1 ... \omega_i ...\}$. Зараз ми розглядатимемо тільки скінченні простори Ω.

У випадку підкидання грального кубика простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1 ..., \omega_6\}$. Подія A = { i – парне число} = { $\omega_2\, \omega_4\, \omega_6$} є підмножиною простору Ω.

Подія називається *неможливою,* якщо при повторенні досліду вона ніколи не відбувається. Їй відповідає порожня підмножина в Ω, яку позначають через $\varnothing$. Подія називається *достовірною,* якщо при повторенні досліду вона відбувається завжди. Очевидно їй відповідає будь-яка з подій простору Ω.

Алгебра подій

***Означення* 1.** *Сумою подій A* та *B* називається подія $C = A + B \equiv A \cup B$, яка полягає у тому, що в досліді відбудеться хоча б (принаймні щонайменше) одна із цих подій.

***Означення* 2.** *Добутком подій A* та *B* називається подія $D = AB \equiv A \cap B$, яка полягає в одночасній появі цих подій.

***Означення* 3.** *Різницею подій A* та *B* називається подія $R = A - B \equiv A \backslash B$, яка відбувається будь-який раз, коли відбувається подія A, а подія B – ні.

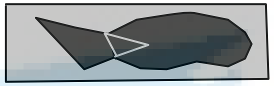
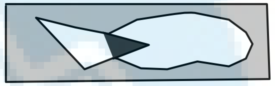
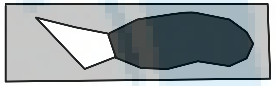
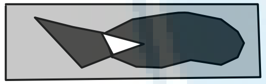
***Означення* 4.** Подія $\bar{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо її поява унеможливлює появу події A, тобто $\bar{A} = \Omega \backslash A$.

***Означення* 5.** *Симетричною різницею подій A* та *B* називається подія $F = A \Delta B = (A - B) + (B - A)$, яка завжди відбувається, коли відбувається подія A, а подія B не відбувається або відбувається, коли відбувається подія B, а подія A – ні.

***Означення* 6.** Події A й B називаються *несумісними,* якщо вони в одному досліді не можуть відбутися одночасно, тобто $AB = \varnothing$.

Приклад. Припустимо, дослід полягає в проведенні стрільби навмання по сірому прямокутнику “Ω”, точки якого є елементарними подіями ω. Нехай влучення у “Ω” є достовірна подія Ω, а влучення в сферу трикутника “A” та фігуру “B” – відповідно події A, B.

Тоді події, $\boldsymbol{A+B}$, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{A \backslash B}$, $\boldsymbol{A \Delta B}$, $\bar{A}$ (виділені чорним) можна графічно представити на площині *діаграмою Ейлера-Венна*:

Назва операції	Позначення	Геометричний зміст
Сума подій	$C = A + B \equiv A \cup B$	
Добуток подій	$D = AB \equiv A \cap B$	
Різниця подій	$R = A - B \equiv A \backslash B$	
Симетрична різниця	$A \Delta B = (A - B) +$ $+ (B - A)$	
Заперечення	$\bar{A}$	

Множини випадкових подій відносно операцій утворюють булеву алгебру. ***Основні властивості операцій*** над подіями є такі:

1) комутативність – $A + B = B + A$; $AB = BA$;

2) асоціативність – $A + (B + C) = (A + B) + C$; $A(BC) = (AB)C$;

3) дистрибутивність – $(A + B)\, C = AC + BC$, $AB + C = (A+C)\,(B+C)$;

4) закони Де Моргана – $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$;

5) закони ідемпотентності – $A + A = A$ (але не $2A$), $AA = A$ (але не A^2);

6) закони "нуля і одиниці" – $A + \varnothing = A$; $A\varnothing = \varnothing$; $\Omega + A = \Omega$; $A\,\Omega = A$;

7) $A + \bar{A} = \Omega$, $A\bar{A} = \varnothing$.

Деякі формули з комбінаторного аналізу. Зафіксуємо деяку n-множину M і довільне невід'ємне ціле число $k < n$.

Означення 1. Розміщенням з n елементів по k називають будь-яку впорядковану k-підмножину n-множини.

Число розміщень без повторень з n до k: позначають символом A_n^k і обчислюють за формулою: $A_n^k = n(n-1)\ \dots\ (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)}$.

Означення 2. Перестановкою з n елементів називають розміщення з n елементів по n.

Число перестановок з n елементів позначають P_n. Очевидно, що $P_n = n(n-1)\dots 2\cdot 1 = n!$

Примітка. Вважають, що $0! = 1! = 1$.

Означення 3. Комбінацією з n елементів по k називають будь-яку k-підмножину n-множини.

Число комбінацій з n елементів по k позначають символом C_n^k і обчислюють за формулою: $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

Приклад 1. На зборах присутні 25 студентів. Скількома способами можна обрати голову зборів, його заступника і секретаря?

Розв'язування. Число способів обрання дорівнює числу розміщень з 25 по 3: $A_{25}^3 = 25\cdot 24\cdot 23 = 13800$.

Приклад 2. На зборах присутні 25 студентів. Скількома способами можна обрати президію зборів у складі трьох осіб?

Розв'язування. Число способів обрання дорівнює числу комбінацій без повторень з 25 по 3: $C_{25}^3 = \dfrac{25\cdot 24\cdot 23}{2!} = 2300$.

Приклад 3. Скількома способами можна розмістити 25 студентів за круглим столом?

Розв'язування. Оскільки стіл круглий, то положення одного з студентів можна зафіксувати, і шукане число способів дорівнює числу перестановок без повторень з 24: $P_{24} = 24!$

Різні підходи до означення ймовірності події. У будь-якому випадковому експерименті завжди існує невизначеність – матиме чи не матиме місце окрема подія. Вимірвання *ймовірності* настання тієї чи іншої очікуваної події зручно визначати числом, яке знаходиться між 0 і 1. Історично процедура оцінення ймовірності події спочатку розвивалася за двома наближеннями:

за класичним (*апріорним*) *означенням* **–** ймовірність появи події A становить число $p = m/n$, де m – число випадків, сприятливих для появи події A, n – число усіх рівноможливих випадків*;*

за частотним (*апостеріорним*) *означенням* **–** за ймовірність приймається відносна частота появи цієї події $p \sim W_n(A) = m/n$ після великого числа n повторень, в яких подія A з'являлася m разів.

Властивості відносної частоти $\boldsymbol{W_n}(A)$

1) $W_n(A) \geq 0$, тому що $m \geq 0$ і $n > 0$*;*

2) $W_n(A) \leq 1$, тому що $m \leq n$;

3) якщо при n-кратному повторенні досліду несумісні події A й B з'явилися відповідно m_A і m_B разів, то

$$W_n(A+B)=\frac{m_{A+B}}{n}=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=W_n(A)+W_n(B).$$

Апріорі (заздалегідь, до досліду) частота $W_n(A)$ є випадковою, тобто не можна завбачити точне її значення до проведення цієї серії з n дослідів.

Обидва означення ймовірності мають серйозні недоліки. Зокрема, частотне означення незручне з двох причин: 1) прямування частоти події A до її імовірності відбувається не в загальноприйнятому розумінні, а в імовірнісному; 2) обчислення граничного значення $P(A)$, до якого прямує частота при необмеженому зростанні числа дослідів n, може бути неможливим через значні труднощі проведення дослідів. Тому згодом було введене ***аксіоматичне означення ймовірності***.

Означення. *Імовірністю події A* називається числова функція $P(A)$, яка задовольняє такі *аксіоми:*

А1. Кожній події A відповідає невід'ємне число $P(A)$, тобто $P(A) \geq 0$ (*невід'ємність імовірності*).

А2. Імовірність достовірної події $P(A) = 1$ (*нормування ймовірності*).

А3. Для будь-яких несумісних подій A і B справедлива рівність $P(A + B) = P(A) + P(B)$ (*кінцева адитивність імовірності*).

А4**.** Для будь-якої спадної послідовності $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset /\ldots A_1$ подій таких, що $A_1A_2\ldots A_n\ldots = \varnothing$, має місце $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ (*неперервність імовірності*).

Аксіоми А1-А3 тісно пов'язані із властивостями частоти.

Основні властивості ймовірності P(A)

1) Якщо $A \subseteq B$, то ймовірність монотонна: $P(A) \leq P(B)$. Представимо множину B як $B = A + B\backslash A$ (рис. 2). За побудовою $A(B\backslash A) = \varnothing$, отже, події A й $B\backslash A$ несумісні. Тому за А3 й А1 маємо $P(B) = P(A) + P(B\backslash A) \geq P(A)$.

2) $P(A) \leq 1$ для будь-якого A. $A \subset \Omega$, тому із 1) і А2 випливає $P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

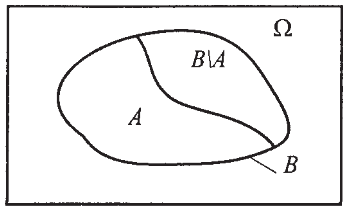


Рис. 2.

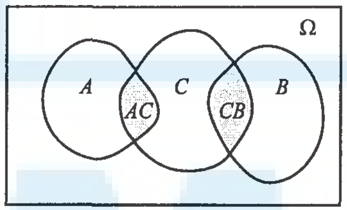


Рис. 3.

3) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ для будь-яких A, B. Представимо A у вигляді $A = A\backslash B + AB$. Оскільки $(A\backslash B)(AB) = \varnothing$, то за А3 $P(A) = P(A\backslash B) + P(AB)$, звідки $P(A\backslash B) = P(A) - P(AB)$. Аналогічно $A + B = B + A\backslash B$, причому $B(A\backslash B) = \varnothing$. Тоді з А3 випливає $P(A + B) = P(B) + P(A\backslash B)$. Підставивши в цю формулу отриманий раніше вираз для $P(A\backslash B)$, одержимо потрібне.

4) $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$ для будь-яких A, B. Із А1 випливає, що $P(AB) \geq 0$, тому за властивістю 3) одержуємо $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B)$.

За індукцією можна одержати також нерівність $P(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

5) На основі аксіоми А3 за індукцією можна показати, коли події $A_1,\ldots, A_n$ попарно несумісні, то $P(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

6) $P(C(A + B)) = P(CA) + P(CB)$ для будь-яких несумісних подій A і B. За припущенням $AB = \varnothing$, тому $(CA)(CB) = \varnothing$. За властивістю подій маємо $C(A + B) = C\,A + C\,B$. За А3 одержуємо $P(C(A + B)) = P(CA + CB) = P(CA) + P(CB)$ (рис. 3).

7) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. За означенням $\bar{A} = \Omega \backslash A$, тому $A\bar{A} = \varnothing$. За властивістю подій маємо $\bar{A} + A = \Omega$, тобто події A та $\bar{A}$ утворюють повну групу несумісних подій. Отже, $P(A + \bar{A}) = 1$. Оскільки A й $\bar{A}$ – несумісні, то за аксіомою А3 маємо: $1 = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, звідки випливає шукана важлива формула.

8) $P(A + B) = 1 - P(\bar{A}\,\bar{B})$. За законами Де Моргана маємо $\overline{A+B} = \bar{A}\,\bar{B}$. Звідси та із попередньої властивості 7) випливає $P(A + B) = 1 - P(\overline{A+B}) = 1 - P(\bar{A}\,\bar{B})$.

9) $P(AB) = 1 - P(\bar{A} + \bar{B})$. Це випливає, коли замість подій $\bar{A}$ і $\bar{B}$ розглянути відповідно події A та B і використати властивість подій A: $\bar{\bar{A}} = A$.

Умовні ймовірності. Нехай A і B – дві випадкові події (рис. 4) такі, що $P(B) \neq 0$, і відомо, що подія B уже відбулася.

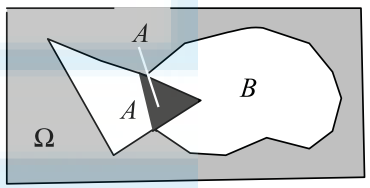


Рис.4.

Оскільки B стала відомою, то спадає на думку, що цей факт привів до заміни початкового простору Ω новим елементарним простором. За цієї умови, як правило, змінюється і ймовірність здійснення події A.

Імовірність події A за умови, що подія B уже відбулася з імовірністю $P(B) \neq 0$, називається ***умовною ймовірністю*** і позначається $P(A|B)$.

Приклад 1. Кидають одночасно два гральні кубики. Нехай подія A ={сума очок не менша 10}, подія B = {сума очок парна}. Якщо відомо, що B відбулася, то для A є 18 можливих елементарних подій (наприклад, ω_{11} можлива, а ω_{12} – ні); з них сприятливими для A є ω_{64}, ω_{46}, ω_{55}, ω_{66}. Отже, $P(A|B) = 4/18 = 2/9$.

Приклад 2. У одній із двох урн містяться 2 білі і 3 чорні кульки, в іншій – 1 біла і 4 чорні (рис. 5). Дослід полягає у виборі навмання урни й виймання навмання кульки. Яка ймовірність вийняти білу кульку?

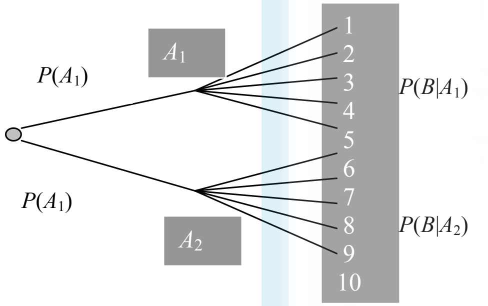


Рис. 5.

Розв'язування. Нехай подія B= {вийнята кулька – біла} і події A_i = {кулька виймається з i-ї урни} (i = 1, 2). Тоді $P(B|A_1) = 2/5$, $P(B|A_2) = 1/5$.

Розглянемо дослід G, що зводиться до схеми випадків і припустимо, що подіям A, B сприяють відповідно m_A, $m_B > 0$ випадків із усіх n можливих. Нехай подія B відбулася. Це означає, що із усіх можливих n випадків реально могло з'явитися тільки m_B випадків, причому з них тільки m_{AB} випадків сприяють події A. Тоді $P(A|B) = m_{AB} / m_B$. Справді, одержуємо

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{m_{AB}/n}{m_B/n} = \frac{m_{AB}}{m_B}.$$

Умовна ймовірність задовольняє такі співвідношення:

$$P(A|B) = P(AB)/P(B),\ P(B) \neq 0, \tag{1}$$

$$P(B|A) = P(AB)/P(A),\ P(A) \neq 0. \tag{2}$$

Звідки одержимо правило множення ймовірностей:

$$P(A\,B) = P(B)\,P(A|B) = P(A)P(B|A). \tag{3}$$

Означення 2. Дві випадкові події A і B називаються *незалежними,* якщо здійснення однієї з них не впливає на ймовірність здійснення іншої, тобто якщо

$$P(A|B) = P(A). \tag{4}$$

У цьому випадку правило множення має вигляд:

$$P(A\,B) = P(A)P(B). \tag{5}$$

Формули (4) і (5) еквівалентні, тому для означення поняття "*незалежність двох випадкових подій"* часто використовується співвідношення (5).

Означення 3. Випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються *незалежними в сукупності,* якщо для кожного k і кожної k-комбінації $i_1,..., i_k$, де $1 \le i_1 < ... < i_k \le n$, виконується співвідношення $P(A_{i1}\,A_{i2} ... A_{im}) = P(A_{i1})\,P(A_{i2}) ... P(A_{im})$.

Означення 4. Випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються *попарно незалежними,* якщо для довільних i, j ($i \neq j$) A_i й A_j незалежні.

Загальна формула множення ймовірностей. Імовірність одночасної появи декількох подій $A_1,..., A_n$ виражається формулою множення ймовірностей:

$$P(A_1, A_2, ... A_n) = P(A_1)\,P(A_2|\,A_1)\ ...\ P(A_n|A_1\ ...\ A_{n-1}). \tag{6}$$

Загальна формула додавання ймовірностей. Імовірність появи хоча б однієї з подій $A_1,..., A_n$ виражається формулою додавання ймовірностей:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = p_1 + p_2 + ... + p_n, \tag{7}$$

$$\text{де } p_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i); \quad p_1 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_iA_j),...; \quad p_n = P(A_1...A_n).$$

Означення 1. Події $H_1,..., H_n$ утворюють *повну групу несумісних подій,* якщо вони: 1) попарно несумісні ($H_i\,H_j = \varnothing$ для i, j =1,2, ..., n; при $i \neq j$);

2) відбудеться хоча б одна з подій H_i, i = 1,..., n, тобто $H_1 + ... + H_n = \Omega$.

Події $H_1,..., H_n$, у яких $P(H_i) > 0$, i = 1, 2,..., n, часто називають ***гіпотезами.***

Достовірну подію Ω можна представити у вигляді $\Omega = H_1 + H_2 + ... + H_n$, коли $H_iH_j = \varnothing$ (i, j = 1, 2, …, n, $i \neq j$). Тоді будь-яку подію A можна представити як

$$A = A\,\Omega = A(H_1 + H_2 + ... + H_n) = (A\,H_1) + (A\,H_2) + ... + (AH_n) = \sum_{i=1}^{n} AH_i.$$

За аксіомою адитивності випливає, що $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$. Застосувавши до останньої рівності формулу (3), одержимо ***формулу повної ймовірності***

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i). \qquad (6)$$

Приклад 1. Нехай маємо три однотипні урни, в кожній з яких по дві білі та шість чорних кульок, і одну урну, у якій одна біла і вісім чорних кульок. Навмання вибираємо урну, а потім з неї навмання виймаємо кульку. Яка ймовірність вийняти білу кульку?

Позначимо подію A = {вийнята кулька – біла}; її ймовірність $P(A)$. Нехай подія H_i = {вибрана урна i-типу}, $i = 1;2$. Очевидно $A = (AH_1) + (AH_2)$, тому що $H_1H_2= Ø$. Отже, $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$. Але $P(H_1) = 3/4$, $P(H_2) = 1/4$; $P(A|H_1) = 2/8 = 1/4$, $P(A|H_2)= 1/9$. Остаточно: $P(A) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} = \frac{31}{144}$.

Приклад 2. Група туристів виходить з пункту O, навмання вибираючи одне з можливих розгалужень доріг (рис. 6). Знайдіть ймовірність того, що вони потраплять у пункт A.

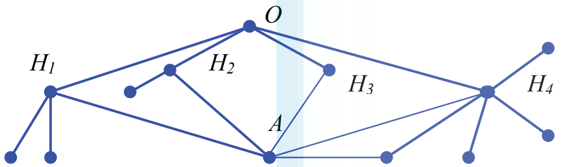


Рис.6.

Розв'язування. Нехай подія A = {туристи потрапили у пункт A}. За формулою повної ймовірності $P(A)=\sum_{i=1}^{2} P(A|H_i)\cdot P(H_i)$. Оскільки $P(H_i) = 1/4$ $(i = 1,..., 4)$; $P(A|H_i)$: $P(A|H_1) = 1/3$, $P(A|H_2) = 1/2$, $P(A|H_3) = 1$, $P(A|H_4) = 2/5)$, то $P(A) = 1/4\,(1/3 + 1/2 + 1 + 2/5) = 67/120 \approx 0{,}558$.

Формули Байєса. Якщо передумови закону повної ймовірності виконані, тоді можна обчислити ймовірність події H_i за умови, що подія А відбулася. Для цього служать формули Байєса, або формули ймовірності гіпотез

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, \; (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (7)$$

Приклад 3. Проводиться експеримент, що й у прикладі 1. Нехай виймуть білу кульку. Яка ймовірність того, що вона з урни першого типу?

Розв'язування. $P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{3/4\cdot 1/4}{3/4\cdot 1/4 + 1/4\cdot 1/9} = 27/31$.

Послідовність повторних незалежних випробувань Бернуллі

Випробування за схемою Бернуллі. Схематичне уявлення про такі випробування може дати простий приклад. Нехай серед n абсолютно однакових кульок в урні певну частку $p = m/n$ становлять m кульок, позначених хрестиком. При кожній спробі вийняти навмання з урни кульку можливі два наслідки: вийнята кулька буде мічена (подія A), або ні (протилежна подія $\bar{A}$). Ймовірність витягнути мічену кульку (за умови, що вона буде повернена назад) кожного разу однакова $P(A) = p$. Ймовірність протилежної події – $P(\bar{A}) = q = 1 – p$. Суттєво, що результати кожного наступного випробування не залежать від результатів попереднього, тобто вони є незалежними.

Формула Бернуллі. Розглянемо експеримент G – випробування Бернуллі за фіксованого числа n. Назвемо один із можливих наслідків випробування "успіхом" (A), а інший – "невдачею" ($\bar{A}$). Позначимо ймовірність успіху через $P(A) = p \in [0,1]$, а ймовірність невдачі – $P(\bar{A}) = q = 1- p$. У процесі n-кратного повторення випробування подія A може відбутися k разів $(k = 0,1,2,..., n)$.

Нехай нас цікавить, зокрема, ймовірність події $A_n(k)$ – досягнення k успіхів (при цьому не обов'язково, в якому порядку): $P(A_n(k)) = P_n(k)$.

Теорема. Ймовірність точного числа успіхів $k \le n$ в експерименті послідовних випробувань обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (1)$$

Справедливість цієї формули продемонструємо для випадку $n = 3$, $k = 1$, при яких формула (1) набуває вигляду $P_3(1) = 3pq^2 = 3p(1-p)^2$.

Представимо $A_3(1)$ через несумісні події: $A_3(1) = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$, де A_i – успіх $(i = 1,2,3)$, $\bar{A}$ – невдача у i- випробуванні. Звідси $P_3(1) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$. Події $A_1 A_2 A_3$ і $\bar{A}_1\bar{A}_2 A_3$ – незалежні, тому $P_3(1) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = pq^2 + pq^2 + pq^2 =$, тобто $P_3(1) = 3pq^2 = C_3^1\, p\,(1-p)^2$.

У загальному випадку формула (1) доводиться аналогічно (перевірте).

Приклад 2. Монету підкидають 4 рази. Знайти ймовірність того, що “герб” випаде точно 0, 1, 2, 3, 4 рази.

Розв’язування. Тут $n = 4$, $p = q = 0{,}5$ За формулою (1) для різних k одержимо:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 1\cdot 0{,}5^0 q^4 = 0{,}0625 = a,$$

$$P_4(1) = \frac{4!}{1!3!} pq^3 = 4\cdot 0{,}0625 = 4a,$$

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!2!} p^2 q^2 = 6\cdot 0{,}0625 = 6a,$$

$$P_4(3) = \frac{4!}{1!3!} p^2 q^2 = 4\cdot 0{,}0625 = 4a,$$

$$P_4(4) = \frac{4!}{4!0!} p^2 q^2 = 0{,}0625.$$

$x = m$	0	1	2	3	4
p	$1a$	$4a$	$6a$	$4a$	a

Перевірка: $P(\Omega) = \sum\limits_{m=1}^{4} P_4(m) = (1+4+6+4+1)\dfrac{1}{16} = 1.$

Зауваження. В літературі експеримент G називають біномним з параметрами n, p і позначають $B(n, p)$, оскільки C_n^m є біномними коефіцієнтами.

Приклад 3. Ймовірність виходу за межі допуску оброблюваних на верстаті деталей становить $p = 0{,}07$. Знайти ймовірність, що із трьох навмання взятих деталей у двох з них розміри діаметра не відповідатимуть допуску.

Розв’язування. Умова задачі відповідає випробуванням Бернуллі. Тому:

$$P_3(2) = C_3^2 (0{,}07)^2 (0{,}93)^1 = 3\cdot 0{,}0049\cdot 0{,}93 \approx 0{,}014\ .$$

Найімовірніше число появи події

Означення. Найімовірнішим числом появи події A, за n випробувань Бернуллі називається число k_0 з імовірностю $P_n\ (k_0)$, в крайньому разі, не меншою за ймовірність появи кожної з решти.

Для знаходження k_0 досить знати число дослідів n та ймовірність появи події A в окремому досліді і обчислити за формулою:

$$np - q \le k_0 \le np + p. \qquad (2)$$

Приклад 4. Встановлено, що лише 90 % висіяних у ґрунт зернин насіння огірків проростає. Визначити найімовірніше число зернин із 70, висіяних у ґрунт, які проростуть.

Розв’язування. З умови задачі $p = 0{,}9$, $n = 70$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. За формулою (2), знаходимо: $70\cdot 0{,}9\ \ 0{,}1 \le k_0 \le (70+1)\cdot 0{,}9 \to 62{,}9 \le k_0 \le 63{,}9 \to k_0 = 63$.

Відповідь. Найвірогідніше, проростуть 63 зернини.

Приклад 5. Встановлено, що п’ятнадцята частина виробів не відповідає умовам стандарту. Отримано партію виробів обсягом 250 штук. Знайти найімовірніше число виробів, які відповідатимуть умовам стандарту.

Розв’язування. За умовою задачі: $n = 250$, $q = \dfrac{1}{15}$, $p = \dfrac{14}{15}$. За формулою (2):

$$\frac{14}{15}\cdot 250 - \frac{1}{15} \le k_0 \le \frac{14}{15}\cdot 250 + \frac{14}{15}, \text{ або } 233{,}3 \le k_0 \le 234{,}3 \Rightarrow k_0 = 234.$$

Відповідь. Найвірогідніше, відповідатимуть умовам стадарту 234 вироби з 250.

Приклад 6. Імовірність виграшу у лотереї дорівнює 0,01. При якій кількості куплених білетів найімовірніше число виграшів дорівнюватиме 3?

За умовою $m_0 = 3$; $p = 0{,}01$; $q = 1 - p = 0{,}99$. Відповідно до нерівності (2) маємо: $n\cdot 0{,}01 - 0{,}99 \le 3 \le n\cdot 0{,}01 + 0{,}01$; звідки

$$n\cdot 0{,}01 - 0{,}99 \le 3; \quad n \le 399;$$

$$3 \le n\cdot 0{,}01 + 0{,}01; \quad n \ge 299.$$

Відповідь. При $299 \le n \le 399$ (куплених білетів).

Формули наближеного обчислення біномних імовірностей. У практичних задачах часто доводиться обчислювати ймовірності різних подій за великих значень n. У цих випадках обчислення за формулою Бернуллі стають практично неможливими. Труднощі зростають, коли доводиться підсумовувати ймовірності $P_n(x)$. До підсумовування зводиться обчислення ймовірностей подій виду $k_1 \le k \le k_2$ як, наприклад, у такій задачі.

Проводиться 70 випробувань за схемою Бернуллі з імовірністю появи події A в одному випробуванні, що дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться від 25 до 35 разів, тобто знайти $P_n(25 \le k \le 35)$.

В окремих випадках за умови $n \to \infty$ вдається замінити формулу Бернуллі асимптотично наближеними формулами.

Так, коли n достатньо велике, а p – дуже мала величина, для формули Бернуллі має місце *асимптотична формула Пуассона:*

$$P_n(k) = c_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ \gamma = np\ . \qquad (3)$$

Сукупність значень імовірностей $p(\lambda)$: $k = 0,1,2,...\}$ називають *розподілом Пуассона.*

k	1	2	3	...	k	...
$p(k)$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3}e^{-\lambda}$	$\cdots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\cdots$

За формулою Пуассона обчислюються ймовірності числа появи дуже рідкісних подій у масових випробуваннях (для практичних цілей функція $P_n(k)$ затабульована для різних значень k і параметра λ).

Приклад 7. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Протягом години будь-який абонент незалежно від інших може зробити виклик з імовірністю 0,05. Потрібно знайти ймовірність того, що протягом години було не більше 7 викликів.

Тут $\lambda = np = 5$. Нехай k – число викликів. Нас цікавлять значення k, що дорівнюють $k = 0,1,...,7$:

$$P(0) = \frac{5^0}{0!}e^{-5};\quad P(1) = \frac{5}{1!}e^{-1};\dots P(7) = \frac{5^7}{7!}e^{-7},$$

$$P(0 \le k \le 7) = e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{6} + \frac{5^4}{24} + \frac{5^5}{120} + \frac{5^6}{720} + \frac{5^7}{5040}\right) \approx 0,867 .$$

Приклад 8. Якщо ймовірність зустріти в деякій спільноті людей шульгу (лівшу) в середньому становить 1 %, то чому дорівнює ймовірність того, що серед навмання вибраних 200 людей цієї спільноти буде: а) 4 шульги? б) принаймні один шульга? в) хоча б 4 шульги?

Розв'язування. Маємо схему Бернуллі, в якій $p = 0.01$, $n = 200$, $k = 4$, $k \ge 1$, $k \ge 4$. Тому $\lambda = np = 200 \cdot 0,01 = 2$,

а) $P_{200}(k = 4) = p(k = 4, \lambda = 2) = 0,090224$,

б) $P_{200}(k \ge 1) = 1 - P_{200}(k = 0) = 1 - p(k = 0, \lambda = 2) = 1 - 0,135335 = 0,864665$.

в) $P_{200}(k \ge 4) = 1 - P_{200}(k \le 3)$,

$P_{200}(k \le 3) = P_{200}(k = 0) + P_{200}(k = 1) + P_{200}(k = 2) + P_{200}(k = 3) = p(k = 0, \lambda = 2) + p(k = 1, \lambda = 2) + p(k = 2, \lambda = 2) + p(k = 3, \lambda = 2) = 0,135335 + 0,270671 + 0,270671 + 0,180447 \approx 0,8571$,

$P_{200}(k \ge 4) = 1 - 0,8571 = 0,1429$.

Відповідь. а) 0,090224; б) 0,864665; в) 0,1429.

Якщо n достатньо велике, а p не дуже відрізняється від 0,5, має місце формула Муавра-Лапласа, яку іноді називають ***локальною формулою Лапласа***.

$$P_n(k) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{npq}}, \qquad (4)$$

де $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}$ – функція Гаусса, або мала функція Лапласа, $t = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Для зручності проведення обчислень без використання комп'ютерів складено таблиці функції $\varphi(t)$ (див. дод. 1). $\phi(t)$ – парна функція, має максимум при $x = 0$, дві точки перегину при $x = \pm 1$, асимптотою її графіка є вісь абсцис:

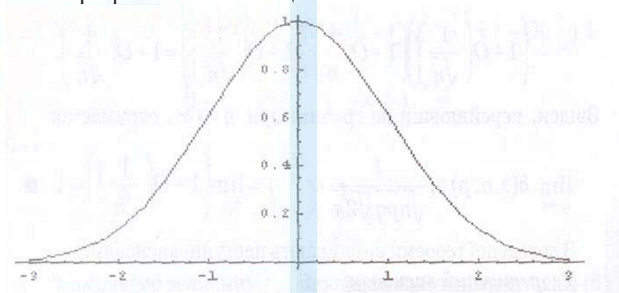


Рис. 7. **Графік функції $y = \varphi(t)$**

З формули (4) випливає, що однакові відхилення від величини np праворуч і ліворуч мають однакові ймовірності. У формулі Бернуллі це було лише за $p = 0,5$.

Якщо n достатньо велике, а p не дуже відрізняється від 0,5, має місце інтегральна формула Лапласа:

$$P_n(m_1 \le k \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} c_n^k p^k q^{n-k} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \qquad (5)$$

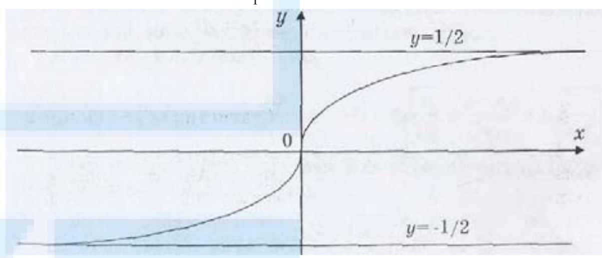


Рис. 8.

Тут $\beta = \dfrac{k_2 - pn}{\sqrt{npq}}$; $\alpha = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функція Лапласа, яка є непарною. Її значення наведені в (дод. 2), графік – на рис. 8.

Приклад 9. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка ймовірність того, що число очок, кратне 3, випадає не менше 280 і не більше 294 рази?

Тут $n = 800$; $p = \dfrac{1}{3}$; $q = \dfrac{2}{3}$.

$$P_{300}(280 \le k \le 294) = \Phi\left(\frac{294 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) - \Phi\left(\frac{280 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) = \Phi(2{,}05) - \Phi(1) =$$

$$= 0{,}479818 - 0{,}341343 \approx 0{,}14.$$

Імовірність відхилення відносної частоти від заданої ймовірності. Нехай маємо ряд випробувань, незалежних відносно події A, і при кожному випробуванні ймовірність появи події A стала і дорівнює p ($p \neq 0$, $p \neq 1$). Припустимо, що здійснено n випробувань, в яких подія A з'явилась k разів, тобто відома її відносна частота появи k/n у цих випробуваннях. При проведенні серій багатократних випробувань відносні частоти k/n в основному повинні бути близькими до ймовірності. Виберемо деяке число $\varepsilon > 0$ і спробуємо знайти ймовірність $P\left(\left|\dfrac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$.

Для цього виконаємо ряд тотожних перетворень, а саме:

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{k}{n} - p < \varepsilon \Leftrightarrow -n\varepsilon < k - np < n\varepsilon \Leftrightarrow np - n\varepsilon < k < np + n\varepsilon .$$

Оскільки за тотожних перетворень імовірність не змінюється, то

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P(np - n\varepsilon < k < np + n\varepsilon) .$$

Нехай $np - n\varepsilon = k_1$, $np + n\varepsilon = k_2$. Застосуємо до останнього виразу ймовірності інтегральну формулу Лапласа (2), звідки отримаємо

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P(np - n\varepsilon < k < np + n\varepsilon) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) ,$$

де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{np - n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}};$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{np + n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Оскільки $x_1 = x_2 = \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$, то ймовірність відхилення відносної частоти k/n від заданої ймовірності p за модулем менше, ніж на ε, обчислюється за формулою:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (6)$$

де значення функції $\Phi(x)$ знаходиться за таблицею (дод. 2).

Приклад 10. Імовірність дефекту деталі дорівнює 0,08. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей відхилення від цього процента браку не перевищуватиме числа $\varepsilon = 0{,}01$.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 1000$, $\varepsilon = 0{,}01$, $p = 0{,}08$; $q = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$. Знаходимо шукану ймовірність за формулою (6):

$$P\left(\left|\frac{k}{1000} - 0{,}08\right| < 0{,}01\right) = 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{1000}{0{,}08 \cdot 0{,}92}}\right) = 2\Phi(1{,}17) \approx 2 \cdot 0{,}379 = 0{,}758.$$

Приклад 11. Відомо, що несхожість насіння пшениці насіннєвого запасу становить 8 %. Скільки для контролю потрібно висіяти зерен пшениці і в яких межах може міститись число зерен, що не дасть схожості, щоб відхилення відносної частоти їх від заданої ймовірності не перевищило 0,01 з імовірністю 0,9596?

Розв'язування. За умовою задачі $p = 0{,}08$; $q = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$, $\varepsilon = 0{,}01$. Необхідно знайти n, k_1, k_2.

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0{,}08\right| < 0{,}01\right) = 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{0{,}08 \cdot 0{,}92}}\right) = 0{,}9596 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{0{,}08 \cdot 0{,}92}}\right) = 0{,}4798.$$

За таблицею знаходимо, що $0{,}01\sqrt{\dfrac{n}{0{,}08 \cdot 0{,}92}} = 2{,}05$, звідки $n = 3100$.

Для знаходження меж несхожості зерен розв'яжемо відносно k нерівність

$$\left|\frac{k}{n} - 0{,}08\right| < 0{,}01. \left|\frac{k}{3100} - 0{,}08\right| < 0{,}01; \Leftrightarrow -0{,}01 < \frac{k}{3100} - 0{,}08 < 0{,}01; \Leftrightarrow 217 < k < 278.$$

Відповідь. Потрібно висіяти 3100 зернин, при цьому число несхожості зернин буде в межах від $k_1 = 217$ до $k_2 = 278$.

1.3. Задачі для самостійного розв’язування

1. Запишіть вираз, який включає довільні події *A, B* та *C* і стверджує: а) відбулася тільки подія *A*; б) відбулися події *A, B,* але не відбулася подія *C*; в) відбулося принаймні, дві події.

2. Стрілець тричі стріляє у мішень. Нехай подія A_i полягає у влученні в мішень у результаті *i*–го пострілу (i = 1; 2; 3). Виразіть через події A_1, A_2, A_3 такі події: а) *A* – влучення мало місце лише в результаті першого пострілу; б) *B* – мало місце три влучення; в) *C* – мало місце лише одне влучення; г) *D* – влучення мало місце не менше двох разів; д) *E* – всі три постріли не влучили в ціль.

3. Стрілець 50 разів стріляє у ціль. Скільки разів він промахнеться, якщо відносна частота попадання f = 0,8?

4. Для побудови трикутника взято навмання 3 із 5 відрізків довжиною 8, 3, 5, 2, 4. Яка ймовірність того, що такий трикутник існуватиме?

5. Для перевірки партії з 15 виробів, серед яких є 5 бракованих, вибираються 3 вироби. Партія вважається забракованою, якщо в ній виявиться хоч один бракований елемент. Яка ймовірніcь того, що партія буде забракована?

6. Три спортсмени стріляють у мішень по одному разу. Ймовірність влучення для першого з них дорівнює 0,8; для другого – 0,85; для третього – 0,9. Визначити ймовірність того, що: а)всі спортсмени влучать у мішень; жоден не влучить; б)тільки один спортсмен влучить у мішень; в) тільки два спортсмени влучать у мішень; г) хоча б один спортсмен влучить у мішень.

7. Кидають одночасно два гральних кубики. Знайдіть імовірність того, що: а) сума очок, які випали, дорівнює 6; б) добуток очок, які випали, дорівнює 6.

8. Імовірність настання події в кожному досліді однакова й дорівнює 0,2. Досліди проводять один за одним до настання події. Визначити ймовірність того, що доведеться робити четвертий дослід.

9. Власник пластикової картки забув останню цифру коду. Пам’ятаючи лише, що ця цифра парна, набрав її навмання. Знайдіть імовірність того, що номер набрано правильно.

10. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри, пам’ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайдіть імовірність того, що номер набрано правильно.

11. Імовірність того, що студент правильно розв’яже перше завдання контрольної роботи, дорівнює 0,8, друге – 0,6, третє – 0,5. Знайдіть імовірність того, що студент розв’яже хоча б одне завдання контрольної роботи.

12. Два мисливці влучають у ціль з імовірностями 0,9 і 0,8 відповідно. Кожен із них робить один постріл. Яка ймовірність того, що: а) жоден мисливець не влучить у ціль; б) хоча б один мисливець влучить у ціль, в) обидва мисливці влучать у ціль; г) лише один мисливець влучить у ціль?

13. Підкидають три монети. Знайдіть імовірності таких подій: *A* – випав рівно один “герб”; *B* – три монети випали однаковими сторонами; *C* – “гербів” не менше одного.

14. У туристів залишилося 10 однакових консервних банок, серед яких 6 банок – з тушкованим м’ясом, решта – з рибою. Під час зливи етикетки відклеїлися. Яка ймовірність того, що вміст двох навмання взятих банок виявиться різним?

15. У кошику лежать 4 червоних і 6 зелених яблук. Знайдіть імовірність, що серед п’яти узятих яблук будуть: а) усі червоні; б) 3 зелені яблука.

16. У ящику містяться 15 тенісних м’ячів, з яких 9 нових. Для першої гри навмання беруть три м’ячі, які після гри повертають в ящик. Для другої гри також навмання беруться три м’ячі. Знайти ймовірність того, що всі м’ячі, взяті для другої гри, нові.

17. У тирі є п’ять рушниць, імовірності влучення з яких дорівнюють відповідно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 і 0,9. Визначити ймовірність влучення при одному пострілі, якщо стріляючий бере одну з рушниць навмання.

18. На площині проведено паралельні прямі, відстань між якими дорівнює $2a$. Визначити ймовірність того, що побудований на цій площині круг радіуса $r<a$ не перетинає жодної прямої.

19. Розрив телефонної лінії відбувся на ділянці між 30 і 50 кілометрами. Яка ймовірність того, що розрив стався між 38 і 43 кілометрами?

20. На відрізку *AB* довжиною a навмання взято 5 точок. Знайти ймовірність того, що 2 точки лежатимуть від точки *A* на відстані, меншій від x, а 3 точки – на відстані, більшій від x.

21. У круг вписано правильний трикутник. Знайти ймовірність того, що точка, кинута в круг, потрапить у трикутник.

22. У правильний трикутник вписано круг. Знайти ймовірність того, що точка, кинута в трикутник, потрапить у круг.

23. Показати, якщо події *A* і *B* незалежні, то незалежні також події *A* і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і *B*.

24. Показати, якщо події *A* і *B* — несумісні і мають ненулеві ймовірності, то вони залежні.

25. Одному королю набридла неправдивість передбачень свого провісника, і він задумав його покарати, надавши при цьому певний шанс на порятунок: провісник на свій розсуд повинен був розмістити у двох урнах 2 білі та 2 чорні кульки. Коли кат, вибираючи навмання урну, витягне з неї навмання чорну кульку, він стратить провісника, білу – покарання скасовується. Яким чином провісник повинен розставити кульки, щоб шанс уникнути покарання був найбільшим?

26. У складальний цех надходять однакові деталі, які виробляють у двох інших цехах заводу. Перший цех доставляє 70 %, а другий – 30 % деталей. При цьому перший цех виробляє 95 % деталей вищої якості, а другий – 90 %. Навмання обрана деталь виявилася вищої якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь: 1) з першого цеху; 2) із другого цеху.

27. До каси підприємства надійшли банкноти у пачках з двох банків: 40 пачок від першого і 60 – від другого. Ймовірність помилки касирів першого банку становить 0,1, а другого – 0,15. Яка ймовірність того, що навмання вибрана пачка сформована без помилок?

28. Булки, випечені хлібозаводом, розподілені за вагою так: менші 90 г – 5 %, більші 110 г – 10 %, інші 85 % булок мають нормальну масу (90 – 110 г). З досить великої партії беруть навмання дві булки. Знайти ймовірність того, що а) обидві булки мають нормальну масу; б) одна булка має масу меншу за норму, а інша – більшу.

29. Працюють три пристрої. Імовірність того, що протягом одного дня перший пристрій відмовить – 0,3, другий – 0,6, третій – 0,1. Знайти ймовірність того, що протягом одного дня відмовлять: а) всі пристрої; б) будь-який один; в) принаймні один пристрій.

30. Два економісти заповнюють документи і складають їх у спільну папку. Ймовірність зробити помилку в документі першим економістом дорівнює 0,15, другим – 0,1. Перший економіст заповнив 40 документів, а другий – 60. Навмання взятий з папки документ виявився з помилкою. Знайдіть імовірність того, що його склав перший економіст.

31. Завод виготовляє 90 % стандартних деталей. Яка ймовірність того, що із 8 деталей, відібраних для перевірки на якість, 5 виявляться стандартними?

32. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Яка ймовірність того, що з десяти навмання вибраних немовлят виявиться шість хлопчиків?

33. Гральний кубик кидають 6 разів. Знайдіть імовірність того, що двічі випаде кількість очок, кратна 3.

34. Імовірність укладення угоди за результатами ділових переговорів дорівнює 0,7. Проведено 5 ділових зустрічей. Знайдіть імовірність того, що буде укладено 3 угоди. Яка найімовірніша кількість укладених угод?

35. Ймовірність того, що стрілець влучить у “десятку” дорівнює 0,6. Знайдіть імовірність того, що із 5 пострілів буде 3 влучення у “десятку”. Яка найімовірніша кількість влучень у “десятку”?

36. Чотири студенти складають іспит. Імовірність того, що перший студент здасть іспит, дорівнює 0,95, другий – 0,9, третій – 0,85, а четвертий 0,8. Знайти ймовірність того, що а) хоча б два студенти складуть іспит; б) всі чотири студенти складуть іспит.

37. Імовірність виграшу на кожен з лотерейних білетів дорівнює 0,02. Яка ймовірність того, що із 100 куплених білетів 5 виграшних?

38. Серед ста лотерейних білетів – 5 виграшних. Яка ймовірність залишитися без виграшу при трьох придбаних білетах?

39. Імовірність того, що студент відповість на тестове запитання, дорівнює 0,9. У тестовому завданні є 40 запитань. Чому дорівнює найімовірніша кількість тестових запитань, на які студент знає відповідь, та відповідна цій кількості ймовірність?

40. Імовірність того, що студент правильно відповість на тестове питання, дорівнює 0,8. Знайдіть імовірність того, що студент правильно відповість не менше, ніж на 80 % із 50 тестових питань, заданих йому.

41. Відділ доставки піцерії отримує 80 % замовлень на фірмову піцу. Знайдіть ймовірність того, що серед 100 замовлень буде 70 замовлень на фірмову піцу.

42. Фірма виконує поліграфічні роботи, причому 20 % замовлень припадає на виготовлення візитних карток. Знайдіть імовірність того, що серед 850 клієнтів 150 замовлять візитні картки.

43. Процент проростання насіння становить 70 %. Знайдіть імовірність того, що із 1000 посіяних насінин проросте від 650 до 850 насінин.

44. Імовірність реагування адміністрації на кожен із запитів громадян дорівнює 0,9. Знайдіть імовірність того, що із 100 запитів буде розглянуто не менше 75 і не більше 90 запитів.

45. Імовірність влучення у літак з гвинтівки при кожному пострілі дорівнює 0,001. Здійснюється 3000 пострілів. Знайдіть імовірність того, що буде 2 влучення.

46. Імовірність того, що будь-який абонент зателефонує на комутатор упродовж однієї години, дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 800 абонентів. Яка ймовірність того, що впродовж однієї години зателефонують 5 абонентів?

47. У роботі комп’ютера час від часу виникають збої, середня кількість яких за добу сягає 1,5. Вважаючи кількість збоїв за добу випадковою величиною з розподілом Пуассона, знайдіть імовірності подій: а) протя-

гом доби трапиться принаймні один збій; б) за дві доби не трапиться жодного збою; в) за тиждень буде не менше трьох збоїв.

1.4. Питання для самоконтролю

1. Які події називаються випадковими? Наведіть приклади.
2. Наведіть приклади достовірних і неможливих подій.
3. Які події називаються несумісними?
4. Яку подію називають протилежною? Наведіть приклади.
5. Як ви розумієте поняття “ймовірність події”? Поясніть на прикладах.
6. Чому дорівнює ймовірність достовірної події? неможливої події?
7. Назвіть основні властивості ймовірності.
8. Охарактеризуйте основні сполуки (перестановки, розміщення, сполучення) та наведіть приклади їхнього використання при знаходженні ймовірностей подій.
9. Опишіть на простих прикладах простір елементарних подій.
10. Які операції виконуються над подіями?
11. Розкажіть про аксіоми, на яких будується теорія ймовірностей.
12. Що таке умовна ймовірність? Наведіть приклади.
13. Розкажіть про властивості умовної ймовірності.
14. Сформулюйте теорему множення ймовірностей для двох залежних (незалежних) подій.
15. Яка різниця між незалежними та несумісними подіями?
16. Запишіть формулу обчислення ймовірності появи хоча б однієї з n несумісних подій. Наведіть приклади.
17. Запишіть теорему додавання ймовірностей.
18. Розкажіть про поняття повної група подій та зобразіть її на діаграмі.
19. Який вигляд має формула повної ймовірності та яке її застосування? Наведіть приклад (показавши на діаграмі), коли її застосовують.
20. Які ймовірності називаються апріорними (апостеріорними)? Наведіть приклади.
21. Запишіть формули Байєса і розкажіть, коли їх застосовують. Наведіть приклади.
22. Яка послідовність випробувань відбувається за схемою Бернуллі?
23. Напишіть формулу Бернуллі.
24. Що називається найімовірнішим числом появ події A у випробуваннях Бернуллі.
25. Визначте найімовірнішу кількість появ події A у схемі Бернуллі.
26. Коли використовують локальну або інтегральну теорему Муавра–Лапласа?
27. Які властивості мають локальна та інтегральна функції Лапласа?
28. Коли використовують формулу Пуассона?
29. Як оцінюється ймовірність випадкової події через частоту її появи?

Змістовий модуль II. Випадкові величини та процеси

2.1. Питання для самостійного вивчення

- Випадкові вектори, умовні розподіли(загальний випадок).
- Знаходження розподілів імовірностей та числових характеристик (математичного сподівання, дисперсії, кореляційного моменту).
- Функції від двох випадкових аргументів.
- Двовимірний нормальний розподіл імовірностей.
- Підсилений закон великих чисел.
- Поняття потоку подій та його властивості.
- Розв’язування задач.

Література: основна [1–5];
додаткова [11–15]

2.2. Короткий виклад теоретичного матеріалу та приклади розв’язування типових задач

Випадкові величини та розділи ймовірностей

Дискретною випадковою величиною X називається величина, можливі значення якої утворюють скінченну або зліченну послідовність чисел $x_1, x_2,..., x_k,...$ причому прийняття кожного із цих значень є випадкова подія *з певною ймовірністю* p_k.

Однозначне відображення множини x_i на множину p_i розглядається як *функція ймовірності* дискретної випадкової величини. Отже, ймовірність p_k є функція від x_k, яка визначає *закон розподілу ймовірностей випадкової величини X.*

Під законом розподілу випадкової величини взагалі прийнято вважати будь-яке співвідношення між значеннями випадкової величини і ймовірностями, що може задаватися числовим рядом, таблицею (для дискретних випадкових величин зі скінченною кількість можливих значень), аналітичним виразом, графіком, а також, як покажемо далі, функцією розподілу ймовірностей випадкових величин обох типів – дискретною і неперервною**.**

Табличне представлення закону розподілу ймовірностей *дискретної випадкової величини X* має загальний вигляд:

Можливе значення $X = x_i$	x_1	x_2	...	x_k	…
Імовірність $P(x) = p_i$	p_1	p_2	…	p_k	…

Приклад 1. Число очок, що випадає на верхній грані правильного грального кубика, є дискретна випадкова величина з таблицею розподілу ймовірностей:

Число очок $X = x_i$	1	2	3	4	5	6	
Імовірність $P(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	$\sum p_i = 1$

Приклад 2. У деяку ціль ведеться стрільба до першого влучення без обмеження числа пострілів. Імовірність влучення при кожному пострілі дорівнює *p=const.* Число зроблених пострілів є дискретна випадкова величина X зі зліченним рядом розподілу ймовірностей – нескінченно спадною геометричною прогресією зі знаменником (1-p)

X	1	2	3	...	n	…
$P(x)$	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	…	$(1-p)^{n-1}p$	…

Цей ряд збіжний, його сума

$$p + (1-p)p + (1-p)^2p + \ldots + (1-p)^{n-1}p + \ldots = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Зауваження. Якщо випадкова величина X приймає лише скінченне число різних значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то випадкові події $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ утворюють повну групу попарно несумісних подій, сума ймовірностей яких $p_1 + p_1 + \ldots + p_1 = 1$.

Неперервною випадковою називається величина, задана на деякому інтервалі (скінченному або нескінченному) так, що її можливі значення заповнюють цей інтервал суцільно. Для зручності і більшої загальності припускають, що випадкова величина X змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. У випадку, коли її значення належать скінченному інтервалу $[a, b]$, вважають, що ймовірності попадання випадкової величини за межі інтервалу $[a, b]$ дорівнюють нулю.

За аналогією з дискретною неперервну випадкову величину задавати за допомогою таблиці вже не можна, бо її значення незліченні і закон розподілу ймовірностей повинен визначати не ймовірність попадання в точку, а в заданий інтервал.

Отже, для описування неперервної випадкової величини X відрізка $(-\infty, +\infty)$ необхідно припустити, що відома ймовірність попадання X у довільний інтервал, або відома функція розподілу її ймовірностей.

Означення. Функцією (інтегральною) розподілу випадкової величини X називається ймовірність того, що X прийме значення менші від фіксованого дійсного числа x, тобто $F(x) = P(X<x)$, $\forall x \in R^1$ (рис.1). Вона однозначно визначає випадкову величину і є універсальною формою закону розподілу.

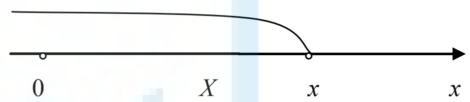


Рис.1.

Для функції розподілу дискретної випадкової величини маємо

$$F(x) = F(x_i < x) = \sum_{x_i < x} p_i . \qquad (1.14)$$

Підсумовування виконується по всіх i, для яких $x_i < x$. Таким чином, $F(x)$ є східчастою функцією зі стрибками висотою p_i у точках x_i (рис. 2).

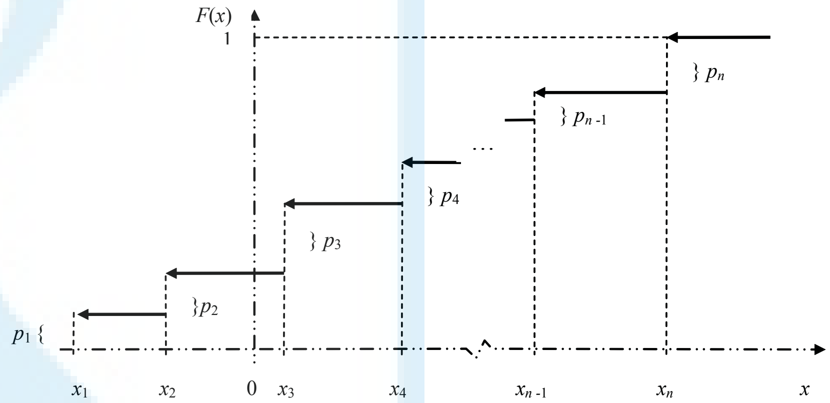


Рис. 2

Неперервна випадкова величина має неперервну функцію розподілу, графік якої має форму плавної кривої (рис. 3).

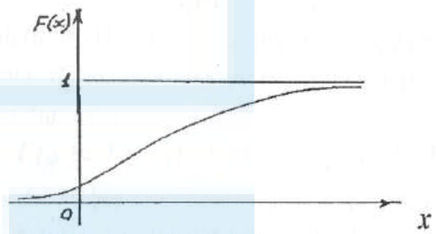


Рис.3

Властивості функції розподілу:

1. Значення функції розподілу належать відрізкові [0; 1].
2. Функція розподілу – неспадна функція, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.
3. Імовірність того, що випадкова величина X прийме значення з інтервалу $[\alpha, \beta]$, дорівнює приростові функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P\{\alpha \leq X \leq \beta\} = F(\beta) - F(\alpha).$$

4. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалові $(-\infty, +\infty)$, то $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

Щільність (густина) розподілу – це похідна від $F(x)$ по x: $f(x) = dF(x)/dx$.

Властивості щільності розподілу:

1. Щільність розподілу як похідна неспадної функції – невід'ємна: $f(x) \geq 0$.
2. Інтеграл від щільності розподілу: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$
3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в $[\alpha, \beta]$

$$P\{\alpha \leq X \leq \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx .$$

4. Функцію розподілу визначають співвідношенням: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Числові характеристики випадкової величини

Математичне сподівання $MX_{(диск.)} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, $MX_{(неперев.)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$,

Дисперсія $DX = M(X - MX) = M(X^2) - (MX)^2 =$, тобто

$$DX_{(диск.)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \ ,$$

$$DX_{(неперерв.)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2 .$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma_x = \sqrt{DX}$

Приклад 3. Задано ряд розподілу

x_i	1,4	1,8	2,3	3,2
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1

Знайти математичне сподівання MX, дисперсію DX і середнє квадратичне відхилення σ.

Розв'язування. Математичне сподівання випадкової величини X

$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 == 1{,}4 \cdot 0{,}3 + 1{,}8 \cdot 0{,}4 + 2{,}3 \cdot 0{,}2 + 3{,}2 \cdot 0{,}1 = 1{,}92.$

Дисперсія $DX = (x_1 - MX)^2\, p_1 + (x_2 - MX)^2\, p_2 + (x_3 - MX)^2\, p_3 + (x_4 - MX)^2 p_4 = = (1{,}4 - 1{,}92)^2 \cdot 0{,}3 + (1{,}8 - 1{,}92)^2 \cdot 0{,}4 + (2{,}3 - 1{,}92)^2 \cdot 0{,}2 + (3{,}2 - 1{,}92)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}28,$

або $M(X^2) = 1{,}4^2 \cdot 0{,}3 + 1{,}8^2 \cdot 0{,}4 + 2{,}3^2 \cdot 0{,}2 + 3{,}2^2 \cdot 0{,}1 = 3{,}966;$

$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 3{,}966 - 1{,}92^2 = 0{,}28.$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

$$\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{0{,}28} = 0{,}53.$$

Приклад 4. Випадкову величину X задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0 \\ x^2/4, \ 0 < x \leq 2 \\ 1, \ x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, визначити математичне сподівання, дисперсію, побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

Розв'язування. а) Знайдемо щільність імовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0 \\ x/2, \ 0 < x \leq 2 \\ 0, \ x > 2. \end{cases}$$

б) Визначимо $MX = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2dx} = 1/2\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4/3.$

Знайдемо

$$DX = \int_0^2 x^2 \cdot x/2dx - (\frac{4}{3})^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx - (\frac{4}{3})^2 = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\ \Big|_0^2 - (\frac{4}{3})^2 = 2/9 \ .$$

в) Побудуємо графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

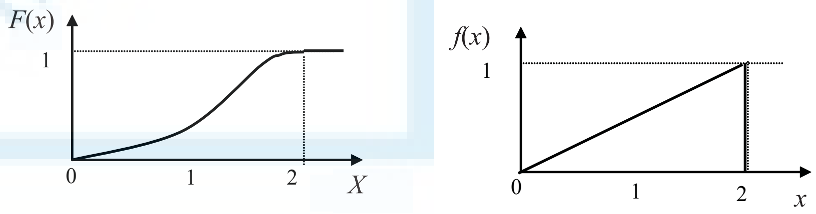


Рис. 4.

Біномний закон розподілу $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, де $0 < p < 1$; $q = 1 - p$.

***Розподіл Пуассона*(*показниковий*)** $P(m)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, де $\lambda = np$.

Експоненціальний закон розподілу $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $f(t)=F(t)/dt= \lambda e^{-\lambda t}$, де λ – параметр розподілу (середнє число подій за одиницю часу).

Нормальний закон розподілу ймовірностей (розподіл Гаусса)

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Для визначення ймовірностей, пов'язаних з нормально розподіленою випадковою величиною користуються функцією Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

значення якої протабульовані й наведені в дод. 2.

Імовірність попадання випадкової величини X на ділянку значень (α,β) виражають через функцію Лапласа формулою:

$$P\{\alpha<X<\beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Закон рівномірного розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}, & x\in(\alpha,\beta);\\ 0, & x\notin(\alpha,\beta),\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & x\in(\alpha,\beta);\\ 0, & x\notin(\alpha,\beta).\end{cases}$$

Приклад 5. Відомі імовірнісні характеристики нормально розподіленої випадкової величини X : $a = 17$; $\sigma = 0{,}6$. Знайти ймовірність події $P(\alpha<X<\beta)$; а також імовірність того, що $P(|x-m| < \delta)$, якщо $\alpha = 16{,}8$; $\beta = 17{,}2$; $\delta = 0{,}3$.

Розв'язування. Обчислимо ймовірність того, що $X\in(16{,}8;\ 17{,}2)$.

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{17{,}2-17}{0{,}6}\right)-\Phi\left(\frac{16{,}8-17}{0{,}6}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=0{,}26.$$

Визначимо ймовірність того, що x відхилиться від свого середнього значення a менше ніж на δ

$$P(|x-17|<0{,}3)=2\Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}6}\right)=0{,}38.$$

Числові характеристики найпоширеніших імовірнісних розподілів.

№ пор.	Назва розподілу	*M(X)*	*D(X)*	σ(*X*)
I. Дискретні розподіли				
1	Рівномірний з параметром *n*	$(n+1)/2$	$(n2–1)/12$	$\sqrt{(n^2-1)/12}$
2	Біномний з параметрами *n* і *p*	np	$np(1-p)$	$\sqrt{np}\,(1-p)$
3	Показниковий з параметром λ	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
4	Геометричний з параметром *p*	1/p	$(1-p)/p^2$	$\sqrt{(1-p)/p}$
II. Неперервні розподіли				
5	Рівномірний з параметрами *a, b*	$(a+b)/2$	$(b-a)2/12$	$(b-a)/2\sqrt{3}$
6	Нормальний з параметрами *a*, σ	a	σ2	σ
7	Показниковий з параметром *a*	$1/a$	$1/a^2$	$1/a$

Закон великих чисел

Нерівність Чебишова $P(|X - M(X)| <\varepsilon) \ge 1 - D(X)/\varepsilon^2$.

Теорема *Чебишева.*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

або $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|\ge\varepsilon\right)=0.$$

Теорема Бернуллі $\lim\limits_{n\to\infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1$.

Приклад 6. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

x_i	0,3	0,6
p_i	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання за модулем менше 0,9.

Розв'язування. За нерівністю Чебишева $P(|X-M(X)|<\varepsilon) \ge 1 - D(X)/\varepsilon^2$.

Обчислимо $M(X) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}54$;

$$D(X) = (0{,}3 - 0{,}54)^2 \cdot 0{,}2 + (0{,}6 - 0{,}54)^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}3.$$

$$P(|X - M(X)| < 0{,}9) \geq 1 - 0{,}3/0{,}81 = 1 - 0{,}37 = 0{,}63.$$

Приклад 7. Для опалення в зимовий період учбовий заклад споживає щоденно всередньому 200 м^3 газу з середньо квадратичним відхиленням $\sigma = 15$м^3. На яку кількість споживання газу за один день можна сподіватися з ймовірністю, не меншою ніж 0,95?

Розв'язування. Нехай X – ймовірна кількість споживання газу за один день. За нерівністю Чебишева $P\ (|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2 = 0{,}95$, де $M(X) = 200$. Оскільки, $\sigma = 15$, то $1 - \dfrac{15}{\varepsilon^2} = 0{,}95$; звідки $\varepsilon = 67$. Отже, $|X - M(X)| < 67$, тобто $M(X) - 67 < X < M(X) + 67$; $133 < X < 267$.

Відповідь. Кількість споживання газу за один день становитиме 133 – 267 м^3.

Література: основна [6–10];
додаткова [16–18]

2.3. Задачі для самостійного розв'язування

Номер варіанта самостійного завдання вказує викладач. Усього варіантів 15. У процесі виконання завдання варто дати відповідні пояснення. Наприкінці роботи слід подати список літератури, якою студент користувався при виконанні контрольної роботи.

***Завдання* 1.** Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини на основі її числових характеристик та певної інформації про закон її розподілу:

а) $MX = 0{,}09$; $MX^2 = 3{,}1$;

X	–2	1	2
P	a	b	c

б) $MX = 1{,}2$; $\sigma X = 3{,}1$;

X	x_1	X_2
P	0,8	a

Завдання 2. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок – можливі значення X, другий – відповідні їм значення ймовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

№ варіанта						
1	x_i	10	12	20	25	30
	p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4
2	x_i	8	12	18	24	30
	p_i	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1
3	x_i	30	40	50	60	70
	p_i	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1
4	x_i	21	25	32	40	50
	p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2
5	x_i	10	12	16	18	20
	p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1
6	x_i	11	15	20	25	30
	p_i	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1
7	x_i	12	16	21	26	30
	p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1
8	x_i	13	17	20	27	30
	p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
9	x_i	14	18	23	28	30
	p_i	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1
10	x_i	15	19	24	29	30
	p_i	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4
11	x_i	13	17	20	27	30
	p_i	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1
12	x_i	14	18	23	28	30
	p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1
13	x_i	13	17	20	27	30
	p_i	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1
14	x_i	10	12	16	18	20
	p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2
15	x_i	8	12	18	24	30
	p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

***Завдання* 3**. Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання MX і дисперсію DX; в) побудувати графіки інтегральної й диференціальної функцій.

1. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 2, \\ \frac{1}{9}(x-2)^2, \ 2 \leq x \leq 5, \\ 1, \ x > 5. \end{cases}$ **2.** $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 1, \\ \frac{1}{4}(x-1)^2, \ 1 < x \leq 3, \\ 1, \ x > 3. \end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\pi,\\ \cos\dfrac{x}{2}, & -\pi^{x}\le 0\\ 1, & x>0.\end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ \dfrac{1}{4}(x-3)^2, & 3\le x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{1}{9}(x-1)^2, & 1\le x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{(x+1)^2}{9}, & -1\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{25}x^2, & 0<x\le 5,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin 3x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{6},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{6}(x^2+x), & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 6,\\ (x-6)^2, & 6\le x\le 7,\\ 1, & x>7.\end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 8,\\ (x-8)^2, & 8<x\le 9,\\ 1, & x>9.\end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x-x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ \dfrac{1}{25}(x-3)^2, & 3<x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$

14. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \dfrac{1}{16}(x-2)^2, & 2\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$

15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\le \pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$

Завдання 4. Задано математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що X набуде значення, що належить інтервалу $[\alpha, \beta]$, і ймовірність того, що абсолютна величина відхилення буде менша ε, тобто $|X-a|<\varepsilon$.

№ варіанта	a	σ	α	β	ε
1	15	2	9	19	3
2	14	4	10	20	4
3	13	4	10	21	2
4	9	3	9	18	5
5	8	4	8	12	8
6	12	5	12	22	10
7	11	4	13	23	6
8	10	8	14	18	2
9	7	2	6	10	1
10	6	2	4	12	0,5
11	3	0,3	1,5	2,5	0,25
12	5	0,2	4	5	0,2
13	11	1	10	11	2
14	4	0,5	3	3,5	2
15	12	1,1	11	12	3

2.4. Питання для самоконтролю

1. Розкажіть, як ви розумієте поняття випадкової величини.
2. Які є способи задання законів розподілу дискретних випадкової величин?
3. Дайте означення функції розподілу дискретної випадкової величини, сформулюйте основні її властивості.
4. Як визначаються числові характеристики дискретних випадкових величин та які їхні властивості?
5. Розкажіть про неперервні випадкові величини. Наведіть їх приклади.
6. Дайте означення функції розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин та розкажіть про її властивості.
7. Розкажіть про диференціальну функцію розподілу та її властивості.
8. Числові характеристики неперервних випадкових величин, їх властивості.
9. Як обчислюється ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $[a, b]$ за допомогою інтегральної функції розподілу?
10. Дайте означення двовимірного випадкового вектора.
11. Законом розподілу системи двовимірних дискретних випадкових величин (X, Y) називається...
12. Що називається інтегральною функцією розподілу для системи двох випадкових величин (X, Y)?

13. Що називається диференціальною функцією (щільністю) розподілу для системи двох випадкових величин (X, Y)?
14. Що називається умовною щільністю ймовірностей випадкової величини X при фіксованому Y?
15. Що називається умовною щільністю ймовірностей випадкової величини Y при фіксованому X?
16. Що називається умовним математичним сподіванням випадкової величини X при фіксованому Y?
17. Що називається умовним математичним сподіванням випадкової величини Y при фіксованому X?
18. Що називається рівнянням регресії Y на X та рівнянням регресії X на Y?
19. Розкажіть про кореляційну матрицю системи випадкових величин.
20. Формула коефіцієнта кореляції для двох випадкових величин X та Y.
21. За якою формулою обчислюється математичне сподівання випадкової величини X для системи двох неперервних випадкових величин (X, Y)?
22. За якою формулою обчислюється дисперсія випадкової величини X для системи двох неперервних випадкових величин (X, Y)? Приклад.
23. За якою формулою обчислюється математичне сподівання випадкової величини Y для двох неперервних випадкових величин (X, Y)? Приклад.
24. Обчислення дисперсії випадкової величини Y для системи двох неперервних випадкових величин (X, Y).
25. За якою формулою обчислюються умовні математичні сподівання $M(x/y)$ та $M(y/x)$?
26. Як визначають коефіцієнт кореляції випадкових величин?
27. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин та умови їх застосування.
28. Наведіть приклад випадкової величини з біномним законом розподілу.
29. Запишіть закон біномного розподілу у вигляді функції розподілу.
30. Намалюйте многокутники біномного розподілу при $n = 3$ і $p = 0,2$; 0,3; 0,5; 0,7; 0,8. Вкажіть на особливості цих многокутників.
31. Наведіть приклад випадкової величини із законом розподілу Пуассона.
32. Запишіть закон розподілу Пуассона рядом розподілу.
33. Запишіть закон розподілу Пуассона у вигляді функції розподілу.
34. Намалюйте многокутники розподілу Пуассона при $\lambda = 0,5$; 1; 2; 3,5. Вкажіть на особливості цих многокутників.
35. Як визначаються числові характеристики випадкової величини, розподіленої за біномним законом?

36. Запишіть числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона.
37. Наведіть приклади випадкових величин, що мають геометричний закон розподілу ймовірностей.
38. Наведіть приклади випадкових величин, що мають гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей.
39. Опишіть закон рівномірного розподілу ймовірностей випадкової величини.
40. Нормальний розподіл (розподіл Гаусса) та його значення в теорії ймовірностей.
41. Чому дорівнюють числові характеристики нормально розподілених випадкових величин?
42. Опишіть загальний вигляд нормально розподіленої випадкової величини. Вкажіть на його особливості.
43. Запишіть вираз для знаходження ймовірності того, що нормально розподілена випадкова величина попаде у заданий інтервал $a \leq X \leq b$.
44. Експоненціальний розподіл та його значення в теорії ймовірностей.
45. Яким параметром визначається експоненціальний закон розподілу?
46. Намалюйте вигляд диференціальної та інтегральної функцій експоненціального розподілу.
47. Чому дорівнюють числові характеристики експоненціально розподілених випадкових величин?
48. Двовимірний нормальний розподіл імовірностей.
49. Що називається функцією випадкового аргумента?
50. Закон розподілу ймовірностей функції одного випадкового аргумента.
51. Якщо $Y = a\ (x)$, де a є монотонна функція, то $f(y)$ =...
52. Якщо $Y = a\ (x)$, де a є немонотонна функція, то $f(y)$ =...
53. Дати означення ймовірної твірної функції.
54. Сформулюйте та доведіть нерівність Чебишева.
55. Доведіть теорему Чебишева.
56. Коли застосовують теорему Бернуллі?
57. Означення випадкового процесу та його основні характеристики.
58. Марковські ланцюги та їх класифікація.
59. Поняття потоку подій та його властивості.
60. Потік Пуассона, сфера його застосування.

Змістовий модуль ІІІ. Математична статистика

3.1. Питання для самостійного вивчення

- Теорема Глівенка-Кантеллі про граничну поведінку емпіричної функції розподілу.
- Побудова гістограм на матеріалах обстежень.
- Методи максимальної правдоподібності (метод Р. Фішера) одержання статистичних оцінок невідомих параметрів.
- Метод умовних варіант.
- Надійні межі для математичного сподівання при відомій дисперсії.
- Гіперболічна кореляція.
- Вибіркове кореляційне відношення та його властивості.
- Рангова кореляція.
- Критерій Колмогорова та Мізеса.
- Перевірка гіпотези про значимість вибіркового коефіцієнта кореляції.

3.2. Короткий виклад теоретичного матеріалу та приклади розв'язування типових задач

Математична статистика – розділ математики, який вивчає математичні методи збору, систематизації та обробки результатів спостережень масових випадкових явищ з метою встановлення існуючих закономірностей для наукових досліджень та практичних застосувань.

Вибірковий метод

Генеральною називається вся сукупність однотипних об'єктів, яка підлягає вивченню. *Вибірковою сукупністю,* або просто *вибіркою* називають сукупність об'єктів, випадково відібраних з генеральної сукупності. *Обсягом* сукупності (вибіркової або генеральної) називають число об'єктів цієї сукупності. Елементи вибірки можуть характеризуватися однією або кількома ознаками. Окреме значення ознаки називають *варіантою* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Після збору початкового матеріалу варіанти упорядковують за зростанням (або спаданням). Процес такого упорядкування називається *ранжуванням*. Послідовність елементів вибірки $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, упорядкована за зростання (або спаданням) їхньої величини $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, називається *варіаційним рядом*. Числа, що показують, скільки разів у варіаційному ряді зустрічається та або інша варіанта називають *частотами*, які позначають відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_k$, де $k \le n$ – кількість різних за значеннями варіант. Іноді n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ називають *вагою*.

Послідовність (x_i, n_i) називається *статистичним рядом,* який можна подати у вигляді таблиці:

Варіанти x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
Частоти n_i	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k

Статистичні ряди поділяють на дискретні та неперервні інтервальні залежно від того, які значення може приймати досліджувана ознака.

Приклад 1. За отриманими оцінками 20 студентів складено розподіл:

Оцінки	"Незадовільно" 2	"Посередньо" 3	"Добре" 4	"Відмінно" 5
Частоти n_i	3	10	5	2
Відносні частоти w_i	0,1	0,5	0,25	0,15

У цьому разі оцінка приймає дискретні значення.

Прикладом неперервного розподілу може служити розподіл вибірки студентів за зростанням.

Числові характеристики статистичних рядів

Середнє арифметичне значення (незважене і зважене відповідно):

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i.$$

Вибіркова дисперсія (невзважена і зважена відповідно):

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2; \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x)^2.$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення: $\sigma = \sqrt{S^2}$.

Точковою оцінкою параметра розподілу називається функція від спостережувальних значень x_i $(i = \overline{1,n})$, яка (в певному розумінні) мало відрізняється від цього параметра. Точковою цінкою для математичного сподівання MX генеральної сукупності є вибіркове середнє $\overline{x}_2$, для дисперсії $DX = \sigma^2$ – вибіркова дисперсія S^2, яка є зміщеною оцінкою для σ^2. Незміщеною оцінкою для дисперсії σ^2 є виправлена дисперсія $S_1^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - x)^2$.

Приклад 2. Обчислити вибіркову і незміщену вибіркову дисперсії вибірки, заданої розподілом частот:

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	5	10	30	40	10	5

Розв'язування. Об'єм вибірки $n = 5 + 10 + 30 + 40 + 10 + 5 = 100$. Вибіркове середнє $\bar{x}_2 = \dfrac{1}{100}(5 + 20 + 90 + 160 + 50 + 30) = \dfrac{355}{100} = 3{,}55$.

Вибіркова дисперсія $S^2 = \dfrac{1}{100}(5 + 40 + 270 + 640 + 250 + 180) - (3{,}55)^2 \approx$ $\approx 1{,}25$.

Незміщена вибіркова дисперсія $S_1^2 = \dfrac{100}{99}\cdot 1{,}25 = 1{,}26$.

а) **Довірчі межі для математичного сподівання при відомій дисперсії**

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – вибірка з генеральної сукупності, розподіленої за довільним законом з параметрами a і σ^2. Тоді величини x_i ($i = \overline{1, n}$) є однаково розподіленими незалежними випадковими величинами, що мають математичне сподівання a і дисперсію σ^2. Згідно з теоремою Ліндеберга-Леві $P\left\{\dfrac{\sum x_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < t\right\} \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ при $n \to \infty$, звідки випливає, що $P\left\{|\bar{x} - a| < \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}t\right\} \to 2\Phi(t)$, де $\Phi(t)$ – функція Лапласа.

Таким чином, якщо задано надійний рівень $p_\beta = \beta$, то надійним інтервалом для невідомого математичного сподівання a буде проміжок $\left(\bar{x} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\beta;\ \ \bar{x} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\beta\right)$, де t_β – корінь рівняння $\Phi(t_\beta) = 0{,}5\beta$. Число $\delta = t_\beta\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ називають *точністю* оцінки.

Приклад 3. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання, якщо надійний рівень $\beta = 0{,}99$; генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma = 10$; вибіркове середнє значення $\bar{x} = 12$; об'єм вибірки $n = 100$.

Розв'язування. Надійний інтервал матиме структуру

$\left(\bar{x} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\beta;\ \ \bar{x} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\beta\right)$. З рівняння $\Phi(t_\beta) = 0{,}495$ знаходимо $t_\beta = 2{,}57$.

Отже, надійний інтервал $\left(12 - \dfrac{10}{10}\cdot 2{,}57;\ \ 12 + \dfrac{10}{10}\cdot 2{,}57\right) = (9{,}43; 14{,}57)$.

Надійний рівень 0,99 вказує на те, що якщо проведено досить велику кількість вибірок, то приблизно в 99 % випадків одержані інтервали будуть накривати невідомий параметр a, і лише в 1 % випадків значення a може лежати за межами такого інтервалу.

Приклад 4. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,999 досягається точність 0,01 оцінки математичного сподівання, якщо дисперсія становить 1,5.

Разв'язування. За умовою $\beta = 0{,}999$, $\delta = 0{,}01$, $\sigma^2 – 1{,}5$. З рівняння $\Phi(t_\beta) =$ $= 0{,}4995$ знаходимо $t_\beta = 3{,}3$. За формулою $\delta = t_\beta\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ мінімальний об'єм вибірки $n = (3{,}3)^2\cdot\dfrac{1{,}5}{(0{,}01)^2} \approx 163350$.

б) **Довірчі межі для математичного сподівання при невідомій дисперсії**

Для побудови надійного інтервалу у цьому випадку розглядають випадкову величину $t = \sqrt{n}\dfrac{\bar{x} - a}{S_1}$. Відомо, що величина t розподілена за законом Стьюдента (t-розподіл) з $k = n - 1$ ступенями вільності. Щільність розподілу ймовірностей для t – розподілу $p_t(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \dfrac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$.

Розподіл Стьюдента визначається тільки одним параметром n -об'ємом вибірки і не залежить від невідомих параметрів a і σ^2 генеральної сукупності.

Оскільки $p_t(x)$ – парна функція x, то ймовірність виконання нерівності $|t| < t_\gamma$ визначається формулою $P\{|t| < t\} = 2\int\limits_0^{t_\gamma} p_t(x)dx$. За виразом випадкої величини t із останньої формули дістанемо, що при заданому надійному рівні γ надійним інтервалом для математичного сподівання при невідомій дисперсії буде проміжок $\left(\bar{x} - t_\gamma\dfrac{S_1}{\sqrt{n}}\ ;\ \ \bar{x} + t_\gamma\dfrac{S_1}{\sqrt{n}}\right)$,

де t_γ визначається з рівняння $2\int\limits_0^{t_\gamma} p_t(x)dx = \gamma$. Для знаходження $t_\gamma = t_\gamma(n,\gamma)$ складено спеціальні таблиці.

Приклад 5. Генеральна сукупність розподілена за нормальним законом з невідомою дисперсією. За вибіркою об'ємом 10 знайдено вибіркове середнє значення $\bar{x} = 25$ і виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $S_1 = 1{,}2$. Оцінити математичне сподівання при надійному рівні $\gamma = 0{,}99$.

Розв'язання. З таблиці знаходимо, що для $n = 10$ і $\gamma = 0{,}99$ $t_\gamma = 3{,}25$. Надійні межі:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{S_1}{\sqrt{n}} = 25 - 3{,}25 \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{10}} = 25 - 1{,}23 = 23{,}77,$$

$$\bar{x} + t_\gamma \frac{S_1}{\sqrt{n}} = 25 + 3{,}25 \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{10}} = 25 + 1{,}23 = 26{,}23.$$

Відповідь. Невідомий параметр з надійністю 0,99 накритий довірчим інтервалом (23,77; 26,23).

Кореляційна залежність

У практиці статистичних досліджень часто розглядається *статистичний зв'язок,* про який можна говорити тоді, коли умовне математичне сподівання однієї випадкової величини Y є функцією значення, якого набуває друга величина X, тобто $M(Y|_{X=x}) = f(x)$.

Таким чином, щоб вивчати статистичний зв'язок, потрібно знати умовне математичне сподівання. Для його оцінки необхідно знати закон розподілу випадкового вектора (X, Y). Залежність між однією випадковою величиною і умовним середнім значенням другої випадкової величини називають *кореляційною.* Форму кореляційного зв'язку можна охарактеризувати функцією регресії (лінійною або нелінійною), яка може бути використана для прогнозування значення однієї з випадкових величин, якщо відомо значення другої випадкової величини. Точність прогнозу визначається дисперсією умовного розподілу.

На практиці закон розподілу описується результатами вибірки, тому від умовного математичного сподівання переходять до умовного середнього значення вибірки.

Означення 1. *Умовним середнім значенням* $\bar{y}_x$ називають середнє арифметичне значення випадкової величини Y, які відповідають значенню випадкової величини X, що дорівнює x.

Означення 2. *Умовним середнім значенням* $\bar{x}_y$ називають середнє арифметичне значення випадкової величини X, які відповідають значенню випадкової величини Y, що дорівнює y.

Означення 3. *Кореляційною залежністю Y від X* називають функціональну залежність умовного середнього $\bar{y}_x$ від x: $\bar{y}_x = f(x)$, що називається *рівнянням регресії Y на X*. Функцію $f(x)$ називають *регресією Y на X*, а її графік – *кривою (лінією) регресії Y на X*.

Означення 4. Кореляційною залежністю X від Y називають функціональну залежність умовного середнього x_y від y: $\bar{x}_y = g(y)$, що називається рівнянням регресії X на Y. Функцію $g(y)$ називають регресією X на Y, а її графік – кривою (лінією) регресії X на Y.

Лінійна кореляція

Означення 5. Якщо обидві функції регресії $f(x)$ і $g(y)$ лінійні, то кореляцію називають *лінійною*.

Для лінійного кореляційного зв'язку функції регресії мають вигляд:

$$f(x) = ax + b,\ (g(y) = cy + d.$$

Задача полягає в тому, щоб за результатами вибірки відшукати значення невідомих коефіцієнтів a, b; c, d.

Припустимо, що проведено n незалежних дослідів і отримано n пар чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, …, $(x_n; y_n)$, які можна розглядати як випадкову вибірку з генеральної сукупності всіх можливих значень випадкового вектора (X, Y). Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли різні значення величини X і відповідні їм значення величини Y спостерігались по одному разу. Тоді немає необхідності користуватись поняттям умовного середнього значення і рівняння регресій можна записати у вигляді $y = ax + b$, $x = cy + d$, де невідомі коефіцієнти знаходяться за *методом найменших квадратів* (наприклад, для першого рівняння):

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},\quad b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \qquad (1)$$

Підставивши отримані значення a і b у рівняння одержимо вибіркове рівняння регресії Y на X. Аналогічно знаходять коефіцієнти c, d вибіркового рівняння регресії X на Y.

Приклад 6. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за результатами вибірки.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0

Розв'язання. Коефіцієнти a і b рівняння обчислимо за формулами (1). Для цього утворимо розрахункову таблицю:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
2	4,5	4	9,0
4	7,0	16	28,0
6	8,0	36	48,0
8	7,5	64	60,0
10	9	100	90
$\sum x_i = 30$	$\sum y_i = 36$	$\sum x_i^2 = 220$	$\sum x_i y_i = 235$

Підставивши обчислені суми у формули (1), дістанемо значення:

$$a = \frac{5 \cdot 235 - 30 \cdot 36}{5 \cdot 220 - (30)^2} = \frac{1175 - 1080}{1100 - 900} = \frac{95}{200} = 0,475,$$

$$b = \frac{220 \cdot 36 - 30 \cdot 235}{5 \cdot 220 - (30)^2} = \frac{7920 - 7050}{1100 - 900} = \frac{870}{200} = 4,35.$$

Отже, шукане рівняння регресії $y = 0,475x + 4,35$.

Зауваження. Результати вибірки можна зобразити точками $(x_i; y_i)$ на площині відносно прямокутної системи координат. Сукупність точок $(x_i; y_i)$ називається *полем кореляції*. З'єднавши точки $(x_i; y_i)$ відрізками, отримаємо ламану лінію, яку називають *емпіричною лінією регресії*.

При великому числі спостережень одне і те ж значення x може зустрітись n_x разів, одне і те ж значення y може зустрітись n_y разів, одна і та ж пара $(x; y)$ може зустрітися n_{xy}, разів. Тому результати спостережень і групують, тобто підраховують частоти n_x, n_y, n_{xy}. Всі згруповані дані записують у вигляді кореляційної таблиці:

Y	X				
	x_1	x_2	…	x_k	n_y
y_1	n_{11}	n_{21}	…	n_{k1}	n_{y1}
y_2	n_{12}	n_{22}	…	n_{k2}	n_{y2}
⋮	⋮	⋮	⋮⋮⋮	⋮	⋮
y_m	n_{1m}	n_{2m}	…	n_{km}	n_{ym}
n_x	n_{x1}	n_{x2}	…	n_{xk}	n

Скориставшись очевидними тотожностями:

$\sum x_i = n\bar{x}, \sum y_i = n\bar{y}, \sum x_i^2 = n\overline{x^2}$, $\sum x_i y_i = \sum n_{xy} xy$, матимемо систему рівнянь $\begin{cases} (n\overline{x^2})a + (n\bar{x})b = \sum n_{xy} xy, \\ (\bar{x})a + b = \bar{y} \end{cases}$, розв'язавши яку, визначимо невідомі параметрів $a = \dfrac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}$, $b = \dfrac{n\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\sum n_{xy} xy}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}$.

Отже, рівняння регресії Y на X, можна записати у вигляді

$$\bar{y}_x = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} x + \frac{n\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\sum n_{xy} xy}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}.$$

Звідси випливає, що $\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x})$, де $\rho_{yx} = \dfrac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}$ – вибірковий коефіцієнт регресії Y на X.

Отримане рівняння можна записати як $\bar{y}_x - \bar{y} = r_b \dfrac{S_y}{S_x}(x - \bar{x})$, де $S_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$, $S_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$ – відповідні вибіркові дисперсії, $S_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$, $S_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}$ — вибіркові середні квадратичні відхилення,

$r_b = \dfrac{\sum n_{xy} xy - n\overline{xy}}{n(S_x S_y)}$ — вибірковий коефіцієнт кореляції.

Аналогічно можна отримати рівняння регресії X на Y у вигляді $\bar{x}_y - \bar{x} = r_b \dfrac{S_x}{S_y}(y - \bar{y})$.

Приклад 7. Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції і рівняння прямої (лінії регресії Y на X) за даними кореляційної таблиці:

Y	X					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	n_y
0,5	0	0	2	21	1	24
0,6	2	4	12	14	0	32
0,7	0	2	3	0	0	5
0,8	8	9	1	0	0	18
n_x	10	15	18	35	1	79

Розв'язування. Обчислимо:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum n_x x = \frac{1}{79}(5 + 9 + 12,6 + 28 + 0,9) = \frac{55,5}{79} \approx 0,7;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum n_x x^2 = \frac{1}{79}(2,5 + 5,4 + 8,82 + 22 < 4 + 0,81) = \frac{39,93}{79} \approx 0,51;$$

$$S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{0,51 - 0,49 =} \sqrt{0,02} \approx 0,14;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum n_x y = \frac{1}{79}(12 + 19,2 + 3,5 + 14,4) = \frac{49,1}{79} \approx 0,62;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum n_x y^2 = \frac{1}{79}(6 + 11,52 + 2,45 + 11,52) = \frac{31,49}{79} \approx 0,4;$$

$$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \sqrt{0,4 - 0,3844 =} \sqrt{0,0156} \approx 0,12;$$

$$\sum n_{xy}xy = 0,7+8,4+0,45+0,6+1,44+5,04+6,72+0,84+1,47+3,2+$$

$$+4,32+0,56 = 33,74.$$

Звідси $\quad r_b = \dfrac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n(S_xS_y)} = \dfrac{33,74-79\cdot 0,7\cdot 0,62}{79\cdot 0,14\cdot 0,12} = -\,0,41$

Рівняння регресії: $\overline{y}_x - 0,62 = -\,0,41\cdot\dfrac{0,12}{0,14}(x-0,7)$ або $\overline{y}_x = -0,35x+0,87.$

Вибірковий коефіцієнт кореляції у вигляді $r_b = \dfrac{\frac{1}{n}\sum n_{xy}xy - \overline{x}\,\overline{y}}{S_xS_y}$ є точковою оцінкою для теоретичного коефіцієнта кореляції, який характеризує силу лінійного кореляційного зв'язку між ознаками у вибірці: чим ближче $|r_b|$ до 1, тим зв'язок сильніший; чим ближче $|r_b|$ до 0, тим зв'язок слабший.

3.3. Задачі для самостійного розв'язування

1. Протягом 5 випадково вибраних днів місяця температура повітря становила 3°, 5°, 4°, 1 °,2°. Знайти середню температуру повітря вибірки.

2. Відомі оцінки учнів за сумою балів за 3 іспити: 30, 30, 21,29, 35, 32, 19, 22, 33, 19, 28, 21, 24, 33, 22, 19. Побудувати полігон, емпіричну функцію розподілу (кумуляту). Знайти $\overline{x}$, M_o, M_e, D.

3. Дано розподіл оцінок студентів:

Оцінки	2	3	4	5
Кількість студентів	17	4	7	6

Визначити чи достатньо засвоєний матеріал.

4. Скласти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік за рядом розподілу:

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

5. Для ряду, який задано на інтервалах, знайти $D_в$, $\sigma_в$, M_e, M_o та побудувати гістограму.

Інтервали	36 – 38	38 – 40	40 – 42	42 – 44	44 – 46	46 – 48	48 – 50	50 – 52	52 – 54	54 – 56	56 – 58
n_i	2	5	6	8	12	28	21	14	7	3	1

6. Знайти $\overline{x}_в$, $\sigma_в$. Побудувати гістограму відносних частот і емпіричну функцію розподілу відносних накопичених частот $F(x)$.

Урожайність жита (ц/га)	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27
Ділянки в гектарах	6	12	33	22	19	8

7. Випадкова величина X нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\overline{x}$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою ймовірністю β.

№ варіанта	$\overline{x}_B$	σ	n	β
1	0	0,5	35	0,99
2	10	9,2	30	0,95
3	20	8,2	80	0,9
4	75	1,2	160	0,99
5	8	6,5	20	0,95
6	8	0,9	100	0,9
7	95	8,9	130	0,99
8	13	0,5	170	0,95
9	18	4,5	40	0,9
10	19	3,6	96	0,9
11	35	5	100	0,9
12	50	0,5	120	0,95
13	25	1,5	250	0,95
14	75	6	250	0,9
15	100	5	250	0,9

8. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $\overline{y}_x - \overline{y} = r_b\dfrac{S_y}{S_x}(x-\overline{x})$. Дані спостережень наведені в кореляційній таблиці.

Варіант 1

X / Y	4	9	14	19	24	29	
10	2	3					5
20		7	3				10
30			2	50	2		54
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	100

Варіант 2

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
30	2	6					8
40		4	4				8
50			7	35	8		50
60			2	10	8		20
70				5	6	3	14
n_x	2	10	13	50	22	3	100

Варіант 3

X / Y	15	20	25	30	35	40	n_y
5	4	2					6
10		6	4				10
15			6	45	2		53
20			2	8	6		16
25				4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	100

Варіант 4

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
20	1	5					6
30		5	3				8
40			9	40	2		51
50			4	11	6		21
60				4	7	3	14
n_x	1	10	12	55	15	3	100

Варіант 5

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
6	4	2					6
12		6	2				8
18			5	40	5		50
24			2	8	7		17
30				4	7	8	19
n_x	4	8	9	52	19	8	100

Варіант 6

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
8	2	4					6
12		3	7				10
16			5	30	10		45
20			7	10	8		25
24				5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	100

Варіант 7

X / Y	2	7	12	17	22	27	n_y
10	2	4					6
20		6	2				8
30			3	50	2		55
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	100

Варіант 8

X / Y	11	16	21	26	31	36	n_y
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	45	4		55
55			2	8	6		16
65				4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	100

Варіант 9

X / Y	4	9	14	19	24	29	n_y
8	3	3					6
18		5	4				9
28			40	2	8		50
38			5	10	6		21
48				4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	100

Варіант 10

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
11	4	2					6
21		5	3				8
31			5	45	5		55
41			2	8	7		17
51				4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	100

Варіант 11

X / Y	15	20	25	30	35	40	n_y
5	4	3					7
10		5	4				9
15			6	43	2		51
20			2	10	6		18
25				4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	100

Варіант 12

X / Y	5	10	15	20	25	30	n_y
8	2	4					6
12		3	8				11
16			5	30	10		45
20			6	10	8		24
24				5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	100

Варіант 13

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
6	4	2					6
12		6	2				8
18			5	40	5		50
24			2	8	7		17
30				4	7	8	19
n_x	4	8	9	52	19	8	100

Варіант 14

X / Y	11	16	21	26	31	36	n_y
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	45	4		55
55			2	8	6		16
65				4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	100

Варіант 15

X / Y	2	7	12	17	22	27	n_y
10	2	4					6
20		6	2				8
30			3	50	2		55
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	100

3.4. Питання для самоконтролю

1. На чому базується математична статистика?
2. Розкажіть про генеральну та вибіркову сукупності. Наведіть приклади.
3. Розкажіть про види вибіркових сукупностей. Наведіть приклади.
4. Яку вибірку називають репрезентативною?
5. Що таке варіанта, варіаційний та статистичний ряди?
6. Дайте означення полігону частот. Як його побудувати?
7. Що таке гістограма частот, гістограма відносних частот? Як їх будують?
8. Поясніть на прикладі, для якого типу рядів будуються гістограми.

9. Дайте означення варіаційного розмаху, абсолютного відхилення, коефіцієнта варіації та запишіть формули їх обчислення.
10. Розкажіть про вибіркове середнє, його властивості.
11. Розкажіть про вибіркову дисперсію, її властивості.
12. За якою формулою обчислюється дисперсія в практичних задачах?
13. Що таке середнє квадратичне відхилення?
14. Що називається модою та медіаною вибірки?
15. Поняття статистичного оцінювання та основні його завдання.
16. Що таке незміщеність, ефективність, спроможність статистичних оцінок?
17. Оцінка числових характеристик (дисперсії, математичного сподівання) генеральної сукупності.
18. Метод моментів для одержання спроможних оцінок параметрів (метод К. Пірсона).
19. Метод максимальної правдоподібності (метод Р. Фішера).
20. Що таке емпірична функція розподілу?
21. Розповісти про розподіл *хі*-квадрат.
22. Розподіл Стьюдента та його застосування.
23. Що таке розподіл Фішера?
24. Які оцінки параметрів розподілу називаються інтервальними?
25. Що слід ураховувати при виборі довірчої (надійної) ймовірності?
26. Розкажіть про прийнятність рівня значущості на прикладах задач.
27. Як визначається довірчий інтервал для математичного сподівання при відомому σ?
28. Як визначається довірчий інтервал для математичного сподівання при невідомому σ?
29. Як будують кореляційне поле та кореляційна таблиця?
30. В якому випадку кореляційну залежність називають лінійною?
31. Вибіркове рівняння регресії.
32. Лінійна та нелінійна регресія.
33. Метод найменших квадратів знаходження параметрів регресії.
34. Що таке вибірковий коефіцієнт кореляції?
35. Що таке вибірковий коефіцієнт кореляції, як його визначають?
36. Які властивості має вибірковий коефіцієнт кореляції?
37. Що таке статистична гіпотеза?
38. Яка гіпотеза називається нульовою, альтернативною (конкуруючою)?
39. Яка гіпотеза називається простою, складною? Наведіть приклади простої та складної гіпотез.
40. Що називають статистичною перевіркою гіпотез?
41. Що таке статистичний критерій та рівнь його значущості?

42. У чому полягає перевірка гіпотези про вигляд розподілу?
43. У чому полягає перевірка гіпотези про рівність двох нормальних розподілів?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вищ. шк., 1979. – 408 с.
2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1963.
3. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1965.
4. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1999. – С. 479.
5. *Горбань С. Ф., Снижко Н. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: МАУП, 1999. –161 с.
6. *Чорней Р. К.* та ін. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. – К.: МАУП, 2003.
7. *Конет І. М.* Теорія ймовірностей та математична статистика в прикладах і задачах. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2001. – 217 с.
8. *Каніовська І. Ю.* Теорія ймовірностей у прикладах і задачах. – К.: Політехніка НТУУ КПІ, 2004. – 154 с.
9. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1999.
10. *Агапов Г. И.* Задачник по теории вероятностей. – М.: Высш. шк., 1986. – 80 с.

Додаткова

11. *Сеньо П. С.* Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: Центр навч. л-ри, 2004. – 360 с.
12. *Конет І. М.* Теорія ймовірностей та математична статистика. – Кам'янець-Подільський: КПДУ, інформ.-видав. відділ, 1999. – 203 с.
13. *Жлуктенко Ю. О.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посіб.: У 2 ч. – К.: КНЕУ, 2000.
14. *Шефтель З. Г.* Теорія ймовірностей. – К., 1994.
15. *Тюрин Ю. Н., Макаров А. А.* Анализ данных на компьютере. – М: ИНФРА, 2003. – 544 с.
16. *Кремер Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2000.
17. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Практикум з курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика". – К.: Вид-во КІНГ, 1991.
18. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Практикум з математичної статистики. – К.: Вид-во КІНГ, 1991.

Додаток 1

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0008	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2818	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продовж. дод. 2

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
1,26	0,3926	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Додаток 3

Таблиця значень імовірності $P\{\chi^2 > \chi^2_P\}$

χ^2_P	*k*							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982
2	1574	3679	5724	7358	8491	9197	9598	9810
3	0833	2231	3916	5578	7000	8088	8850	9344
4	0455	1353	2615	4060	5494	6767	7798	8571
5	0254	0821	1718	2873	4159	5438	6600	7576
6	0143	0498	1116	1991	3062	4232	5398	6472
7	0081	0302	0719	1359	2206	3208	4289	5366
8	0047	0183	0460	0916	1562	2381	3326	4335
9	0027	0111	0293	0611	1091	1736	2527	3423
10	0016	0067	0186	0404	0752	1247	1886	2650
11	0009	0041	0117	0266	0514	0884	1386	2017
12	0005	0025	0074	0174	0348	0620	1006	1512
13	0003	0015	0046	0113	0234	0430	0721	1119
14	0002	0009	0029	0073	0146	0296	0512	0818
15	0001	0006	0018	0047	0104	0203	0360	0591
16	0001	0003	0011	0030	0068	0138	0251	0424
17	0000	0002	0007	0019	0045	0093	0174	0301
18		0001	0004	0012	0029	0062	0120	0212
19		0001	0003	0008	0019	0042	0082	0149
20		0000	0002	0005	0013	0028	0056	0103
21		0000	0001	0003	0008	0018	0038	0071
22		0000	0001	0002	0005	0012	0025	0049
23		0000	0000	0001	0003	0008	0017	0034
24		0000	0000	0001	0002	0005	0011	0023
25		0000	0000	0001	0001	0003	0008	0016
26		0000	0000	0000	0001	0002	0005	0010
27		0000	0000	0000	0001	0001	0003	0007
28		0000	0000	0000	0000	0001	0002	0005
29		0000	0000	0000	0000	0001	0001	0003
30		0000	0000	0000	0000	0000	0001	0002

Додаток 4

Значення критерію Фішера при (β= 0,95)

n(m-1)	*n-s*							
	1	2	4	6	8	12	24	
3	10,13	9,55	9,12	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
6	5,99	5,14	4,53	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
10	4,96	4,10	3,48	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
15	4,54	3,68	3,06	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
20	4,35	3,49	2,87	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
30	4,17	3,32	2,69	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
120	3,92	3,07	2,45	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,37	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *С. М. Толкачова*
Комп'ютерне верстання *А. П. Нечипорук*

Зам. № ВКЦ-4472

Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний.
Наклад 50 пр.
Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»

03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008