МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
з дисципліни “ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ”
(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2010

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики та програмування *І. В. Степахно*

Затверджено на кафедрі прикладної математики
(протокол № 2 від 2.10.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Степахно І. В. Методичні рекомендації що до забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни "Вступ до теорії ймовірностей" (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2010. — 68 с.

Методичні рекомендації містять пояснювальну записку, питання з декількох розділів "Вступ до теорії ймовірностей", які потребують додаткових пояснень; приклади роз'яснювальних завдань та умови задач, відповіді на них, а також список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Самостійна робота студентів є складовою навчального процесу, важливим чинником, який формує вміння навчатися, сприяє активізації засвоєння студентом знань та придбання необхідних навичок.

Самостійна робота є основним засобом засвоєння навчального матеріалу у позааудиторний час. Значно підвищується значення та статус самостійної роботи при введенні кредитно-модульної технології навчання, за якою скорочується обсяг аудиторної роботи студентів.

Мета самостійної роботи — сприяння засвоєнню в повному обсязі навчальної програми та формуванню самостійності як особистісної якості та важливої професійної сутності, яка полягає в умінні систематизувати, планувати та контролювати власну діяльність.

У пропонованих методичних рекомендаціях розглянуто питання з кількох розділів предмета "Теорія ймовірностей та математична статистика", які потребують окремих пояснень і визначень, оскільки аудиторного часу на це не вистачає.

До кожного питання наведено основні теореми і твердження, приклади розв'язаних задач (відповіді і рішення вміщено у кінці методики), а також варіанти завдань.

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ І ПОЗНАЧЕНЬ:

P (A) — ймовірність події A;
в. в. — випадкова величина;
н. в. в. — незалежна випадкова величина;
н. о. р. в. в. — незалежні однаково розподілені випадкові величини;
$F_\xi(x)$, $F(x)$ — функції розподілу в. в. ξ;
$P_\xi(x)$, $P(x)$ — щільність розподілу в. в. ξ;
м. с. — математичне сподівання;
M_ξ — м. с. в. в. ξ;
D_ξ — дисперсія в. в. ξ;
ЗВЧ — закон великих чисел;
ЦГТ — центральна гранична теорема;
N (a, σ2) — нормальний розподіл *в. в.* з *м. с.* й з дисперсією σ2;
$\hat{\theta}$ — оцінка параметра θ;
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ — вибіркове середнє.

ЗМІСТ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ з дисципліни “ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ”

І. Геометрична ймовірність

Поняття геометричної ймовірності полягає у такому.

Нехай в деякої обмеженої області Ω n — вимірного евклідового простору навмання вибирають точку.

Ймовірність того, що точка буде узята з області $A \subset \Omega$ дорівнює:

$$P\ (A)\ \frac{mes(A)}{mes()}\ ,$$

де mes (A) — лебегова міра. Це може бути, наприклад, довжина, площа, об’єм тощо.

1.1. На відрізку довжини l навмання узяти дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує $k{\cdot}l,\ o<k<1$?

1.2. Яка ймовірність того, що з трьох навмання узятих відрізків довжини не більш l можна побудувати трикутник?

1.3. На відрізку [P, Q] довжиною l вибрані навмання дві точки A і B. Знайти ймовірність того, що точка A буде ближча до точки B, ніж до точки P.

1.4. У коло вписано квадрат. Знайти ймовірність того, що точка кинута у середину кола попаде в середину квадрата.

1.5. Задача Бюффона. На площині проведено дві паралельні прямі, відстань між якими дорівнює 2a. На цю площину навмання кидають голку довжини $2\ l\ (l<a)$. Яка ймовірність того, що голка буде перетинати одну з прямих?

1.6. В середині квадрату з вершинами (0,0), (1,0), (1,1), (0,1) навмання береться точка M (x, y).

Знайти ймовірність такої події:

$A = \{(x, y)$: $max\ (x, y) < a,\ a > o\}$.

1.7. В середині квадрату з вершинами (0,0), (1,0), (1,1), (0,1) навмання береться точка M (x, y).

Знайти ймовірність такої події:

$A = \{(x, y)$: $x^2+y^2 \le a^2,\ a>o\}$.

1.8. У квадрат з вершинами (0,0), (1,0), (1,1), (0,1) навмання кинута точка.

Нехай (ξ, η) — її координати. Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + \xi\, x + \eta = 0$ дійсні.

1.9. В середині відрізка [-1,2] навмання узяти два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більше 1, а добуток менше 1?

1.10. Навмання взято два невід’ємних числа x і y, кожне з яких не більше 2. Знайти ймовірність того, що добуток x·y буде не більше 1, а відношення y/x — не більше 2.

1.11. На площині проведено паралельні прямі, відстань між якими дорівнює 1,5 см і 8 см. На цю площу кидають навмання коло радіуса 2,5 см. Яка ймовірність того, що коло не буде перетинати жодну з ліній?

Приклад розв’язання задачі

Приклад 1. На відрізку довжини l навмання вибирають дві точки.

Яка ймовірність того, що з трьох відрізків, на які ділиться перший відрізок цими точками, можна побудувати трикутник?

Рішення: Нехай x і y — довжини будь-яких відрізків, отриманих діленням відрізку довжини l на три частини.

$\Lambda = \{(x, y)$: $o \le x \le l,\ o \le y \le l,\ o \le x + y \le l\}$.

Трикутник можливо побудувати з отриманих відрізків, якщо вони попадають у область

$$A = \{(x, y): o \le x \le \frac{l}{2},\ o \le y \le \frac{l}{2},\ x + y \ge \frac{l}{2}\}.$$

Площа Λ: mes $\Lambda = \dfrac{l^2}{2}$, (рис.1).

Площа області A: mes A = $\dfrac{l^2}{8}$, (рис.2).

Тому $P(A) = \dfrac{mesA}{mes\Lambda} = \dfrac{l^2 \cdot 2}{8 \cdot l^2} = \dfrac{1}{4}$.

Відповідь: $P(A) = \dfrac{1}{4}$.

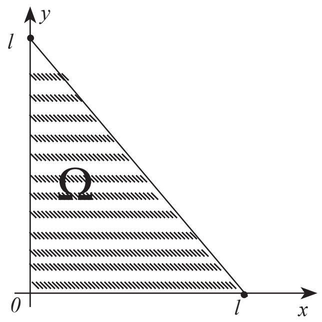


Рис. 1

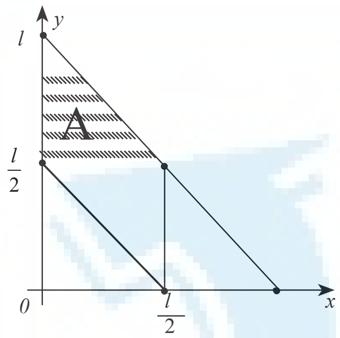


Рис. 2

2. Незалежність подій

Незалежними називають такі події A і B, для яких виконується рівність:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

Випадкові події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються *незалежними* у сукупності, якщо:

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\,P(A_{i_2})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_k})$$

для будь-яких $к = 1,2,\ldots, n$ і

$$1\le i_1 < i_2 < \ldots < i_к \le n.$$

Якщо ця рівність виконується при $к = 2$, то події $A_1, A_2, \ldots A_n$ називаються *попарно незалежними*.

2.1. Довести, що, якщо A і B незалежні, то незалежні A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, $\overline{A}$ і $\overline{B}$

2.2. Події A і B_1, A і B_2 незалежні, причому B_1 і B_2 несумісні.

Довести, що події A і $B_1\cup B_2$ незалежні.

2.3. Якщо події A, B, C незалежні в сукупності, то події A і $B\cup C$, а також A і $B\setminus C$ незалежні.

Довести це.

2.4. Нехай A і B, A і C незалежні і $B\supset C$. Тоді події A і $B\setminus C$ незалежні.

Довести це.

2.5. Послідовно кинуто три монети. Визначити, залежні чи незалежні події:

A = { випав “герб” на першій монеті},
B = { випала хоча б одна “решка”}.

2.6. Кинуто монету на гральну кісточку. Визначити, залежні чи незалежні події:

A = { випав “герб”},
B = { випала парна кількість очок }.

2.7. Кидають дві гральні кісточки. Розглянемо випадковість подій:

A = { на першій кісточці випала парна кількість очок},
B = { на другій кісточці випала непарна кількість очок }.
C = { сума очок на кісточках непарна }.

Довести, що події A, B, C попарно незалежні, але не є незалежними у сукупності.

2.8. Події $A_1, A_2, \ldots A_n$ — незалежні в сукупності і відомо, що $P(A_к) = P_к$

Яка ймовірність того, що:

а) відбудеться хоча б одна з подій A_i, $i=\overline{1,n}$,

б) не відбудеться жодна з подій A_i, $i=\overline{1,n}$,

в) відбудеться одна і тільки одна з подій A_i, $i=\overline{1,n}$?

Приклад розв’язання задачі

Приклад 2.

Умова: Нехай $P(A) > 0$ і $P\left(B/\overline{A}\right) = P\left(B/A\right)$.

Довести, що A і B незалежні.

Рішення: Оскільки $P\left(B/\overline{A}\right) = \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}$,

а $P\left(B/A\right) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$, і $\overline{A}\cap B = B\setminus(A\cap B)$, то

$$P(B\setminus(A\cap B))\cdot P(A) = P(A\cap B)\cdot(1 - P(A)),$$

тобто $P(A)\cdot P(B) - P(A\cap B)\cdot P(A) = P(A\cap B) - P(A\cap B)\cdot P(A)$, звідки і випливає, що

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ — а значить A і B незалежні.

Що і треба було довести.

3. Схема Бернуллі

Проводяться незалежні іспити, в кожному з яких можливі два результати:

успіх — з ймовірністю p, або невдача — з ймовірністю q = 1- p.

Якщо μ_n — кількість успіхів в n незалежних іспитах Бернуллі, то

$$P_n(m) = P\{\mu_n = m\} = C_n^m P^m q^{n-m}, \; m = 0,1,..., n.$$

Цей вираз називають *теоремою Бернуллі.*

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо $n \to \infty$, p = Const, $0 < p < 1$, то

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ n\ p\ q}} \cdot \exp\{-\frac{x^2}{2}\} \cdot (1+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)), \text{ де } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \quad (1)$$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Якщо $n \to \infty$, p = Const, $0 < p < 1$, то

$$P\{x1 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x_2\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^1}^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2)$$

Рівномірно по x_1, x_2 $(-\infty \le x_1 \le x_2 \le \infty)$.

Теорема Пуассона

Якщо $p = p_n \to 0$ і $np_n \to \lambda$ при $n \to \infty$ $(0 < \lambda < \infty)$, то

$$P_n(m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \; m = 0,1,... \quad (3)$$

Праві частини формул (1), (2) дають добрі наближення, коли n достатньо велика, а p і q не дуже близькі до нуля. Найчастіше нормальним наближенням користуються при n p q > 20.

Формула (3) дає добре наближення, якщо n велике, а p — мале.

Звичайно p < 0,1; n p q ≤ 9.

Таблиці функції Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{і функції} \quad \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

наведені у додатках: табл. 1, табл. 2.

3.1. Нехай m_0 — найімовірніше число успіхів у схемі Бернуллі з ймовірністю успіху p при n іспитах, тобто таке значення m, для якого ймовірність $P_n(m)$ максимальна.

Довести, що $np - q \le m_0 \le np + p$.

3.2. Гральну кісточку кидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що двічі з’явиться число очок, кратне 3.

3.3. Батарея зробила 14 пострілів в об’єкт, ймовірність попасти в який дорівнює 0,2.

Знайти:

а) найімовірніше число попадань та його ймовірність;

б) ймовірність знищення об’єкта, якщо для його знищення потрібно не менше 4 попадань.

3.4. Ймовірність попадання у ціль при кожному пострілі дорівнює 0,8. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб найімовірніше число попадань було 20?

3.5. Двоє кидають монету n разів кожен. Знайти ймовірність того, що в них випаде однакова кількість гербів.

3.6. Ймовірність попадання у ціль при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайти ймовірність попадання у ціль двох і більш куль, якщо число пострілів дорівнює 5000.

3.7. Через канал зв’язку передається 1000 знаків. Кожен знак може бути викривлений незалежно від останніх з ймовірністю 0,004. Знайти ймовірність того, що буде викривлено не більш 3 знаків.

3.8. Ймовірність успіху у кожному іспиті дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що за 300 іспитах успіх настане

а) рівно 75 разів;

б) рівно 85 разів?

3.9. Ймовірність бракованого виробу дорівнює 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10000 узятих наугад виробів бракованих буде не більше 60?

3.10. Ймовірність виходу з ладу за термін τ одного з приладів дорівнює 0,1.

Визначити ймовірність того, що за термін τ з 100 приладів вийдуть з ладу:

а) не менше 20;

б) не менше 15;

в) від 6 до 18 приладів.

Приклад розв'язання задач

Приклад 3.

Ймовірність випуску бракованого виробу дорівнює 0,02.

Чому дорівнює ймовірність того, що у партії з 100 виробів бракованих буде не більше 3?

Рішення: Розв'язання:

Скористаємося теоремою Пуассона.

У даному прикладі n = 100,

$p = 0{,}02$, $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}02 = 2$.

Шукана ймовірність дорівнює

$$P\{\mu_n \le 3\} = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + P_n(3) \approx e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4e^{-2}}{2!} + \frac{8e^{-2}}{3!}$$

$\approx 0{,}8571$.

Приклад 4.

Монету підкидають 100 разів. Яка ймовірність того, що загальна кількість випадання герба буде у межах від 45 до 55?

Рішення:

За умови задачі $n = 100$, $p = q = 0{,}5$, $npq = 25$, $np = 50$.

Скористаємось інтегральною теоремою Муавра-Лапласа.

Тоді

$$P\{45 < \mu_n < 55\} = p\left\{\frac{45-50}{\sqrt{25}} < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{55-50}{\sqrt{25}}\right\} \approx 2\phi(1) = 0{,}6826.$$

4. Коефіцієнт кореляції

Сумісна функція розподілу в. в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ — це функція $F(x_1,\dots,x_n) = \{\xi_1 < x_1,\dots,\xi_n < x_n\}$ для будь-яких дійсних $x_1,\dots,x_n$.

Якщо в. в. ξ і η приймають дискретну множину значень $x_1, x_2,\dots, x_n$ і $y_1, y_2,\dots, y_n$ відповідно, то *сумісним розподілом* називається набір чисел

$P_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_i\}$, $i = 1,2,\dots, n$; $j = 1,2,\dots, m$

В. в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ — *незалежні*, якщо

$$F(x_1,\dots,x_n) = \prod_{\kappa=1}^{n} F_k(x_\kappa),$$ де

$F_\kappa(x) = P\{\xi_\kappa < x\}$ — функція розподілу ξ_κ, $\kappa = 1,\dots, n$.

Зв'язок між двома в. в. з сумісним розподілом ймовірностей характеризує *коваріація* та *коефіцієнт кореляції.*

Коваріацією в. в. ξ і η називають $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta)$.

Коефіцієнт кореляції в. в. ξ та η з дисперсіями D_ξ і D_η знаходять за формулою

$$\rho(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\xi, \eta) / \sqrt{D_\xi} \cdot \sqrt{D_\eta}.$$

Якщо $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$ або $\rho(\xi, \eta) = 0$ то в. в. називають *некорельованими.*

Мають місце такі твердження:

I) $|\rho(\xi,\eta)| \le 1$;

II) Якщо ξ і η незалежні, то $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$ і $\rho(\xi, \eta) = 0$;

III) Якщо $\rho(\xi, \eta)=1$, то з ймовірністю 1 $\eta = a\xi + b$, де a і b – константи.

4.1. Кидають два кубика. Нехай ξ — кількість очок на першому, η — на другому.

Довести, що в. в. ξ і η — незалежні.

4.2. Кидають два кубика. Нехай ξ — кількість очок на першому, η — мінімальне з двох очок.

Знайти: а) сумісний розподіл ξ і η; б) ρ (ξ, η).

4.3. В. в. ξ і η незалежні і $p\{\xi = \pm 1\} = \frac{1}{2}$, а $p\{\eta = \pm 1\} = \frac{1}{4}$, $p\{\eta = 0\} = \frac{1}{2}$. Чи будуть в. в. ξ η і η незалежні? Знайти ρ (ξ η, η).

4.4. Нехай ξ і η — н. о. р. в. в. і $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\eta = \xi_1 - \xi_2$. Довести, що $\rho(\xi, \eta) = 0$.

4.5. Нехай ξ і η — відповідно сума та різниця очок, які виникли при киданні двох кубиків. Довести, що $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Чи будуть ξ і η незалежними?

4.6. В. в. ξ має рівномірний розподіл на відрізку [-a, a], знайти коефіцієнти кореляції між:

а) ξ і ξ_2; б) ξ і ξ_3

4.7. В. в. ξ і η незалежні і мають однаковий розподіл, $M\xi = M\eta = a$, $D\xi = D\eta = \sigma^2$

Знайти $\rho(\xi_1, \xi_2)$, де $\xi_1 = \acute{\alpha}\xi + \beta\eta$, $\xi2 = \acute{\alpha}\xi - \beta\eta$.

4.8. Нехай ξ, η і ζ — попарно некорельовані в. в. Чи можна стверджувати, що некерельованими будуть в. в.: а)ξ і $\zeta + \eta$; б) ξ і $\zeta\,\eta$?

Приклад розв'язання задачі

Приклад 5.

Нехай ξ приймає значення ± 1, ± 2, кожне з ймовірністю $\frac{1}{4}$, а $\eta = \xi^2$.

Знайти: а) сумісний розподіл ξ та η; б) $\rho(\xi, \eta)$. Чи будуть ξ і η незалежними?

Рішення:

В. в η буде приймати два значення 1 і 4 з рівними ймовірностями $\frac{1}{2}$. Знайдемо сумісний розподіл ξ і η:

$$P\{\xi = 1,\ \eta = 1\} = P\{\xi = -1,\ \eta = 1\} = \frac{1}{4};$$

$$P\{\xi = 2,\ \eta = 1\} = P\{\xi = -2,\ \eta = 1\} = 0;$$

$$P\{\xi = 1,\ \eta = 4\} = P\{\xi = -1,\ \eta = 4\} = 0;$$

$$P\{\xi = 2,\ \eta = 4\} = P\{\xi = -2,\ \eta = 4\} = \frac{1}{4};$$

В. в. ξ і η будуть незалежними, тому що

$$0 = \rho\{\xi = 1,\ \eta = 4\} \neq p\{\xi = 1\}\ \ p\{\eta = 4\} = \frac{1}{8};$$

$$M\xi = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} - 1\cdot\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{4} = 0;\ \ M\eta = 1\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$D\xi = \frac{5}{2},\ \ D\eta = \frac{25}{4};\ \ \mathrm{cov}(\xi_1\eta) = 1\ \ (1 - \frac{5}{2})\cdot\frac{1}{4} - 1\ \ (1 - \frac{5}{2})\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot(4 - \frac{5}{2})\cdot\frac{1}{4}$$

$$-2\ \ (4 - \frac{5}{2})\cdot\frac{1}{4} = 0$$

Отже, $\rho(\xi, \eta) = 0$.

5. Згортка функцій розподілу

Нехай ξ_1 і ξ_2 — н. в. в. з функціями розподілу $F_{\xi_1}(x)$ і $F_{\xi_2}(x)$ відповідно.

Функцією розподілу їх суми $\eta = \xi_1 + \xi_2$ є згортка $F_{\xi_1}(x)$ і $F_{\xi_2}(x)$, тобто $P\{\eta < x\} = F_{\xi_1} * F_{\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_1}\ F_{\xi_2}(x-u)\,dF_{\xi_2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(x-u)\,dF_{\xi_1}(u)$.

Якщо б хоча одна з в. в. ξ_1 або ξ_2 має щільність, то η має щільність розподілу

$$P_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(x-u)\,dF_{\xi_2}(u) \text{ або } \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_2}(x-u)\,dF_{\xi_1}(u).$$

Якщо ξ_1 і ξ_2 мають щільності розподілу, то

$$P_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(x-u)\,P_{\xi_2}(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_2}(x-u)\,P_{\xi_1}(u)\,du.$$

Для цілочисельних випадкових величин:

$$P\{\xi_1 + \xi_2 = n\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P1(m)\ P2(n-m),\ P_i(m) = P\{\xi i = m\},\ i = 1, 2.$$

5.1. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н. в. в., рівномірно розподілені на [-1, 1]. Знайти функцію розподілу в. в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

5.2. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н. о. р. в. в. з щільністю розподілу

$$p(x) = \frac{1}{2}\exp\{-|\boldsymbol{x}|\}.$$

Знайти щільність розподілу $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

5.3. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н. в. в., які приймають значення 0,1,..., n, причому $P\{\xi_1 = i\} = P\{\xi_2 = i\} = \frac{1}{n+1}$, i = 0,1,..., n.

Знайти розподіл в. в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

5.4. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н. в. в., які мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2.

Довести, що в. в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

5.5. В. в. ξ_1 і ξ_2 незалежні і мають нормальні розподіли $N(a_1, \sigma_1^2)$ і $N(a_2, \sigma_2^2)$.

Довести, що в. в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$ має нормальний розподіл $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

5.6. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — н. о. р. в. в., які мають показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$.

Довести, що в. в. $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ має щільність розподілу

$$P_{S_n}(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\ e^{-\lambda x}, x \ge 0,\ \ P_{S_n}(x) = 0, x < 0 \text{ (розподіл Ерланга).}$$

5.7. Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. в. в., які мають нормальний розподіл N (0,1).

Довести, що щільність в. в.

$\chi_n^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2$ має вигляд

$$P_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$ (розподіл χ^2 з n степенями вільності)

5.8. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — н. о. р. в. в., які мають нормальний розподіл N(0,1). Довести, що щільність розподілу в. в.

$$t = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}$$ має вигляд: $P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{nx}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma\frac{n}{2}} (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{(n+1)}{2}}$,

(розподіл Стьюдента з n степенями вільності)

В задачах 5.7, 5.8

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx.$$

5.9. Знайти щільність розподілу суми $\xi_1+\xi_2$, якщо ξ_1 і ξ_2 незалежні, ξ_1 має нормальний розподіл на [0,1], а ξ_2 — рівномірний розподіл на [0,2].

5.10. Знайти щільність розподілу суми н. в. в. ξ_1 і ξ_2, якщо ξ_1 має рівномірний розподіл на [-1,1], а ξ_2 має показників розподіл з параметром λ.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 6. В. в. ξ_1 і ξ_2 незалежні і рівномірно розподілені на відрізку [0,1]. Знайти функцію розподілу в. в. $\eta = \xi_1+\xi_2$.

Рішення. Функція розподілу в. в. ξ_1 і ξ_2 має вигляд:

$$F_{\xi_1}(x) = F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0<x\leq 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Зазначим, що при $x < 0$, $F_\eta(x) = 0$, і при $x > 2$ $F_\eta(x) = 1$,

Якщо $0 \leq x \leq 1$, то

$$F_\eta(x) = \int_0^x (x-u)du = \frac{x^2}{2},$$ а при $1 < x \leq 2$.

$$F_\eta(x) = \int_0^{x-1} du + \int_{x-1}^{1}(x-u)du = 1 - \frac{(2-x)^2}{2}$$

6. Твірні функції

Твірною функцією в. в ξ, яка приймає цілі невід'ємні значення, називається функція комплексної змінної:

$$P(Z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} Z^\kappa p\{\xi=\kappa\}, |z| \leq 1, \text{ тобто } P(z) = Mz^\xi.$$

Якщо твірна функція відома, то розподіл знаходять за допомогою формули:

$$P_\kappa = P\{\xi=\kappa\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{P(z)}{Z^{\kappa+1}}dz, \text{ або } P_\kappa = \frac{1}{\kappa!}P^{(\kappa)}(0).$$

Таким чином, відображення

$\{P_\kappa\} \to P(z)$, $(z) \leq 1$, є взаємно однозначним.

Якщо $\xi_1, ..., \xi_n$ — н. в. в., які приймають цілі невід'ємні значення;

$P_1(z), ..., P_n(z)$ — відповідні твірні функції, а $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, тоді твірна функція в. в. Sn дорівнює $P(z) = P_1(z) \cdot ... \cdot P_n(z)$.

6.1. Знайти твірну функцію:

а) в. в. ξ, яка має геометричний розподіл, тобто

$P\{\xi=\kappa\} = q^\kappa p$, $\kappa = 0,1,...$; $q + p = 1$;

б) в. в. ξ, яка має розподіл Пуассона з параметром λ,

$P\{\xi=\kappa\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}$, $\kappa = 0, 1, ...$; $\lambda > 0$.

6.2. Знайти розподіли, яким відповідають наступні твірні функції:

а) $\frac{1}{3}(1+z+z^2)$;

б) $(1+\frac{1-z}{z}\ln(1-z))$,

в) $\frac{1-Z^{N+1}}{(N+1)(1-Z)}$.

6.3. Довести, що сума двох н. в. в., які мають розподіл Пуассона, також має розподіл Пуассона. Чи справедливе таке твердження для біноміального, геометричного розподілів?

6.4. Нехай в. в. ξ і η приймає цілі невід'ємні значення і

$$P\{\xi = n, \eta = \kappa\} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} C_n^{\kappa} (1-p)^{n-\kappa}, & \text{при } n \ge \kappa \ge 0 \\ 0, \ \ при \ \ \kappa > n, & \end{cases}$$

де $\lambda > 0$, $0 \le p \le 1$,

Знайти сумісну твірну функцію в. в. ξ і η, тобто

$P(Z_1, Z_2) = M\, Z_1^{\xi} \cdot Z_2^{\eta}$, $|Z_1| \le 1$, $|Z_2| \le 1$ і $\rho(\xi, \eta)$.

6.5. Нехай ξ і η — н. в. в., які приймають цілі невід'ємні значення з твірними функціями $P_1(z)$ і $P_2(z)$.

Знайти сумісну твірну функцію в. в. ξ і $\gamma = \xi + \eta$.

6.6. Нехай P_n — ймовірність того, що число появи події A у n іспитах ділиться на 3, а f_n — ймовірність того, що число появи події A в n іспитах при діленні на 3 дає залишок 1.

Вивести для Pn і fn систему рекурентних відношень та використовуючи її, знайти твірні функції для послідовностей P_n і f_n, $n = 0,1,...$.

Ймовірність появи події А в одному іспиті дорівнює q.

6.7. Нехай ξ і η — в. в.,

$P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 1\} = \dfrac{1}{2}$,

$P\{\eta = 0\} = P\{\eta = 3\} = \dfrac{1}{8}$,

$P\{\eta = 1\} = \dfrac{1}{4}$; $P\{\eta = 2\} = \dfrac{1}{2}$.

Довести, що не існує в. в. ζ, незалежної від ξ і такої, що $\xi + \zeta = \eta$.

6.8. Нехай ξ і η — в. в.,

$p\{\xi = 0\} = p\{\xi = 2\} = \dfrac{1}{4}$,

$p\{\xi = 1\} = \dfrac{1}{2}$;

$p\{\eta = 0\} = p\{\eta = 1\} = p\{\eta = 2\} = \dfrac{3}{10}$,

$p\{\eta = 3\} = \dfrac{1}{10}$.

Довести, що не існує в. в. ζ, незалежної від ξ і такої, що $\xi + \zeta = \eta$.

Приклад розв'язання задач

Приклад 7.

Знайти твірну функцію біноміального розподілу з параметрами n і p, тобто

$$P\{\xi = \kappa\} = C_n^{\kappa} p^{\kappa} q^{n-k}, \ \kappa = 0,1,..., n; \ q = 1 - p.$$

Рішення:

$$P(z) = \sum_{\kappa=0}^{n} z^{\kappa} C_n^{\kappa} p^{\kappa} q^{n-k} = (pz+q)^n.$$

Приклад 8.

Нехай p_n — ймовірність того, що число появи події A у n іспитах парне.

Вивести для pn рекурентне співвідношення та знайти твірну функцію для послідовності p_n. Ймовірність появи події A в одному іспиті дорівнює q.

Рішення:

$$P_n = P_{n-1}(1 - q) + q(1 - P_{n-1}), \ n \ge 1, \ P_0 = 1.$$

Позначим $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n p_n$.

Тоді $P(z) - 1 = (1 - q)\, z\, p(z) + \dfrac{q \cdot z}{1-z} - q \cdot z \cdot p(z)$, і звідки

$$P(z) = \frac{1 - z\ (1-q)}{(1-z)\ (1 - z\ (1-2q))}.$$

7. Характеристичні функції

Характеристичною функцією в. в. ξ називається функція:

$$\varphi(t) = M e^{\,i t \xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x), \quad -\infty < t < \infty$$

Характеристична функція будь-якої в. в. має наступні властивості:

1) $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| \le 1$, *для всіх* t;

2) $\varphi(t)$ рівномірно неперервна на $(-\infty, +\infty)$;

3) $\varphi(t)$ невід'ємно визначена, тобто для будь-яких комплексних чисел $Z_1,...,Z_n$ та будь яких дійсних чисел $t_1,...., t_n$, $n \ge 1$

$$\sum_{k,j=1}^{n} z_k \overline{z}_j \varphi(t_k - t_j) \geq 0;$$

4) характеристична функція суми н. в. в. дорівнює добутку характеристичних функцій.

Теорема Бохнера-Хінчіна

Для того, щоб φ(t) була характеристичною функцією деякої в. в., необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною, невід'ємно визначеною і φ(0) = 1.

Теорема Пойа

Якщо φ(t) — неперервна, парна, опукла вниз функція і така, що: j (t) ≥ 0, φ(t) = 1, $\lim\limits_{t\to\infty}$ φ (t) = 0, то φ (t) — характеристична функція.

Теорема Марцинкевича

Якщо характеристична функція має вигляд $exp\{P(t)\}$, де $P(t)$ — поліном, то степінь полінома не може бути більше двох.

Формула обернення:

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t)dt\ ,$$

x_1, x_2 — точки неперервності.

Теорема неперервності

Послідовність функцій розподілу $\{F_n(x)\}$, n = 1,2... слабо збігається до деякої функції розподілу F(x) (тобто збіжність у точках неперервності F(x)) тоді і тільки тоді, коли відповідна послідовність характеристичних функцій $\{\varphi_n(t)\}$ збігається до неперервної у нулі функції φ (t). При цьому $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$ та збіжність φ n(t) до φ (t) рівномірна на кожному кінцевому інтервалі.

7.1. Знайти характеристичну функцію:

а) в. в. ξ, яка має розподіл Пуассона з параметром λ;
б) в. в. ξ, яка має біноміальний розподіл з параметром n і p;
в) в. в. ξ, яка має геометричний розподіл з параметром p.

7.2. Знайти характеристичну функцію в. в. ξ, яка має:

а) рівномірний розподіл на відрізку [a, b],

$$P_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \end{cases};$$

б) показників розподіл з параметром λ,

$$P_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases};$$

в) двохсторонній показників розподіл,

$$P_\xi(x) = \frac{1}{2}\exp\{-|x|\};$$

г) розподіл Коші,

$$P_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + x^2}, a > 0.$$

7.3. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н. о. р. в. в. з характеристичною функцією φ (t). Знайти характеристичну функцію в. в. $\xi_1 - \xi_2$.

7.4. Знайти розподіли, яким відповідають наступні характеристичні функції:

а) exp {- t^2}; б) $\frac{\sin t}{t}$; в) exp {- $|t|$ } cos t.

7.5. З наведених нижче функцій характеристичними є такі (вказати):

а) *sin t*; б) $\frac{1}{2}(1 + \cos t)$; в) e^{-t^4} ,

г) $cos\ t^2$; д) $\begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$; е) *exp* {2 ($e^{it}$-1)}.

7.6. Використовуючи характеристичні функції, розв'язати задачу 5.4.

7.7. Використовуючи характеристичні функції, розв'язати задачу 5.5.

7.8. В. в. ξ розподілена за законом Пуассона з параметром λ.

Знайти $\lim\limits_{\lambda \to \infty} P\left\{\frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right\}$.

7.9. Нехай ξ — в. в., яка має розподіл Коші. Чи існують дві н. в. в. ξ_1 і ξ_2 такі, що $\xi = \xi_1 + \xi_2$ і одна з них має рівномірний розподіл на деякому відрізку?

7.10. Довести, що якщо $\varphi(t)$ — характеристична функція, то і функція $\exp\{\varphi(t) - 1\}$ теж є характеристичною.

Приклади розв'язання задач

Приклад 9. Знайти характеристичну функцію нормального розподілу $N(a, \sigma^2)$.

Рішення: $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\ \{itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\}dx$;

Зробимо заміну змінної: $z = \frac{x-a}{\sigma}$, тоді

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\ \{\ ita - \frac{1}{2}(z - it\sigma)^2 - \frac{t^2\sigma^2}{2}\}\ dz = \exp\ \{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}\}.$$

Приклад 10. Довести, що при кожному натуральному n функція $\cos^n(t)$ є характеристичною.

Рішення: Зауважимо, що в. в. ξ, яка приймає два значення — 1 і −1 з ймовірністю $\frac{1}{2}$, має характеристичну функцію:

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t.$$

Нехай тепер $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — п. н. о. р. в. в. кожна з яких приймає значення 1 і −1 з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Тоді характеристична функція в. в.

$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ буде $\varphi_{S_n}(t) = \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_i}(t) = \cos^n(t)$.

8. Закон великих чисел

Нехай $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ послідовність незалежних випадкових величин з кінцевими математичними сподіваннями $a_i = M\xi_i$, $i \geq 1$. Кажуть, що для цієї послідовності виконується закон великих чисел (ЗВЧ), якщо $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \to 0,\ \ n \to \infty$ за ймовірністю, тобто для будь якого

$$\varepsilon > 0\ \lim_{n\to\infty} p\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Теорема Хінчіна

Якщо $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ — п. н. о. р. в. в. з кінцевими м. с., то для неї виконується ЗВЧ.

Теорема Чебишева

Якщо $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ — п. н. в. в. таких, що $D\xi_k \leq C$, $к \geq 1$, то для неї виконується ЗВЧ.

Теорема Маркова

Якщо $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ — п. в. в. таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\ (\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k) = 0$, то для неї виконується ЗВЧ.

Висновок теореми Маркова

Якщо $\{\xi_n, n\geq 1\}$ — п. н. в. в. таких, що $M\xi_n^2 < \infty,\ \ n \geq 1\ \ i\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}D\xi_n = 0$, то для неї виконується ЗВЧ.

8.1. Встановити, чи будуть виконані достатні умови застосування ЗВЧ для послідовності н. в. в. з розподілами:

а) $P\{\xi_n = \pm 2^n\} = 2^{-(2n+1)}$, $\quad P\{\xi_n = 0\} = 1 - 2^{-2n}$;

б) $P\{\xi_n = \pm\sqrt{n}\} = \frac{1}{2n}$, $\quad P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}$;

в) $P\{\xi_n = \pm n\} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $\quad P\{\xi_n = 0\} = 1 - \sqrt{n}$;

г) $P\{\xi_n = \xi\, n\} = \dfrac{1}{2n^2}$, $P\{\xi n = 0\} = 1 - \dfrac{1}{n^2}$;

д) $P\{\xi_n = \xi\, n\} = \dfrac{1}{4}$, $P\{\xi n = 0\} = \dfrac{1}{2}$;

е) $P\{\xi_n = \pm\, n\} = 2^{-n}$, $P\{\xi n = 0\} = 1 - 2^{-n+1}$;

д) $P\{\xi_n = \pm\sqrt{\ln\ n}\} = \dfrac{1}{2}$.

8.2. При яких значеннях α для послідовності н. в. в. $\xi_1, \xi_2,\ldots$, таких, що $P\{\xi_n = \pm\, n^\alpha\} = \dfrac{1}{2}$ справедливий ЗВЧ?

8.3. Нехай $\{\xi_n, n \ge 1\}$ — п. н. о. р. в. в. з $M\xi_n = a$, $D\xi_n = \sigma^2$ і $P\{\xi_n = 0\} = 0$.

Довести, що в. в. $\eta = \dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$ збігається за ймовірністю та знайти границю.

8.4. Нехай $\{\xi_n, n \ge 1\}$ — п. н. о. р. в. в., які мають рівномірний розподіл на відрізку [0,1]. Довести, що $\eta_n = \{e^n \prod\limits_{k=1}^{n} \xi_k\}^{1/n} \to 1, \quad n \to \infty$ за ймовірністю.

8.5. Нехай $\{\xi_n, n\ge1\}$ — п. н. о. р. в. в., які мають показниковий розподіл з параметром 1. Довести, що випадкова величина $\eta_n = \{\prod\limits_{k=1}^{n} \xi_k\}^{1/n}$ збігається за ймовірністю, і знайти границю.

8.6. Для дійсної неперервної на [0,1] функції знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n .$$

8.7. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \exp\{-(x_1 + \ldots + x_n)\frac{m}{n} dx_1 \ldots dx_n .$$

8.8. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sin^{2m} \frac{\pi}{2n}(x_1 + \ldots + x_n) dx_1 \ldots dx_n .$$

8.9. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \ln \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}\ \ dx_1 \ldots dx_n .$$

Приклад розв'язання задач

Приклад 11.

Нехай $\{\xi_n, n \ge 1\}$ — п. н. в. в., причому ξ_n приймає значення 2^n і 2^{-n} з ймовірністю $\dfrac{1}{2}$. Чи виконується для цієї послідовності ЗВЧ?

Рішення:

Обчислимо м. с. і дисперсію в. в. ξ_n.

Маємо $M\xi_n = 0$; $D\xi_n = 2^{2n} \cdot \dfrac{1}{2} + 2^{2n} \cdot \dfrac{1}{2} = 4^n$.

Теореми Чебишева і Маркова для цієї послідовності в. в. не можуть бути застосовані.

Оцінимо ймовірність

$$P\{\frac{|\xi_1 + \ldots + \xi_n|}{n} > \varepsilon\} \ge P\{\frac{|\xi_1 + \ldots + \xi_n|}{n} > \frac{\varepsilon}{\xi_{n-1}} 2^{n-1}, \xi_n = 2^n\} \times$$

$$\times P\{\xi_{n-1} = 2^{n-1}, \xi_n = 2^n\} = \frac{1}{4} P\{\frac{|\xi_1 + \ldots + \xi_{n-2} + 2^{n-1} + 2^n|}{n} > \varepsilon\} \to \frac{1}{4} \quad при \quad n \to \infty.$$

Отже, ЗВЧ не виконується для заданої послідовності.

9. Центральна гранична теорема

Нехай $\{\xi_n, n \ge 1\}$ — п. н. в. в. Позначим $a_к = M\xi_к$, $\sigma_к^{\ 2} = D\xi_к$, $B_n^{\ 2} = \sum\limits_{\kappa=1}^{n} \sigma_\kappa^{\ 2}$, $F_к(x) = P\{\xi_к < x\}$.

Кажуть, що для послідовності в. в. $\{\xi_n, n \ge 1\}$ виконано:

а) умова Ліндеберга, якщо для $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{\ 2}} \sum_{\kappa=1}^{n} \int\limits_{|x - a_к| > \varepsilon Bn} (x - a_\kappa)^2 dF_\kappa(x) = 0 ;$$

б) умова Ляпунова, якщо для деякого δ > 0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\sigma}} \sum_{\kappa=1}^{n} M\left|\xi_\kappa - a_\kappa\right|^{2+\delta} = 0 .$$

Теорема. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п. н. в. в. з кінцевими дисперсіями.
Якщо для цієї послідовності виконується умова Ліндеберга, то

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{1}{B_n}\sum_{\kappa=1}^{n} (\xi_k - a_k) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} 2t = \Phi^*(x) \qquad \text{(ЦГТ)}$$

Якщо послідовність $\{\xi_n, n\geq1\}$ задовольняє умові рівномірної малості, тобто для $\forall\varepsilon > 0$

$\max_{1\leq\kappa\leq n} P\{\frac{1}{B_n}\left|\xi_\kappa - a_\kappa\right| > \varepsilon\} \to 0, n\to\infty$, та виконується ЦГТ, то виконується умова Ліндеберга.

Наслідок 1. Для послідовності н. о. р. в. в. з кінцевим другим моментом виконується ЦГТ.

Наслідок 2. Якщо для послідовності $\{\xi_n, n \geq 1\}$ виконується умова Ляпунова, то справедлива ЦГТ.

9.1. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п. н. в. в. таких, що ξ_n має рівномірний розподіл на $[a_{n-1}, a_{n+1}]$, a_1, a_2,..., послідовність дійсних чисел, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A < \infty$, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$.

Знайти $P\left\{0 < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < 1\right\}$.

9.2. При яких значеннях α для п. н. в. в. з задачі 8.2 справедлива ЦГТ?

9.3. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ п. н. о. р. в. в. з нульовим м. с. і кінцевою дисперсією

$$0 < \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{|\xi_1 + ... + \xi_n|}{\sqrt{n}} < a\right\} = b < 1.$$

Знайти $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{|\xi_1 + ... + \xi_n|}{\sqrt{n}} < 2a\right\}$.

9.4. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п. н. в. в. таких, що $M\xi_n = 0$, $P\{\xi_n = \pm 2^n\} = \frac{1}{2}$. Чи справедлива для цієї послідовності ЦГТ?

9.5. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п. н. в. в. таких, що $P\{\xi_n = \pm 1\} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$ і $P\{\xi_n = \pm\sqrt{n}\} = \frac{1}{2n}$. Чи виконується для цієї послідовності ЦГТ?

9.6. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п. н. о. р. в. в. з нульовим м. с. і одиничними дисперсіями. Довести, що випадкові величини

$$\eta_n = \sqrt{n}\ (\xi_1 + ...\xi_n)/(\xi_1^2 + \xi_n^2) \qquad \zeta_n = (\xi_1 + ... + \xi_n)/\sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$$

асимптотично нормальні.

9.7 Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п. н. о. р. в. в., які мають пуассоновський розподіл з параметром λ. Знайти $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_{2i-1} - \xi_{2i})}{\sqrt{n}} < x\right\}$.

Приклад розв'язання задач

Приклад 12.

Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п. н. о. р. в. в. з нульовим м. с. і кінцевими дисперсіями,

$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Знайти $\sigma^2 = D\xi_\kappa$, якщо $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right\} = 0{,}4$.

Рішення:

Для даної послідовності в. в. справедлива ЦГТ; тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}\ \sigma} < x\right\} = \Phi^*(x).$$

Тоді $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}\ \sigma} > x\sigma\right\} = 1 - \Phi^*(x)$.

За допомогою таблиці № 2 Додатка, знаходимо, що $1 - \Phi^*(x) = 0{,}5 - \Phi(x) = 0{,}4$, при $x = 0{,}26$. Таким чином, $\sigma = \frac{1}{x} \approx 3{,}85$ і $\sigma^2 \approx 14{,}82$

10. Вінеровський процес

Випадковий процес $\xi(t)$, $t \geq 0$ називається процесом з незалежними приростами /ПНП/, якщо в. в. $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$,..., $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ незалежні у сукупності для всіх $t_0 < t_1 <...< t_n$.

ПНП $\xi(t)$, $t \geq 0$ називається однорідним, якщо розподіл $\xi(t+s) - \xi(s)$ не залежить від s, $\xi(0) = 0$. (ОПНП).

ОПНП $w(t)$, $t \geq 0$ називається вінеровським, якщо:

1) $w(0) = 0$ з ймовірністю1;

2) $M(w(t+h) - w(t)) = 0$;

3) $M(w(t+h) - w(t))^2 = \sigma^2 h$;

4) $M\left| w(t+h) - w(t) \right|^3 = 0(h)$.

Якщо $\sigma^2 = 1$, то вінеровський процес називається стандартним.

При виконанні умов 1) — 4) для $\forall\, t$ $w(t)$ має нормальний розподіл $N(0, \sigma^2 t)$.

Функція $R(t, s) = M(\xi(t) - M\xi(t))(\xi(s) - M\xi(s))$ називається *кореляційною* функцією випадкового процесу $\xi(t)$.

10.1 Нехай $w(t)$ — вінеровський процес. Знайти сумісну щільність розподілу $w(s)$ і $w(t)$, $0 < s < t < 1$, при умові, що $w(1) = 0$.

10.2. Нехай $w(t)$ — вінеровський процес. Знайти коваріацію $w(s)$ і $w(t)$, $s < t < 1$ за умови, що $w(1) = 0$.

10.3. Нехай $w(t)$ — вінеровський процес. Довести, що $w1(t) = -w(t)$, $w_2(t) = \frac{1}{c} w(tc^2)$, $c = const > 0$, $t > 0$ і $w_3(t) = \begin{cases} tw\left(\frac{1}{t}\right), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ будуть вінеровськими процесами.

10.4. Нехай $w_1(t)$ і $w_2(t)$ — незалежні вінеровські процеси. Довести, що процес $\frac{1}{\sqrt{2}}(w_1(t) + w_2(t))$, $t \geq 0$ — теж вінеровський.

10.5 Нехай $w(t)$ — вінеровський процес; τ — незалежна від нього в. в., яка має показників розподіл з париметром λ. Знайти характеристичну функцію в. в. $w(\tau)$.

10.6. Довести, що якщо $w(t)$ — стандартний вінеровський процес, то $M(w(t) - w(s))^{2n+1} = 0$,

$M(w(t) - w(s))^{2n} = (2n - 1)!!\,(t - s)^n$, $t > s$.

10.7. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $w(t) - tw(1)$, $0 \leq t \leq 1$, де $w(t)$ вінеровський процес.

10.8. Знайти сумісну щільність в. в. $w(t_1), \ldots w(t_n)$, $0 < t_1 < \ldots t_n$.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 13. Знайти кореляційну функцію вінеровського процесу $w(t)$, $t \geq 0$.

Рішення: Оскільки $M\,w(t) = 0$, то $R(t, s) = M\,w(t)\,w(s)$. Нехай $s < t$, тоді $R(t, s) = M \geq (w(t) - w(s))\,w(s) + Mw^2(s) = M(w(t) - w(s))\,Mw(s) + \sigma^2 s = \sigma^2 s$. При цьому скористалися тим, що процес $w(t)$ має незалежні прирісти. Аналогічно при $t \leq s$, $R(t, s) = \sigma^2 t$. Тому $R(t, s) = \sigma^2 \min(t, s)$.

11 Стаціонарні процеси

Випадковий процес $\xi(t)$ називається *стаціонарним у вузькому сенсі*, якщо сумісний розподіл в. в. $\xi(t_1 + \tau), \xi(t_2 + \tau), \ldots, \xi(t_n + \tau)$ не залежить від τ для будь-якого n і довільних $\tau, t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається *стаціонарним у широкому сенсі*, якщо $M\xi(t) = m = const$ і кореляційна функція має вигляд $\overline{M(\xi(t) - m)(\xi}(s) - m) = R(t - s)$.

Теорема Хінчіна

Для того, щоб неперервна функція $R(t)$ була кореляційною функцією стаціонарного у широкому сенсі процесу, необхідно і достатньо, щоб

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

$F(x)$ — обмежена, монотонно неспадна, неперервна зліва функція, яка називається *спектральною функцією*.

Якщо $F(x)$ — абсолютно неперервна, тобто $F(x) \int_{-\infty}^{x} f(u)du$, то функція $f(u)$ називається спектральною щільністю.

$$\text{Якщо } \int_{-\infty}^{\infty} |R(t)|\, dt < \infty, \text{ то } f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} R(t)dt.$$

11.1. Нехай $\Pi(t)$, $t \geq 0$ — пуансонівський процес з параметром λ. Довести, що процес $\xi(t) = \Pi(t + 1) - \Pi(t)$, $t \geq 1$ є стаціонарним у широкому сенсі процесу.

11.2. Нехай $\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k \xi_k(t)$, де $\xi_k(t) = \xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t$, λ_k — сталі, $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$, випадкові величини $\xi_к$ і $\eta_к$ задовольняють наступним умовам: $M \xi_к = M \eta_к = 0$, $D \xi_к = D \eta_к = 1$, $k = 1,2,..., n$ і $M \xi_i \xi_j = M \eta_i \eta_j = 0$, $i \neq j$,

$M \xi_i \eta_i = 0$ при $i, j = 1, 2, ..., n$. Довести, що $\xi(t)$ — стаціонарний у широкому сенсі процес.

11.3. Нехай спектральна щільність стаціонарного у широкому сенсі випадкового процесу дорівнює:

$$f(u) = \begin{cases} a, \text{ якщо } (u) \leq b \\ o, \quad (u) > b. \end{cases}$$

Знайти кореляційну функцію R (t).

11.4. Нехай спектральна щільність стаціонарного у широкому сенсі випадкового процесу дорівнює:

$$f(u) = \begin{cases} o, & \text{якщо } (u) < b \\ c^2, & \text{якщо } в \leq (u) \leq 2b \\ o, & \text{якщо } (u) > 2b \end{cases}$$

Знайти кореляційну функцію R (t).

11.5. Визначити спектральну щільність стаціонарного у широкому сенсі випадкового процесу, якщо кореляційна функція є:

$$R(t) = \begin{cases} \sigma^2(1-|t|), & |t| \leq 1 \\ o, & |t| > 1 \end{cases}.$$

11.6. Визначити спектральну щільність стаціонарного у широкому сенсі випадкового процесу, якщо кореляційна функція його:

$$R(t) = \exp\ \{-\alpha\ |t|\}\ (1+\alpha\ |t|).$$

11.7. Нехай ξ — випадкова величина з функцією розподілу F(x); φ — незалежна від ξ випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на інтервали, (o, 2π). Довести, що випадковий процес $\xi(t) = \exp\ \{i\ (\xi\ t + \varphi\},\ t \geq 0$ — є стаціонарний у широкому сенсі.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 14.

Нехай ξ_1 і ξ_2 — н. о. р. в. в., які приймають значення 1 і –1 з ймовірністю $1/2$.

Довести, що випадковий процес

$\xi(t) = \cos\ \lambda\ t \cdot \xi_1 + \sin\ \lambda\ t \cdot \xi_2$ не є стаціонарним у вулькому сенсі, але є стаціонарним у широкому сенсі.

Рішення

$$M\xi(t) = \cos\lambda t M\xi_1 + \sin\lambda t M\xi_2 = 0$$

$M\xi(t)\xi(s) = M(\xi_1 \cos\lambda t + \xi_2 \sin\lambda t)(\xi_1 \cos\lambda s + \xi_2 \sin\lambda s) = \cos\lambda t \cos\lambda s + \sin\lambda t \sin\lambda s = \cos\lambda(t-s)$, тобто $\xi(t)$ — стаціонарний у широкому сенсі процес.

Далі $P\{\xi(0)=1\} = P\{\xi_1 = 1\} = \frac{1}{2}$, а $P\{\xi(\frac{\pi}{6\lambda}) = 1\} = P\{\xi_1\sqrt{3} + \xi_2 = 2\} = 0$, тобто $\xi(t)$ — не є стаціонарним у вузькому сенсі процесом.

12. Емпірична функція розподілу

Випадковою вибіркою об'єму *n* (або просто вибіркою) називається випадковий вектор $x_1, x_2,...x_n$, де x_i — незалежні і однаково розподілені, $F(x) = P\{x_i < x\},\ i = 1,2,...,n$ іноді кажуть, що вибірка $x_1, x_2,..., x_n$ узята із генеральної сукупності в. в. ξ з функцією розподілу $F(x)$.

Вибірка, розташована у порядку зростання, називається *варіаційним рядом:*

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_n$.

Наприклад:

$$x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}, \qquad x_n = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Якщо вибірка має *r* різних елементів $y_1,..., y_r$, причому елемент y_i зустрічається m_i разів, то $w_i = \frac{m_i}{n}$ називається частотою елемента y_i, і $\sum_{i=1}^{n} m_i = n.$

Статистичним рядом називається послідовність пар (y_i, m_i), а ламана з вершинами(y_i, w_i) — *полігоном* частот вибірки.

Емпіричною функцією розподілу називається функція:

$F_n(x) = \frac{k}{n}$, якщо $x \in (x_{(k)}, x_{(k+1)})$, $k = 0, 1, ..., n$, $x_{(0)} = -\infty$, $x_{(n+1)} = \infty$, або $F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(x_{(k)}<x),\quad I(x_k<x)=\begin{cases}1, \text{якщо } x_{(k)}<x,\\ 0, \text{якщо } x_{(k)}\ge x\end{cases}$

Теорема Глівенко

$$P\{\lim_{n\to\infty}\ \sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x)-F(x)\right|=0\}=1.$$

Теорема Колмогорова

Якщо функція F(x) неперервна, то при будь-якому фіксованому t > 0

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{n}\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x)-F(x)\right|\le t\}=k(t)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j e^{-2j^2\cdot t^2}.$$

Нехай ξ — неперервна в. в. з невідомою щільністю $p(x)$. Для оцінки $p(x)$ за вибіркою $x_1, x_2, ..., x_n$ розіб'ємо область значень ξ на інтервали h_i, $i = 1,..., s$.

x^*_i — середини інтервалів, υ_i — число елементів вибірки, які попали в інтервал h_i. Тоді υ_i/nh_i — оцінка щільності у точці x^*_i. Прямокутники з основами h_i та висотами υ_i/nh_i у прямокутній системі координат називаються *гістограмою вибірки*. Якщо на гістограмі ординати, відповідні до x^*_i, послідовно з'єднати відрізками прямих, то отримана ламана буде ***полігоном частот***.

12.1. Записати вибірку 4, 2, 10, 3, 5, 4, 4, 10, 7, 3, 2, 4, 2, 3, 5, 2 у вигляді:

а) варіаційного ряду; б) статистичного ряду.

12.2. Побудувати полігон частот та *емпіричну* функцію розподілу для вибірки, яка представлена статистичним рядом:

а)

y_i	2	4	7	10
m_i	5	8	10	2

б)

y_i	1	3	5	7
m_i	2	10	8	20

12.3. Знайти емпіричну функцію розподілу для вибірки, яка представлена статистичним рядом:

а)

y_i	2	5	7	8
m_i	1	3	2	8

б)

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	8	17	16	10	6	2	0	1

12.4. Побудувати гістограму вибірки, яка представлена у вигляді таблиці частот.

Інтервали	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Число елементів вибірки, що потратили на інтервал	2	4	8	12	16	10	3

12.5. Побудувати гістограму і полігон частот вибірки, яка представлена у вигляді таблиці частот

$x_i; x_{i+1}$	–3; –2	–2; –1	–1; 0	0; 1	1; 2	2; 3	3; 4	4; 5
m_i	3	10	15	24	25	13	7	3

Приклад розв'язання задач

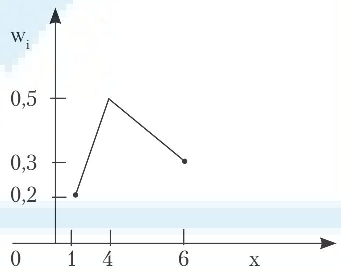
Приклад 15.

Побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу для вибірки, яка представлена статистичним рядом:

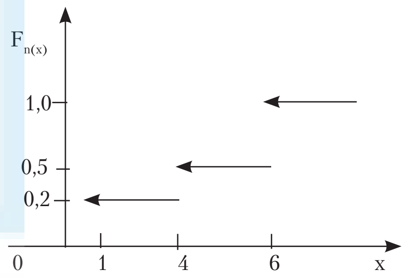
y_i	1	4	6
m_i	10	25	15

Рішення

Полігон частот



Емпірична функція розподілу



13. Метод моментів

Для оцінки невідомих параметрів розподілів часто використовують метод моментів.

Нехай $x_1,..., x_n$ — вибірка з генеральної сукупності в. в. ξ з функцією розподілу $F(x,\theta)$, де $\theta = (\theta_1,...\theta_2)$, $\theta \in \Theta \subseteq R^2$.

Нехай ця в. в. ξ має r моментів $\alpha_k = M\xi^k$, $k = 1, 2,...,r$.

При цьому вони є функціями від незалежних параметрів $\alpha_k = \alpha_k(\theta)$. Метод моментів полягає у тому, що треба прирівняти вибіркові моменти з теоретичними, тобто:

$$\alpha_k(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k = 1, 2,...,r.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно $\theta_1,...,\theta_r$, отримаємо значення оцінок параметрів за методом моментів /*ММ*/. Оцінка $\hat{\theta}_n$ невідомого параметра θ називається *незміщеною*, якщо $M\hat{\theta}_n = \theta$. Якщо $\hat{\theta}_n \to \theta$ при n→∞ за ймовірністю, то оцінка $\hat{\theta}_n$ називається *слушною*. Оцінки, які знайдені за допомогою *ММ*, як правило, слушні, але зміщені.

13.1. Використовуючи *ММ*, знайти за вибіркою $x_1,..., x_n$, де $P\{x_k = m\} = e^{-\lambda} \lambda^m / m!$, $m = 0, 1,...,$ оцінку $\hat{\lambda}_n$ параметра λ. Чи буде ця оцінка незміщена і слушна?

13.2. Нехай $x_1,..., x_n$ — н. о. р. в. в., які мають рівномірний розподіл на відрізку $[-a, a]$. Знайти оцінку параметру a^2 за допомогою *ММ*. Чи буде вона незміщеною і слушною?

13.3. Побудувати за допомогою *ММ* слушні оцінки параметрів a і $в$ за результатами n незалежних спостережень в. в. $x_1,..., x_n$ кожна з яких має нормальний розподіл $N(0,1)$ або $N(a,1)$ з ймовірністю b і $(1-b)$ відповідно, $-\infty < a < \infty$, $0 \le b \le 1$.

13.4. Нехай $x_1,..., x_n$ — н. о. р. в. в. з щільністю розподілу вигляду

$$P\ (x,\theta) = \begin{cases} \kappa(\theta) x e^{-x^2/\theta^2}, & 0 \le x < \infty \\ 0, \quad x < 0, & \theta > 0 \end{cases}.$$

Знайти оцінку параметра θ за ММ. Чи буде вона незмінною і слушною?

13.5. Невід'ємні в. в. $x_1,..., x_n$ взаємно незалежні і мають однакову щільність розподілу

$$P(x) = \frac{\beta^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-x\beta}, \quad x > 0, \quad \beta > 0, \quad m > 0.$$

Знайти оцінки для невідомих параметрів в.β і m за допомогою ММ. Чи будуть ці оцінки слушними? Нехай при $n = 10$, в. в $x_1,..., x_{10}$ прийняли значення:

0,1	0,4	0,5	0,7	0,6	0,1	0,05	0,8	0,15	0,1

Знайти значення оцінок.

13.6. Використавши ММ, знайти за вибіркою $x_1,..., x_n$, де $P\{x_k = m\} = (1-P)^m \cdot P$, $m = 0, 1,...,$ оцінку $\hat{P}_n$ параметра P.

Чи буде ця оцінка слушною? Знайти $M\hat{P}_n^{-1}$, $D\hat{P}_n^{-1}$.

Приклад розв'язання задачі № 16

Використовуючи ММ, знайти за допомогою вибірки $x_1,..., x_n$, де $P\{x_k = m\} = a^m / (a+1)^{m+1}$, $m = 0, 1,...,$ $a > 0$, оцінку $\hat{a}_n$ параметра a.

Чи буде ця оцінка незміщеною та слушною?

Рішення.

Знайдемо м. с. випадкової величини ξ, яка має такий розподіл: $M\xi = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{a^m}{a+1^{m+1}}$. Позначимо $\frac{a}{a+1}$ через P, $P < 1$.

Тоді $\sum_{m=0}^{\infty} P^m = (1-P)^{-1}$.

Оскільки ряд збіжний, продиференціюємо праву та ліву частини рівності за параметром P, отримаємо, що .

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot P^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{a}{a+1}\right)^{m-1} = \frac{1}{(1-P)^2} = (a+1)^2.$$

Отже, М $\xi = a$ і оцінка параметра a матиме вигляд $\hat{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Ця оцінка незміщена, тому що $M\hat{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i$, і слушна відповідно до закону великих чисел.

14. Достатні статистики

Нехай $X = (x_1,..., x_n)$ — вибірка з генеральної сукупності ξ з функцією розподілу $F(x,\theta)$; $P(x,\theta)$ — щільність розподілу ξ.

Функція $L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i\theta)$ є щільністю розподілу випадкового вектора X і називається *функцією правдоподібності.*

У дискретному випадку $P(x,\theta) = P\{\xi = x\}$. Будь-яка функція (яка має міру) від вибірки називається *статистикою.* Статистика $T = T(X)$ називається достатньою для сімейства розподілів $F(x,\theta)$, якщо умовний розподіл випадкового вектора $X = (x_1,..., x_n)$ за умови $T(X) = t$ не залежить від параметра θ, тобто статистика Т має всю інформацію про параметр θ. Очевидно, сама вибірка X завжди є *достатньою* статистикою, але ця статистика тривіальна, тому що не скорочує даних.

Теорема факторизації

Для того, щоб статистика $T(X)$ була достатньою, необхідно і достатньо, щоб $L(x,\theta) = g(T(x),\theta)h(x)$. Достатня статистика називається повною, якщо будь-яка функція від неї з нулевим при усіх θ м. с. сама дорівнює нулеві майже напевно при усіх розподілах $F(x,\theta)$.

14.1. Випадкові величини $(x_1,..., x_n)$ незалежні і однаково рівномірно розподілені на відрізку $[0, \theta]$. Показати, що $x_n = \max x_i$ — повна достатня статистика.

14.2. Нехай $(x_1,..., x_n)$ — н. о. р. в. в. з щільністю

$$P(x,\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, x \ge \theta \\ 0, x < \theta \end{cases}$$

Показати, що $x_{(1)} = \min x_i$ — повна достатня статистика.

14.3. В. в. $x_1,..., x_n$ — н. о. р. і є щільність

$$P(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}, \quad x \ge 0, \quad \theta > 0.$$

Знайти повну достатню статистику і записати щільність її розподілу.

14.4. $x_1,..., x_n$ — н. о. р. в. в. з щільністю

$P(x,\theta) = c\ (\theta)\ \exp\{-\theta x\}, \quad 0 \le x \le \theta$. Яке з наступних тверджень вірно:

а) існує лише тривіальна достатня статистика;

б) вектор $\{\max\ x_i; \sum_{i=1n}^{n} x_i\}$ — достатня статистика;

в) вектор $\{\min\ x_i; \sum_{i=1n}^{n} x_i\}$ — достатня статистика.

г) $\sum_{i=1}^{n} x_i$ — достатня статистика?

14.5. Нехай x1,..., xn — н. в. в., причому

$$P\{x_i = k\} = \frac{\lambda}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0,\ 1,...,\ \lambda > 0.$$

Знайти функцію правдоподібності і повну достатню статистику. Знайти закон розподілу достатньої статистики.

14.6. Нехай $x_1,..., x_n$ — н. о. р. в. в. з щільністю розподілу.

$$P(x,\theta) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+(x-\theta)^2}.$$

Показати, що для них існує тільки тривіальна достатня статистика.

14.7. В. в. ξ має логнормальний розподіл з параметрами (α, σ^2), якщо $\eta = \ln \xi$ має нормальний розподіл $N(\alpha, \sigma^2)$.

1. Знайти щільність розподілу ξ, Mξ, Dξ.

2. Знайти достатню статистику послідовності н. о. р. в. в. $x_1, x_2..., x_n$ — які мають логнормальний розподіл.

14.8. Показати для розподілу Вейбула з щільністю

$P(x,\theta) = \frac{\lambda x^{\lambda-1}}{\theta^\lambda}\cdot e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\lambda}, \quad x \ge 0$ повною достатньою статистикою для θ є $T(x) = \sum_{i=n}^{n} x_i^\lambda$.

Для перевірки повноти достатньої статистики корисним є твердження: якщо $L(x,\theta)=c(\theta)\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(\theta)T_k(x)\right\}$,(*), то статистика $T(x)=\{T_1(x),...,T_m(x)\}$ є повною.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 17. Нехай $x_1,..., x_n$ — н. о. р. в. в. з щільністю

$$P(x,a,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{{-(x-a)^2}\Big/{2\sigma^2}\right\}.$$

Знайти повну достатню статистику для параметрів $\theta=(\alpha,\sigma^2)$.

Рішення:

Функція правдоподібності має вигляд:

$$L(x,a,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\right\}=$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n(\overline{x}-a)^2\right]\right\},$$

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad x=(x_1,...,x_n).$$

Відповідно до теореми факторизації статистика $(\overline{x},\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2)$ є достатньою для $\theta=(\alpha,\sigma^2)$. Звідки також випливає, що при відомому значенні σ^2 достатньою статистикою для параметра a є $\overline{x}$, а при відомому a достатньою статистикою для σ^2 є $\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$ Згідно (*) всі ці статистики є повними.

15. Довірчі інтервали для параметрів біномного, пуассонівського та показникового розподілів

Довірчим називають інтервал, який з заданою довірчою ймовірністю 1-α покриває оцінюваний параметр.

Якщо при n незалежних іспитах деяка подія, ймовірність якої у кожному іспиті дорівнює P, мала місце m разів, то при великих n

$$\hat{P}-\frac{c_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}<P<\hat{P}+\frac{c_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})},$$

де $\hat{P}=\frac{m}{n}$, а c_α — таке значення аргументу функції Лапласа, що $\phi(c_\alpha)=\frac{1-\alpha}{2}$, або $\phi*(c_\alpha)=1-\frac{\alpha}{2}$

$$\phi*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\begin{cases}0,5+\phi(x), x\ge 0\\0,5-\phi(-x), x<0\end{cases}.$$

1-α	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
c_α	1,28	1,64	1,96	2,57	3,29

Довірчий інтервал для параметра λ пуассонівського розподілу при великих n має вигляд

$$\overline{x}-c_\alpha\sqrt{\frac{\overline{x}}{n}}<\lambda<\overline{x}+c_\alpha\sqrt{\frac{\overline{x}}{n}},\quad \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$ — вибірково середнє.

Довірчий інтервал для м. с. λ показникового розподілу зі щільністю

$$P_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{\frac{-x}{\lambda}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

за великого об'єму вибірки ($n>15$) буде

$$\frac{\overline{x}}{1+\frac{c_\alpha}{\sqrt{n}}}<\lambda<\frac{\overline{x}}{1-\frac{c_\alpha}{\sqrt{n}}}$$

При $n\le 15$ довірчий інтервал для м. с. показникового розподілу визначається виразом $\upsilon_1\overline{x}<\lambda<\upsilon_a\overline{x}$ де $\upsilon_1=\frac{2n}{\chi_1^2}$, $\upsilon_2=\frac{2n}{\chi_2^2}$

Значення χ_1^2 і χ_2^2 вибираються з таблиці додатка для χ^2 розподілу з кількістю степенів вільності $\kappa=2n$ наступним чином:

$$P\left\{\chi^2<\chi_2^2\right\}=\frac{\alpha}{2};\qquad P\left\{\chi^2>\chi_1^2\right\}=\frac{\alpha}{2}$$

15.1. При проведенні 30 незалежних іспитів відмова спостерігалася 8 разів. Визначіть довірчий інтервал для ймовірності відмови за довірчої ймовірності 0,95, якщо число відмов має біноміальний закон розподілу.

15.2. Проведено 100 незалежних іспитів, у результаті яких подія А спостерігалася 40 разів. Визначити довірчий інтервал для ймовірності появи події А при довірчих ймовірностях 0,95 і 0,99, якщо число появи події А має біноміальний розподіл.

15.3. На телефонній станції спостерігали за кількістю неправильних з'єднань за хвилину. Спостереження впродовж години дали такі результати:

xi	0	1	2	3	4	5	6	7
mi	8	17	16	10	6	2	0	1

Нехай кількість неправильних з'єднань за хвилину має пуассонівський розподіл з параметром λ, знайти довірчий інтервал для параметра λ при довірчій ймовірності 0,99.

15.4. Через рівні проміжки часу реєстрували кількість розладів апаратури. Отримали результати:

Кількість розладів x_i	0	1	2	4
m_i	109	65	22	1

Покладаючи, що число відмов апаратури має розподіл Пуассона, знайти довірчий інтервал для параметра λ за довірчої ймовірності 0,95.

15.5. При іспитах 10 однотипових приладів реєструється — вихід з ладу кожного них. Результати спостережень:

№ приладу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i, час	200	350	600	450	400	400	500	350	450	550

Знайти оцінку математичного сподівання часу безвідмовної роботи та довірчий інтервал для м. с. λ за довірчої ймовірності 0,9, якщо час безвідмовної роботи приладу має показників розподіл.

15.7. Умова задачі аналогічна 15.5., тільки кількість приладів 8 і результати спостережень такі:

№ приладу	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i, час	100	150	400	250	520	680	1500	1200

Довірча ймовірність 0,8.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 18. Нехай випадкові інтервали між послідовними відмовами апаратури однаково показниково розподілені з м. с. λ. Для визначення параметра λ спостерігалося 25 відмов, а загальний термін безвідмовної роботи з початку іспитів до останньої відмови дорівнює $\sum_{i=1}^{25} x_i = 1500$ *час*. Визначити межі довірчого інтервалу для λ за довірчої властивості 0,8.

Рішення. Знайдемо довірчий інтервал за допомогою функції Лапласа.

За умови задачі $\bar{x} = \dfrac{1500}{25} = 60$, далі при 1 — α = 0,8, $c_\alpha = 1{,}28$.

$$\frac{60}{1+\dfrac{1{,}28}{5}} < \lambda < \frac{60}{1-\dfrac{1{,}28}{5}},$$ тобто 47,8 < λ < 80,6.

16. Критерій Колмогорова-Смірнова і χ^2 для перевірки однорідності та незалежності двох вибірок

Для перевірки гіпотези H_0 про належність двох вибірок об'єму *n* і *m* однієї генеральної сукупності використовується критерій Колмогорова-Смірнова. За міру відмінності береться величина $\lambda_q = \sqrt{\dfrac{nm}{n+m}} \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \left| F_n^{(1)}(x) - F_m^{(2)}(x) \right|$, де $F_n^{(1)}(x)$ *і* $F_m^{(2)}(x)$ — емпіричні функції розподілу для першої та другої вибірок. З таблиці розподілу Колмогорова за завданим рівнем значущості α знайдемо критичне значення λ_α, тобто $\alpha = 1 - k(\lambda_\alpha)$ (див. 12). Наведемо значення λ_α за різних α:

α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	1,079	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

Якщо $\lambda_q > \lambda_\alpha$, то гіпотеза H_0 відхиляється. Для застосування критерію Колмогорова-Смірнова необхідно виконати умови неперервності невірної функції розподілу. Для перевірки однорідності даних, які мають дискретну структуру, використовують критерій χ^2. Крім того, за допомогою цього методу можна аналізувати водночас будь-яку кількість вибірок. Нехай проведено *к* серій незалежних спостережень, які складаються з $n_1, \ldots, n_к$ спостережень.

При цьому у кожному іспиті спостерігалася ознака, яка набувала одне з l різних значень, υ_{ij} — кількість появ i-го значення в j — серії, $n_j=\sum_{i=1}^{l}\upsilon_{ij}$, $n = n_1,\dots, n_к$ — загальна кількість спостережень. Потрібно перевірити гіпотезу H_0 про те, що всі спостереження проводилися з однією і тією випадковою величиною.

Мірою відмінності критерію є величина

$$\chi_q^2=n\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k}\left(\upsilon_{ij}-\frac{\upsilon_{i0}n_j}{n}\right)^2\Big/\upsilon_{i0}n_j, \qquad \upsilon_{i0}=\sum_{j=1}^{k}\upsilon_{ij}.$$

В таблиці χ^2 — розподілу (табл. 3 Додатку) за заданим рівнем значущості α та за числом степенів вільності $m =(l - 1)(к - 1)$. Знаходимо число $\chi^2_{1-\alpha;\ (l-1)(к-1)}$, тобто $P\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha;\ (l-1)(к-1)}\} = 1-\alpha$, якщо $\chi^2_q > \chi^2_{1-\alpha;\ (l-1)(к-1)}$, то гіпотеза H_0 відхиляється, а в протилежному випадку — приймається. Критерій χ^2 дозволяє перевірити гіпотезу H_0 про незалежність двох в. в. ξ і η. Мірою відмінності критерію є величина

$\chi_q^2=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k}\frac{(\upsilon_{ij}-m_{ij})^2}{m_{ij}}$, де υ_{ij} — кількість випадків коли водночас спостерігалися $\xi = \chi_i$, $\eta = y_j$ (для неперервних в. в. i і j — номери відповідних інтервалів).

$m_{ij}=\upsilon_{0i}\upsilon_{0j}\big/n$, $\upsilon_{0j}=\sum_{i=1}^{l}\upsilon_{ij}$, $\upsilon_{i0}=\sum_{j=1}^{k}\upsilon_{ij}$, l і $к$ кількість значень, які приймали в. в.ξ і η, $n=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_{ij}$ — об'єм вибірки.

Вибір табличного значення $\chi^2_{1-\alpha;\ (l-1)(к-1)}$ і прийняття рішення проводяться аналогічно описаному вище для критерію χ^2 щодо перевірки однорідності двох вибірок.

Рівень значущості розглянутих критеріїв — це ймовірність помилкового відхилення гіпотези H_0, якщо вона правильна.

16.1. Із продукції двох станків беруть дві вибірки по 38 виробів.

Розмір виробу	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56
$m_i^{(1)}$	2	1	2	2	1	1	4	1	1	0	5	0	0	6	4	3	5
$m_i^{(2)}$	2	0	0	2	3	0	1	6	0	5	2	3	1	5	3	3	2

Використовуючи критерій Колмогорова-Смірнова, перевірте гіпотезу про те, що вибірки належать до однієї і тієї ж генеральної сукупності при рівні значущості α = 0,1.

16.2. У першому потоці з 300 студентів оцінку "2" отримали 33, "3" — 43, "4" — 80, "5" — 144, а у другому потоці інші 300 студентів мали: "2" — 39, "3" — 35, "4" — 72, "5" — 154. Чи можна вважати обидва потоки однорідними при рівні значущості 0,05?

16.3. Вісім незалежних вимірювань в першій лабораторії дали результати: 0,869; 0,874; 0,867; 0,875 0,870; 0,869; 0,864; 0,872. Десять вимірювань в другій лабораторії отримано: 0,865; 0,870; 0,866; 0,871; 0,870; 0,868; 0,871; 0,870; 0,869; 0,874. Перевірити гіпотезу про однорідність цих вибірок, використовуючи критерій Колмогорова-Смірнова, α = 0,01.

16.4. Двохвимірна в. в. (ξ, η) може мати чотири значення: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). У 180 незалежних спостереженнях — значення (0,0) з'явилося 39 разів; (0,1) — 50; (1,0) — 53; (1,1) — 38.

Чи можна вважати що ξ і η незалежні? α = 0,1.

16.5. Серед 300 чоловік, які вступили до вищого навчального закладу, 97 мали оцінку "5" у школі; з них 48 отримали "5" і на вступних іспитах, до того ж, 18 чоловік мали "5" і в школі, і на вступних іспитах. Перевірити гіпотезу про незалежність оцінок "5" у школі і на іспитах. α = 0,1.

16.6. Проведено 200 спостережень над випадковими величинами ξ і η, які набувають значення 1,2 і 1,2,3 відповідно. Результати наведено у таблиці (кількість появи пари υ_{ij}).

Значення ξ	Значення η			
	1	2	3	υ_{i0}
1	25	50	25	100
2	52	41	7	100
υ_{0j}	77	91	32	200

Перевірити за допомогою критерію χ^2 незалежність в. в. ξ і η, α = 0,05.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 19. Проведено 300 спостережень одночасно над в. в. ξ і η, які набувають значення 1,2 і 1,2,3 відповідно. Кількість спостережень пар υ_{ij} приведено у таблиці

Значення ξ	Значення η			
	1	2	3	υ_{i0}
1	32	68	50	150
2	40	70	40	150
υ_{0j}	72	138	90	300

Перевірити за допомогою критерію χ^2 незалежність в. в ξ і η, α = 0,01.

Рішення:

Знайдем m_{ij}. Матриця $(m_{ij})_{\substack{i=1,2\\ j=1,2,3}}$ буде такою: $m_{ij} = \begin{pmatrix} 36 & 69 & 45 \\ 36 & 69 & 45 \end{pmatrix}$.

Матриця складена з елементів — $\left((\upsilon_{ij} - m_{ij})^2\right) = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 25 \\ 16 & 1 & 25 \end{pmatrix}$.

Тепер знайдемо матрицю, елементами якої є величини $(\upsilon_{ij} - m_{ij})^2 / m_{ij}$.

Отримаємо $\begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}014 & 0{,}55 \\ 0{,}44 & 0{,}014 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.

Додаючи елементи цієї матриці, знайдемо, що $\chi_q^2 = 2{,}008$. Число степенів вільності $m = 2$, а $\chi^2_{0,99;2} = 9{,}2$. Оскільки $\chi_q^2 < \chi^2_{0,99;2}$, то гіпотеза про незалежність ξ і η приймається.

17. Лема Неймана-Пірсона

Нехай $F(x,\theta)$ — функція розподілу в. в. ξ. Про вибірку з генеральної сукупності в. в. ξ висунуто дві гіпотези: основна: (H_0: $\theta = \theta_0$) і альтернативна (H_1: $\theta = \theta_1$). Тоді правило відбіру однієї з гіпотез, або статистичний критерій визначається підмножиною К (критична область) множини значень ($x_1,..., x_n$) та має вигляд, якщо ($x_1,..., x_n$) ∈ К, то приймається гіпотеза H_1, в противному випадку — H_0.

Ймовірність $\alpha = P_{\theta_0}(k)$ — тобто ймовірність прийняти гіпотезу H_1, якщо в дійсності справедлива H_0, називається похибкою 1-го роду.

Ймовірність $\beta = P_{\theta_1}(\bar{k})$, тобто ймовірність прийняти H_0, якщо справедлива H_1, називається похибкою 2-го роду.

Якщо К задано у вигляді $\{(x_1,..., x_n) \in К\} = \{\eta_n = \eta_n(x_1,..., x_n) > c\}$, то функцію $\eta_n(x_1,..., x_n)$ називають статистикою критерію.

Нехай $P(x,\theta)$ — щільність розподілу в. в. ξ. Відповідно Лемі Неймана-Пірсона

$$\eta_n = \prod_{k=1}^{n} [P(x_k, \theta_1) / P(x_k, \theta_0)]$$ та $К = \{(x_1,..., x_n): \eta_n > c\}$, константа c знаходиться з умови $\alpha = P_{\theta_0}(\eta_n > c) = \psi(c)$.

Цей критерій серед усіх критеріїв з фіксованою похибкою 1-го роду α має найменшу похибку 2-го роду β. Аналогічно формулюється критерій для дискретних розподілів.

17.1. Знайти *статистику* критерію Неймана-Пірсона та критичну область для розрізнення за вибіркою $x_1,..., x_n$ гіпотез:

$$H_0: P\{x_k = i\} = P_i^{(0)}, \quad i = 1,2,...,N,$$

$$H_1: P\{x_k = i\} = P_i^{(1)}, \quad i = 1,2,...N.$$

17.2. Нехай $x_1,..., x_n$ — вибірка з пуассонівського розподілу з параметром λ. Побудувати критерій Неймана-Пірсона перевірки гіпотези H_0: $\lambda = \lambda_0$ проти альтернативи H_1: $\lambda = \lambda_1 (\lambda_1 > \lambda_0)$. Знайти похибку 2-го роду.

17.3. За *n* — незалежним спостереженням в. в. побудувати критерій для перевірки гіпотези H_0: розподіл нормальний N (0,1) проти альтернативної гіпотези H_1: розподіл нормальний N (1,1). Яка повинна бути найменша кількість спостережень *n*, щоб похибки 1-го та 2-го роду не перевищували 0,01?

17.4. $x_1,..., x_n$ — н. о. р. в. в., які мають нормальний розподіл N (a,4). Перевірити гіпотезу H_0: a = 0 проти альтернативної гіпотези H_1: a =1. Який повинен бути найменший об'єм вибірки *n*, для того щоб похибка 1-го роду дорівнювала 0,05, а похибка 2-го роду була не більшою за 0,01?

17.5. Нехай $x_1,..., x_n$ — вибірка з показникового розподілу зі щільністю $P(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\exp\{-\frac{x}{\lambda}\}, x \ge 0.$

Побудувати критерій Неймана-Пірсона перевірки гіпотези H_0: $\lambda = \lambda_0$ проти альтернативної H_1: $\lambda = \lambda_1$. Знайти похибку 2-го роду.

Приклад розв’язання задачі

Приклад 20. Нехай $x_1,..., x_n$ — вибірка з нормального розподілу N (a,σ^2). Побудувати критерій Неймана-Пірсона перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ проти альтернативи H_1: $a = a_1$, σ^2 вважати відомим.

Для визначеності будемо вважати, що $a_1 > a_0$.

$$\eta_n = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-a_1)^2-(x_i-a_0)^2\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{n}{\sigma^2}(a_1-a_0)\bar{x}-\frac{n}{2\sigma^2}\left(a_1^2-a_0^2\right)\right\}$$

Нерівність $\eta_n > c$ еквівалентна

$$x > \sigma^2 \ln c \Big/ n(a_1-a_0) + \frac{a_1+a_0}{2},$$ або

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - a_0)}{\sigma} > \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}(a_1-a_0)}\ln\ c + \frac{\sqrt{n}}{2\sigma}(a_1-a_0) = f(c).$$

Оскільки для N (a_0,σ^2) $\bar{x}$ має розподіл $N\left(a_0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, то маємо

$$\psi(c) = P_{a_0}(\eta_n > c) = P_{a_0}\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(x-a_0) > f(c)\right\} =$$

$$=1-\Phi*(f(c)) = \begin{cases}0,5-\Phi(f(c)), & f(c)\ge 0\\ 0,5+\Phi(-f(c)), & f(c)<0\end{cases}$$

При $c > 0$ функція $f(c)$ неперервна, тому $\psi(c)$ — неперевна функція і для будь-якого $\alpha\in(0,1)$ однозначно визначена величина c_α, де

$$f(c_\alpha) = f_\alpha,\ \ a\ \ \Phi(f_\alpha) = 0,5-\alpha.$$

Таким чином, $K = \left\{ (x_1,...x_n): \sqrt{n}(\bar{x} - a_0)\Big/\sigma > f_\alpha \right\}$

Знайдемо похибку 2-го роду критерію

$$\beta = P_{a_1}\left\{\sqrt{n}(\bar{x}-a_0)\Big/\sigma \le f_\alpha\right\} = P_{a_1}\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x} - a_1) \le -\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(a_1-a_0)+f_\alpha\right\} =$$

$$= \Phi*\left(f_\alpha - \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(a_1-a_0)\right) = \begin{cases} 0,5+\Phi\left(f_\alpha-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(a_1-a_0)\right), & f_\alpha - \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(a_1-a_0)\ge 0\\ 0,5-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(a_1-a_0)-f_\alpha\right), & f_\alpha-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(a_1-a_0)<0\end{cases}$$

18. Перевірка гіпотез рівність математичних сподівань та дисперсій двох вибірок

Нехай X і Y дві в. в., кожна з яких має нормальний розподіл $N\left(a_x,\sigma_x^2\right)$ і $N\left(a_y,\sigma_y^2\right)$. Потрібно за двома вибірками об’єму n_1 і n_2 з генеральних сукупностей X і Y перевірити гіпотезу H_0: $a_x = a_y$ проти альтернативи $H_1: |a_x - a_y| > 0$.

Критична область визначається нерівністю

$$c = |\bar{x} - \bar{y}| \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1}+\frac{\sigma_y^2}{n_2}} > c_\alpha \text{ , де } \bar{x} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i,\ \bar{y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} y_1,$$

α — похибка 1-го роду,

$2\ \Phi(c_\alpha) = 1-\alpha$ (див. таблицю).

У випадку, коли $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma^2$ і значення σ^2 невідоме, критична область визначається нерівністю:

$$t = \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)\hat{S}_x^2+(n_2-1)\hat{S}_y^2}{n_1+n_2-2}}} > t_{\alpha,\ n_1+n_2-2} \text{ де}$$

$$\hat{S}_x^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2,\quad S_y^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^2.$$

Величина $t_{\alpha,\ n_1+n_2-2}$ знаходиться в таблиці розподілу Стьюдента при кількості степенів вільності $к = n_1 + n_2 - 2$ та ймовірності $1 - \alpha$. При $\alpha = 0,05$

$t_{0,05;18} = 2,10$, $t_{0,05;12} = 2,18$, $t_{0,05;9} = 2,26$

Для перевірки гіпотези $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_\gamma^2$ відносно $H_1: \sigma_x^2 > \sigma_\gamma^2$ критична область визначається нерівністю $F = \hat{S}_x^2 \Big/ \hat{S}_y^2 > F_{(\alpha;k_1,k_2)}$.

Тут $\hat{S}_x^2 \ge \hat{S}_y^2$, що завжди можна зробити, якщо поміняти індекси, $k_1 = n_1 - 1$,

$k_2 = n_2 - 1$.

Величина $F(\alpha; k_1, k_2)$ знаходиться в таблиці розподілу Фішера-Снедекора.

$F_{(0,05;4,5)} = 5{,}19$; $F_{(0,05;8,14)} = 2{,}70$;
$F_{(0,05;9,14)} = 2{,}65$; $F_{(0,05;10,14)} = 2{,}60$.

18.1. $\bar{x} = 0{,}103$, $\bar{y} = 0{,}368$ — вибіркові середні двох вибірок об'єму $n_1 = n_2 = 50$ з нормальних сукупностей N $(a_1,1)$ і N $(a_2,2)$. Перевірити гіпотезу $H_0 : a_1 = a_2$ проти альтернативної $H_1 : a_1 < a_2$ Похибку 1-го роду вважати 0,01.

18.2. У результаті спостережень над в. в. X і Y отримані наступні вибірки:

X: 45, 48, 53, 44, 59, 60, 41, 43, 57

Y: 51, 50, 42, 44, 39, 40, 48, 38, 59, 55, 51.

Чи можна вважати, що в. в. мають однакові м. с.? Похибка 1-го роду дорівнює 0,05. Передбачається, що в. в. X і Y підпорядковані нормальному закону з рівними дисперсіями.

18.3. Постановка задачі аналогічна 18.2.

X: 2,50; 2,50; 2,60; 2,75; 2,80; 2,80; 2,95

Y: 2,50; 2,80; 2,85; 2,90; 2,90; 2,95; 3,40

Чи можна вважати, що в. в. X і Y мають однакові м. с., $\alpha = 0{,}05$?

18.4. З нормальної генеральної сукупності з $\sigma^2 = 25$ узяти дві вибірки об'єму $n_1 = n_2 = 9$. Середнє першої вибірки $\bar{x} = 2$, другої $\bar{y} = 3$. Чи можна пояснити цю відмінність випадковими причинами при похибці 1-го роду 0,05?

18.5. Одним і тим же приладом було проведено дві серії вимірювань:

1-а: 2,5; 3,2; 3,5; 3,8; 3,5

2-а: 2,0; 2,7; 2,5; 2,9; 2,3; 2,6.

а) Вважаючи, що вимірювання підкоряються нормальному закону з однаковими дисперсіями, перевірити гіпотезу H_0: про значущість відмінності між м. с. вимірювань з похибкою 1-го роду 0,05;

б) Перевірити гіпотезу H_0: про те, що дисперсії однакові для усіх вимірювань, $\alpha = 0{,}05$.

18.6. За двома вибірками з нормальних сукупностей об'єму $n_1 = 11$, $n_2 = 15$, отримано $S_x^2 = 0{,}76$ і $S_y^2 = 0{,}38$.

При $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про рівність дисперсій двох нормальних сукупностей:

$$S_x^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i - \bar{x}\right)^2, \qquad S_y^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_i - \bar{y}\right)^2.$$

Приклад розв'язання задач

Приклад 21. По двох вибірках об'єму $n_1 = 25$, $n_2 = 50$ з генеральних сукупностей в. в. X і Y, які мають нормальний розподіл $N\left(a_k, \sigma_x^2\right)$ і $N\left(a_y, \sigma_y^2\right)$ визначено $\bar{x} = 9{,}79$, $\bar{y} = 9{,}60$.

Перевірити гіпотезу $H_0 : a_x = a_y$ при $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}01$

Рішення:

Маємо $c = \dfrac{\left|\bar{x} - \bar{y}\right|}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \dfrac{9{,}79 - 9{,}60}{0{,}3\sqrt{\dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{50}}} = 2{,}59$.

Порівняємо значення c з $c_\alpha = 2{,}57$ (табл. п.15) $2{,}59 > 2{,}57$, тому гіпотезу про рівність м. с. в. в. X і Y відхиляємо.

Приклад 22. За двома вибірками об'єму $n_1 = 10$, $n_2 = 15$ з генеральних сукупностей в. в. X і Y, які мають нормальний розподіл, пораховані вибіркові дисперсії $\hat{S}_x^2 = 9{,}6$ і $\hat{S}_y^2 = 5{,}7$. Перевірити гіпотезу про рівність дисперсій в. в. X і Y;

$\alpha = 0{,}05$.

Рішення: Порахуємо

$$F = \hat{S}_x^2 \Big/ \hat{S}_y^2 = \frac{9{,}6}{5{,}7} = 1{,}68, \qquad k_1 = 9,\ k_2 = 14$$

Порівняємо F з $F_{(0,05;9,14)} = 2{,}65$. Маємо $1{,}68 < 2{,}65$; і тому гіпотезу про рівність дисперсій в. в. X і Y не відхиляємо.

Відповіді, вказівки, рішення

1.

1.1. к (2-к)

1.2. $\Omega = \left\{\left(x, y, z\right) : 0 \le x \le l,\ \ 0 \le y \le l,\ \ 0 \le z \le l\right\}$,

$$A=\left\{(x,y,z): x+y>z,\ \ x+z>y,\ \ y+z>x\right\},\ \ P(A)={}^{1}\!/_{2}.$$

1.3. ${}^{3}\!/_{4}$.

1.4. Якщо r — радіус кола, то сторона вписаного квадрата дорівнює $r\sqrt{2}$. Тому шукана ймовірність є 2π.

1.5. Позначимо через x відстань середини голки до найближчої паралелі, $0 \le x \le a$, через φ — кут, який утворює голка з цією паралеллю, $0 \le \varphi \le \pi$. Тоді $\Omega=\left\{(x,\phi): 0\le x\le a,\ \ 0\le\phi\le\pi\right\},\ \ A=\left\{(x,\varphi): x\le l\ \sin\varphi\right\}$. Отже,

$$P(A)=\frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi} l\ \sin\ \phi d\phi={}^{2l}\!/_{a\pi}.$$

1.6. a^2 при $0< a < 1$ і 1 при $a \ge 1$.

1.7. $\pi a^2\!/_4$ при $0<a<1$, $\sqrt{a^2-1}+\frac{a^2}{2}(\arcsin\left(\frac{1}{a}\right)-\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right))$

1.8. ${}^{1}\!/_{12}$.

1.9. $(4\ln 2+3)\!/_{18}$.

1.10. $(4\ln 2+1)\!/_{8}$.

1.11. ${}^{6}\!/_{19}$.

2.

2.1. Доведемо, що події A і $\overline{B}$ незалежні.

$P(A\cap\overline{B})=P(A-(A\cap B))=P(A)-P(A\cap B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B})$.

Інші твердження доводяться аналогічно.

2.2. Доведення аналогічне доведенню задачі 2.1.

2.5. $P(A)={}^{1}\!/_{2},\ \ P(B)={}^{7}\!/_{8},\ \ P(A\cap B)={}^{3}\!/_{8},\ \ P(A)P(B)={}^{7}\!/_{16}$, отже події залежні.

2.6. Незалежні.

2.7. $P(A)=P(B)=P(C)={}^{1}\!/_{2}$, $P(A\cap B\cap C)={}^{1}\!/_{4}$, $P(A)P(B)P(C)={}^{1}\!/_{8}$.

2.8. а) $1-\prod_{k=1}^{n}(1-P_k)$; б) $\prod_{k=1}^{n}(1-P_k)$; в) $\sum_{k=1}^{n}P_k\prod_{i\ne k}(1-P_i)$.

3.

3.1. $P_n(m_0-1)\le P_n(m_0)$ і $P_n(m_0+1)\le P_n(m_0)$. Розпишемо першу нерівність $c_n^{m_0-1}p^{m_0-1}q^{n-m_0+1}\le c_n^{m_0}p^{m_0}q^{n-m_0}$ після скорочення отримаємо $\frac{q}{n-m_0+1}\le\frac{p}{m_0}$, тобто $m_0\le p_n+p$.

Аналогічно розписуючи другу нерівність, отримаємо $m_0\le p_n-q$

3.2. Під успіхом розуміємо появу грані з номером кратним 3.

Тоді $p={}^{1}\!/_{3}$, $\quad P_6(2)=C_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$.

3.3. а) $m_0=2,\ \ m_0=3;\ \ P_{14}(2)=P_{14}^3\approx 0{,}25$;

б) $P\{\mu_n\ge 4\}=1-\sum_{i=0}^{3}P\{\mu_n=i\}\approx 0{,}302$.

3.4. 24 або 25.

3.5. $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^n\approx\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ при великих n. Тут використовується комбінаторна тотожність:

$\sum_{\kappa=0}^{n}(C_n^{\kappa})^2=C_{2n}^{\ n}$. Та формула Стірлінга $n!\sim\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}$.

3.6. n = 5000, p = 0,001, np = 5. Скористаємося теоремою Пуассона $P\ \{\mu_n\ge 2\}=1-p_n(0)-p_n(1)\approx 1-e^{-5}-5e^{-5}=0{,}9596$.

3.7. $np=4,\ \ P\{\mu_n\le 3\}\approx e^{-4}+4e^{-4}+8e^{-4}+\frac{32}{3}e^{-4}=0{,}4334$.

3.8. Скористатися локальною теоремою Муавра-Лапласа:

а) 0,0532; б) 0,1219.

3.9. В силу інтегральної теореми Муавра-Лапласа

$$P\ \{\mu_n\le 80\}=P\ \left\{\frac{-50}{\sqrt{49{,}75}}\le\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{10}{\sqrt{49{,}75}}\right\}=P\ \left\{-7{,}09\le\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\le\right.$$

$$\left.\le 1{,}43\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-7{,}09}^{1{,}43}e^{-t^2\!/_2}dt=\varPhi\ \ (1{,}43)+\varPhi\ \ (7{,}09)\approx 0{,}9236.$$

Значення $\Phi\ (7{,}09) \approx 0{,}5$ з точністю до 10^{-10}.
3.10. а) 0, 0005; б) 0, 9510; в) 0, 9043.
4.
4.1. Знайти сумісний розподіл ξ і η. Показати, що для ∀ *i*, *j*=1, 2, ..., 6

$$P\{\xi = i, \eta = j\} = P\{\xi = i\}P\{\eta = j\} = \frac{1}{36}$$

4.2. Сумісний розподіл має вигляд

$$P\{\xi = i, \eta = j\} = \begin{cases} 0, i < j \\ \frac{1}{36}(6 - i + 1), i = j \\ \frac{1}{36}, i > j \end{cases}$$

$$M\xi = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = 7/2, \quad D\xi = 35/12.$$

Розподіл $\eta : P\{\eta = i\} = \frac{(13 - 2i)}{36}, \quad i = 1,2,...,6.$

$M\eta = \frac{91}{36}, \quad D\eta = \frac{1555}{1296}, \quad \operatorname{cov}(\xi,\eta) = \frac{85}{72}, \quad \rho(\xi,\eta) = 0{,}68.$

4.3. Ні. Розподіл $\gamma = \xi\eta$ має вигляд

$P\{\gamma = 0\} = \frac{1}{2}, \quad P\{\gamma = \pm 1\} = \frac{1}{4};$

$P\{\gamma = 1, \eta = 1\} = \frac{1}{8} \neq P\{\gamma = 1\}P\{\eta = 1\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$

$M\xi = 0, \quad D\xi = 1, \quad M\eta = 0, \quad D\eta = 1/2.$

$\operatorname{cov}(\gamma,\eta) = M\xi\eta^2 = M\xi \cdot M\eta^2 = 0.$

Отже, $\rho(\gamma,\eta) = 0.$

4.4. Скориставшись визначенням $\rho(\xi,\eta)$.

4.5. $P\{\xi = i\} = \frac{i-1}{36}, \ i = 2,...,7; \quad P\{\xi = i\} = \frac{13-i}{36}, \ i = 8,...,12;$

$$P\{\eta = \pm i\} = \frac{6-i}{36}, \ i = 0,1,...,5; \quad \xi = \xi_1 + \xi_2, \ \eta = \xi_1 - \xi_2;$$

де ξ_1 — число очок на 1-й кості, а ξ_2 — на другій. Відповідно задачі 4.1. ξ_1 і ξ_2 — н. с. в., і далі твердження $\rho(\gamma,\eta) = 0$ випливає з задачі 4.4. Величини ξ і η будуть залежними, тому що

$P\{\xi = i, \ \eta = i\} = P\{\xi_1 = \frac{i+j}{2}, \ \xi_2 = \frac{i-j}{2}\}$ і, наприклад, при $i = 2, j = 1$

$0 = P\{\xi = 2, \ \eta = 1\} \neq P\{\xi = 2\}P\{\eta = 1\} = \frac{5}{1296}.$

4.6. а) 0; $\sqrt{21}/5$.

4.7. $(\alpha^2 - \beta^2)/(\alpha^2 + \beta^2)$.

4.8. а) так; б) не завжди, тому що попарно некорельованих в. в. $M\zeta\xi\eta$ не обов'язково дорівнює $M\zeta M\xi\eta$. Наприклад, $P\{\xi = \pm 1\} = 1/2; \quad P\{\zeta = \pm 1\} = 1/2$, а $\eta = \xi\zeta$.

Ці в. в. попарно некорельовані, а $1 = M\zeta\xi\eta \neq M\zeta M\xi\eta = 0$.

5.
5.1.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -2 \\ \frac{1}{8}(x+2)^2, \ -2 < x \le 0 \\ \frac{1}{2}(x+1) - \frac{x^2}{8}, \ 0 < x \le 2 \\ 1, \ x > 2 \end{cases}$$

5.2. $\frac{1}{4}(1 + |x|)\exp\{-|x|\}$.

5.3. $P\{\xi + \eta = k\} = \sum_{i=0}^{k} P\{\xi = i\}P\{\eta = k - i\} = \frac{k+1}{(n+1)^2}, \ k = 0,1,...,n$

і $P\{\xi + \eta = k\} = \sum_{s=0}^{2n-k} P\{\xi = n - i\}P\{\eta = k - n + i\} = \frac{2n-k+1}{(n+1)^2}, \ k = n+1,...,2n.$

5.4. $P\{\xi_1 + \xi_2 = k\} = \sum_{i=0}^{k} P\{\xi_1 = i\}\, P\{\xi_2 = k - i\} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!}\, \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\, e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)} =$

$$= e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{1}{k!}\sum_{i-0}^{k} c^i_\kappa \ \lambda_1^i \ \lambda_2^{\kappa - i} = (\lambda_1 + \lambda_2)^k \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

5.5. $P_{\xi_1+\xi_2}(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\ \{-\frac{(x-u-a_1)^2}{2\sigma_1^{\ 2}}-\frac{(u-a_2)^2}{2\sigma_2^{\ 2}}\}dz$

Позначим $z=u-a_{2,}$ $w=x-a_1-a_2$. Тоді

$$P_{\xi_1+\xi_2}(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{1}{2}([z\frac{\sqrt{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{w\sigma_2^{\ 2}}{\sigma_1\sqrt{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}}]^2+\frac{w^2}{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}\}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}}e^{-\frac{1}{2}w^{2}\Big/(\sigma_1^{\ 2}+\sigma 2^{2})}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2\!/_2}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}}e^{\frac{1}{2}(x-a_1-a_2)^{2}\Big/(\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2})}.$$

5.6. — 5.7. Доведення проводиться за індукцією.

5.8. Скористатися тим, що якщо ξ_1 і ξ_2 — н. в. в., то

$$P_{\xi_1/\xi_2}(x)=\int\limits_{=\infty}^{+\infty}|v|\ P_{\xi_1}(vx)\ \ P_{\xi_2}(v)dv$$

і результатом задачі 5.7.

$$5.9.\ \ P_{\xi_1}+\xi_2=\begin{cases}0,\ \ x\notin[0,3]\\ x\!\big/\!2,\ \ 0\le x\le 1\\ 1\!\big/\!2,\ \ 1<x\le 2\\ \frac{1}{2}(3-x),\ \ 2<x\le 3\end{cases}$$

$$5.10.\ \ P_{\xi_2}+\xi_2(x)=\begin{cases}0,\ \ x\le -1\\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-\lambda(x+1)}\right),\ \ -1<x\le 1\\ \frac{1}{2}\left(e^{-\lambda(x-1)}-e^{-\lambda(x+1)}\right),\ \ x>1\end{cases}$$

6.

6.1. а) $P/(1-qz)$; б / $e^{\lambda(z-1)}$;

6.2. а) $P_0=P_1=P_2=\frac{1}{3}$; б) $P_k=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$, $k=1,2,\ldots$;

в) $P_k=\frac{1}{N+1}$, $k=0,1,\ldots,N$.

6.3. а) Нехай $P\{\xi_1=k\}=e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}$, a $P\{\xi_2=k\}=e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^k}{k!}$ i ξ_1, ξ_2 — н. в. н. Тоді $P_{\xi_1+\xi_2}(z)=P_{\xi 1}(z)P_{\xi_2}(z)=\exp\{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)\}$, отже, $\xi_1+\xi_2$ має пуассонівський розподіл з параметром $\lambda_1+\lambda_2$;

б) якщо $P\{\xi_i=k\}=C_{n_i}^k P_i^k q_i^{n_i-k}$, $i=1,2$, то твердження справедливе, коли $P_1=P_2$;

в) не виконується.

6.4. $P(z_1,z_2)=\exp\{\lambda[z_1(Pz_2+q)-1]\}$

$$M\xi=\frac{\partial}{\partial z_1}P(z_1,z_2)\Big|_{z_1=z_2=1}=\lambda,\ \ M\eta=\frac{\partial}{\partial z_2}P(z_1,z_2)\Big|_{z_1=z_2=1}=\lambda P,$$

$M\xi(\xi-1)=\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}P(z_1,z_2)\Big|_{z_1=z_2=1}=\lambda^2$, тоді $D\xi=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$;

аналогічно $M\eta(\eta-1)=\lambda^2P^2$ і $D\eta=\lambda P$;

$$M\xi\eta=\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}P(z_1,z_2)\Big|_{z_1=z_2=1}=\lambda P+\lambda^2P,$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M\xi\eta-M\xi\cdot M\eta=\lambda P,\ \ \rho(\xi,\eta)=\sqrt{P}$$

6.5. $P(z_1,z_2)=P_1(z_1,z_2)P_2(z_2)$

6.6. $P_n=(1-q)P_{n-1}+q(1-P_{n-1}-f_{n-1}),\ f_n=(1-q)f_{n-1}+qP_{n-1},$

$P_0=1,\ f_0=0.$

Твірна функція для послідовності P_n, n = 0,1...дорівнює $(1-(1-q)z)^2\Big/[(1-z)(1+z(3q-2)+z^2(1-3q+3q^2)]$, а послідовності f_n, $n=0,1,\ldots$ $(1-(1-q)z)qz\Big/[(1-z)(1+z(3q-2)+z^2(1-3q+3q^2)]$.

Нехай така в. в. існує. Тоді $P_\xi(z)P_\zeta(z)=P_\eta(z)$, тут $P_\xi(z)=\frac{1}{2}(1+z)$, $P_\eta(z)=\frac{1}{8}(1+2z+4z^2+z^3)$. Зауважимо, що корені $P_\xi(z)=0$ одночасно є і коренями рівняння $P_\eta(z)=0$. Але $P_\xi(-1)=0$, а $P_\eta(-1)=\frac{1}{4}$, що призводить до протиріччя.

7.

7.1. а) $e^{\lambda(e^{it}-1)}$; б) $(pe^{it}+q)^n$; в) $p\big/(1-qe^{it})$.

7.2. а) $(e^{itb}-e^{ita})\big/\left[(b-a)it\right]$; б) $\lambda\big/(\lambda-it)$;

в) $1\big/(1+t^2)$; г) $\exp\{-a|t|\}$.

7.3. $|\varphi(t)|^2$.

7.4. а) нормальний розподіл $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$;

б) рівномірний розподіл на [− 1, 1];

в) характеристична функція суми н. в. в. $\xi_1+\xi_2$, де ξ_1 має розподіл Коші (задача 7.2. (г)), а $P\{\xi_2=\pm1\}=1\big/2$. Щільність суми буде мати вигляд $P_{\xi_1+\xi_2}(x)=\frac{1}{2\pi}\left[1\big/(1+(x-1)^2+1\big/(1+(x+1)^2)\right]$.

7.5. б), д), е). Скористатись теоремами Пойя, Марцинкевича і властивостями характеристичних функцій.

7.6. Характеристична функція в. в. ξ_j має вигляд $e^{\lambda j(e^{it}-1)}$, $j=1,2$. Тоді $\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$, котра відповідає характеристичній функції пуассонівського розподілу з параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

7.8. $\Phi^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt$.

7.9. Ні, не можуть. Нехай в. в. ξ_1 має рівномірний розподіл на [c, d]. Тоді $\varphi_\xi(t)=e^{-a|t|}$, $\varphi_{\xi_1}(t)=\frac{1}{d-c}\ \frac{(e^{itd}-e^{itc}0}{it}$ і $\varphi_\xi(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\ \varphi_{\xi_2}(t)$.

Але характеристична функція в. в. ξ не має нулів, а характеристична функція ξ_1 обов'язково має нулі.

7.10. Нехай F(x) — функція, розподілу якої відповідає характеристична функція φ(t). Функція $\left(1-\frac{1}{n}\right)F_1(x)+\frac{1}{n}F(x)$ також є функцією розподілу, $F_1(x)=1$ при $x>0$ і 0 при $x\le 0$. Характеристична функція її матиме вигляд $\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\varphi(t)$. Тоді функція $\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\varphi(t)\right)^n$ також є характеристичною (відповідає сумі n н. о. р. в. в.).

$\left(1+\frac{\varphi(t)-1}{n}\right)^n\to e^{\varphi(t)-1}$ при $n\to\infty$; гранична функція неперервна в нулі. Далі, скориставшись теоремою неперервності, отримаємо, що *exp{φ(t)-1}* — характеристична функція.

8.

8.1. а), б), г), е), ж) — виконуються, в), д) — не виконуються.

8.2. При $\alpha<1\big/2$, тому що в цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}D\xi_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^{2\alpha-1}=0$.

8.3. $a\big/(\alpha^2+\sigma^2)$.

8.4. $\ln\eta_n=1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\xi_k\to 0$ по ймовірності в силу закону великих чисел. Тут використовувався той факт, що $M\ln\xi_k=\int_0^1\ln x\,dx=-1$. Тоді $\eta_n\to 1$по ймовірності.

8.5. e^c, $c=\int_0^1\ln x e^{-x}dx$.

8.6. Нехай $\{\xi_n,\ n\ge 1\}$ — п. н. о. р. в. в., які мають рівномірний розподіл на [0,1]. В силу ЗВЧ

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\to M\xi_1=\frac{1}{2}$, $n\to\infty$ по ймовірності

$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\to f\left(\frac{1}{2}\right)$, $n\to\infty$ по ймовірності для неперервної функції $f(x)$. Відповідно до теореми Лебега, якщо $f(x)$ — обмежена функція то

$$Mf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\to Mf\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right),\ \ n\to\infty.$$

Але $Mf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\int_0^1...\int_0^1 f\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right)dx_1...dx_2$.

8.7. $e^{-m/2}$.

8.8. 2 — m.

8.9. — 1.

9.

9.1. $\Phi\left(\sqrt{3}\right)\approx 0{,}46$.

9.2. При $\alpha\ge-\frac{1}{2}$. В цьому прикладі

$M\xi_k=0,\ \ D\xi_k=k^{2\alpha},\ \ M|\xi_k|^3=k^{3\alpha},\ \ B_n^2=\sum_{k=1}^{n}k^{2\alpha}.$ При $2\alpha+1>0$

$$B_n^2=n^{2\alpha+1}\left(\frac{1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2\alpha}\cdot\frac{1}{n}+...+\left(\frac{1}{n}\right)^{2\alpha}\cdot\frac{1}{n}\right)\approx n^{2\alpha+1}\int_0^1 x^{2\alpha}dx=\frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}.$$

При $\alpha=-\frac{1}{2}$ $B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\approx\ln n$. $\alpha<-1/2$, то обмежені при $n\to\infty$ і, отже, не буде виконана умова рівномірної малості. Аналогічно при $\alpha>-1/3$ $c_n^3=\sum_{k=1}^{n}k^{3\alpha}\approx\frac{n^{3\alpha+1}}{3\alpha+1}$, а при $\alpha=-\frac{1}{3}$ $c_n^3\approx\ln n$ і при $\alpha<-1/3$ обмежені, оскільки при $\alpha\ge-1/2$ $n^{3\alpha+1}=0(n^{3\alpha+3/2})$, *то* $c_n^3=0(B_n^3)$ і умова Ляпунова буде виконана.

9.3. $2\Phi\left(\frac{2\alpha}{\sigma}\right)$, де σ — рішення рівняння $\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)=\frac{b}{2}$.

9.4. Не виконується.

9.5. Не виконується.

9.6. Справедливі представлення

$$\eta_n=\frac{\xi_1+...+\xi_n}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{\xi_1^2+...+\xi_n^2}{n}\right)^{-1}\ \text{ і }\ \xi_n=\frac{\xi_1+...\xi_n}{\sqrt{n}}\cdot\left(\sqrt{\frac{\xi_1^2+...\xi_n^2}{n}}\right)^{-1}.$$

Далі скористатися ЗВЧ і ЦГТ.

9.7. $0{,}5+\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\lambda}}\right),\ \ x\ge0$ *і* $0{,}5-\Phi\left(\frac{-x}{\sqrt{2\lambda}}\right),\ \ x<0$.

10.

10.1. Позначимо через $p(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}^{\sigma}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right\}$ одновимірну щільність w(t). Тоді щільність розподілу величин w(3) і w(t) при умові, що w(1) = 0, 0 < s < t < 1, є таке відношення

$$f(s,x,t,y,)=p(s,x)p(t-s,y-x)p(1-t,-y)\Big/p(1,0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)(1-t)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{x^2}{s}+\frac{(y-x)^2}{(t-s)}+\frac{y^2}{1-t}\right)\right\}$$

10.2. s(1-t). Скористатися результатом задачі 10.1.

10.3. Показати, що $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ — ОПНП і перевірити умови (1) — (4) 10.

10.4. Аналогічно 10.3., при цьому незалежність приростів

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(w_1(t)+w_2(t)\right)$ та їх незалежності

$w_1(t)$, і $w_2(t)$, і їх незалежності.

10.5. $\varphi(z)=M\exp\{izw(\tau)\}=\lambda\Big/\left(\frac{\sigma^2z^2}{2}+\lambda\right)$.

10.6. Скористатися тим, що $w_1(t)$ — $w_1(s)$ має нормальний розподіл $N(0,t-s)$.

10.7. $R(t,s)=\min(t,s)-ts$.

10.8. $$\frac{1}{2\pi^{n/2}\sigma^n\sqrt{t_1(t_2-t_1)...(t_n-t_{n-1})}}\exp\left\{\frac{-x_1^2}{2t_1\sigma^2}-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)\sigma^2}-...-\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})\sigma^2}\right\}.$$

11.

11.1. $M\xi(t) = M\Pi(t+1) - M\Pi(t) = \lambda(t+1) - \lambda t = \lambda$

$R(t,s) = M(\xi(t)-\lambda)\left(\xi(s)-\lambda\right) = M\xi(t)\xi(s) - \lambda^2.$

Розглянемо 3 випадки:

а) $s \le t-1$; $R(t,s) = M(\Pi(t+1)-\Pi(t))\cdot\left(\Pi(s+1)-\Pi(s)\right) - \lambda^2 = 0;$

б) $t-1<s<t$. В цьому випадку

$$(\Pi(t+1)-\Pi(t))(\Pi(s+1)-\Pi(s)) = (\Pi(t+1)-\Pi(s+1)+\Pi(s=1)-\Pi(t))\cdot$$
$$\cdot(\Pi(s+1)-\Pi(t)+\Pi(t)-\Pi(s)) = (\Pi(t+1)-\Pi(s+1))\cdot$$
$$\cdot(\Pi(s+1)-\Pi(t)) + (\Pi(s+1)-\Pi(t))^2 + (\Pi(t+1)-\Pi(s+1))\cdot$$
$$\cdot(\Pi(t)-\Pi(s)) + (\Pi(s+1)-\Pi(t))(\Pi(t)-\Pi(s))$$

Тоді $R(t,s) = \lambda - \lambda(t,s);$

в) $s=t$ $\quad M\left(\Pi(t+1)-\Pi(t)\right)^2 = \lambda^2+\lambda$. Таким чином,

$$R(t,s) = \begin{cases} 0, & s \le t-1 \\ \lambda-\lambda(t-s), & t-1<s<t \\ \lambda, & s=t \end{cases} \quad i \quad M\xi(t) = \lambda,$$

тобто ξ(t) — стаціонарний у широкому сенсі процес.

11.2. $M\xi(t) = 0,\ M\xi(t)M\xi(s) = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \cos\lambda_k(t-s).$

11.3. $R(t) = 2a\dfrac{\sin bt}{t}.$

11.4. $R(t) = 2c^2(2\cos bt-1)\dfrac{\sin bt}{t}.$

11.5. $f(u) = \dfrac{\sigma^2}{2\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2.$

11.6. $f(u) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\alpha^2}{\left(u^2+\alpha^2\right)^2}$

11.7. $M\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{i(tx+\phi)}\dfrac{d\varphi}{2\pi}\ dF(x) = 0$

$$R(t,s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{i(t-s)x}\frac{d\phi}{2\pi}\ dF(x) = R(t-s).$$

12.

12.1. Об'єм вибірки n = 16. Впорядкувавши елементи вибірки за зростанням, отримаємо варіаційний ряд:

а) 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 10, 10;

б) статистичний ряд записується у вигляді таблиці

y_i	2	3	4	5	7	10
m_i	4	3	4	2	1	2

12.2. а) $F_n(x)\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}2, & 2<x\le 4 \\ 0{,}52, & 4<x\le 7 \\ 0{,}92, & 7<x\le 10 \\ 1, & x>10 \end{cases}$; б) $F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 0{,}05, & 1<x\le 3 \\ 0{,}3, & 3<x\le 5 \\ 0{,}5, & 5<x\le 7 \\ 1, & x>7 \end{cases}$

12.3. а) $F_n(x)\begin{cases} 0, & 2 \ge x \\ 1/14, & 2<x\le 5 \\ 4/14, & 5<x\le 7 \\ 6/14, & 7<x\le 8 \\ 1, & x>8 \end{cases}$; б) $F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 8/60, & 0<x\le 1 \\ 25/60, & 1<x\le 2 \\ 41/60, & 2<x\le 3 \\ 51/60, & 3<x\le 4 \\ 57/60, & 4<x\le 5 \\ 59/60, & 5<x\le 7 \\ 1, & x>7 \end{cases}$

13.

13.1. $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Оцінка слушна та незміщена $M\hat{\lambda}_n = \lambda, D\hat{\lambda}_n = \frac{\lambda}{n}$.

13.2. $\hat{a}_n^2 = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Оцінка слушна і незміщена.

13.3. $\hat{a}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1}{\bar{x}}$, $\hat{b}_n = 1 - \frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1}$.

13.4. $\bar{\theta}_n = \frac{2\bar{x}}{\sqrt{\pi}}$. Оцінка слушна і незміщена.

13.5. $\bar{\beta}_n = \frac{\bar{x}}{\alpha^2 - \bar{x}^2}$, $\bar{m}_n = \frac{\bar{x}^2}{\alpha_2 - \bar{x}_2}$, де $\alpha_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Ці оцінки слушні. В чисельному прикладі $\hat{m}_n = 1{,}678$ і $\hat{\beta}_n = 4{,}79$.

13.6. $\hat{P}_n = n \Big/ \left(n + \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

Оцінка слушна.

$$M\hat{P}_n^{-1} = P^{-1};\ D\hat{P}_n^{-1} = \frac{(1-P)}{nP^2}.$$

14.

14.1. Функція правдоподібності матиме вигляд

$$L(x,\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n, & \textit{якщо } x_n \le \theta \\ 0, & \textit{в протилежному випадку} \end{cases}$$

Відповідно до теореми факторизації $T(x) = x_n$, $x = (x_1, \ldots x_2)$.

Функція розподілу x_n має вигляд $P\{x_{(n)} < t\} = F^n(t)$,

де $F(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ t/\theta, & 0 \le t \le \theta \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. Нехай для функції $\varphi(t)$, $t \ge 0$ виконується умова

$$M_\theta \varphi(T) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta \varphi(t) t^{n-1} dt = 0,\ \forall\theta > 0.$$

Диференціюючи з θ тотожність $\int_0^\theta \varphi(t) t^{n-1} dt \equiv 0$, отримаємо $\varphi(\theta)\theta^{n-1} \equiv 0$, тобто $\varphi(\theta) = 0$, $\forall\theta > 0$. Таким чином, достатня статистика $T(x) = x_n$ — повна.

14.3. $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$; $P_T(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t/\theta} \cdot \frac{1}{\theta^n}$.

14.4. б) вектор $\left\{\max\limits_{1 \le i \le n} x_i;\ \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$ — достатня статистика.

14.5. $L(x,\lambda) = e^{-n\lambda}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$, $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, T(x) має розподіл Пуассона з параметром nλ.

14.6. $L(x,\theta) = \frac{1}{\pi^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(x_i-\theta)^2}$. Тут не можна знайти статистику T, яка дає факторизаційне представлення, розмірність якої менша n.

14.7. $P_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}$, $x > 0$, $M\xi = \exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right)$,

$$D\xi = \exp\left\{2a+\sigma^2\right\}\left(e^{\sigma^2}-1\right),\quad T(x)=\left(\prod_{i=1}^{n} x_i,\ \ \sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i\right).$$

15.

15.1. (0,108; 0,424).

15.2. а) (0,304; 0,496). б) (0,276; 0,526).

15.3. (1,530; 2,470).

15.4 (0,502; 0,718).

15.5. $\bar{x}$ = 425 час., (270,70 час.; 779,82 час.).

15.6. $\bar{x}$ = 600 час., (408 час.; 1032 час.).

16.

16.1. $\lambda_q = 0{,}581$, $\lambda_{0,1} = 1{,}224$; $\lambda_{0,1} > \lambda_q$, гіпотеза не відхиляється.

16.2. $x_q^2 = 2{,}07$, $x_{0,95;3}^2 = 7{,}8$; $x_q^2 < x_{0,95;3}^2$, гіпотеза не суперечить вхідним даним.

16.3. $\lambda_q = 0{,}58$, $\lambda_{0,01} = 1{,}627$; $\lambda_q < \lambda_{0,01}$, отже, гіпотеза не суперечить вхідним даним.

16.4. $x_q^2 = 3{,}75$, $x_{0,9;1}^2 = 2{,}7$; $x_q^2 > x_{0,9;1}^2$, гіпотеза незалежності суперечить даним задачі.

16.5. $x_q^2 = 0{,}696$, $x_{0,9;1}^2 = 2{,}7$; $x_q^2 < x_{0,9;1}^2$, гіпотеза незалежності не суперечить даним задачі.

16.6. $x_q^2 = 20{,}48$, $x_{0,95;2}^2 = 6{,}0$; $x_q^2 > x_{0,95;2}^2$, гіпотеза незалежності суперечить даним задачі.

17.

17.1. $\eta_n = \sum_{i=1}^{N} m_i \ln\frac{P_i^{(1)}}{P_i^{(0)}}$, де *mi* — число ісходів (кінцевих результатів), що набули прийнявших значення *i*.

17.2. Критична область $K=\left\{(x_1,\ldots x_n):\ \sum_{i=1}^{n} x_i > c_1\right\}$, де c_1 здобуваємо з рівняння

$$\sum_{j=0}^{c_1}\frac{(n\lambda_0)^j}{j!}e^{-n\lambda_0} = 1-\alpha.$$ Похибка 2-го роду $\beta = \sum_{j=0}^{c_1}\frac{(n\lambda_1)^j}{j!}e^{-n\lambda_1}$

17.3. n = 22.

17.4. n = 64.

17.5. Критична область $K=\left\{(x_1,\ldots x_n):\ \sum_{i=1}^{n} x_i < c_1\right\}$, де c_1 здобуваємо з рівняння

$$\int_0^{c_1}\frac{(\lambda_0 x)^{n-1}}{(n-1)\ !}\lambda_0 e^{-\lambda_0 x}dx = \alpha.$$ Похибка 2-го роду $\beta = 1-\int_0^{c_1}\frac{(\lambda_1 x)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx$

18.

18.1. C = 1,325, $C_{0,01}$ = 2,57; C < $C_{0,01}$, гіпотеза про рівність м. с. не суперечить даним.

18.2. t = 0,94, $t_{0,05}$; 18 = 2,10; t < $t_{0,05}$; 18, гіпотеза про рівність м. с. не суперечить даним задачі.

18.3. t = 1,67, $t_{0,05}$; 12 = 2,18; t < $t_{0,05}$; 12, гіпотеза про рівність м. с. не суперечить даним задачі.

18.4. C = 0,43, $C_{0,05}$ = 1,96; $C_{0,05}$ > C, різниця між середніми пояснюється випадковими причинами.

18.5. а) t = 3,26, $t_{0,05;\,9}$ = 2,26; t > $t_{0,05;\,9}$, гіпотеза H_o відхиляється;

б) F = 2,45, $F_{(0,05;\,4,5)}$ = 5,19; F < $F_{(0,05;\,4,5)}$, тобто немає причин відхиляти гіпотезу H_o.

18.6. F = 2,05, $F_{(0,05;\,10,14)}$ = 2,60;

F < $F_{(0,05;\,10,14)}$. Тобто гіпотеза про рівність дисперсій не суперечить даним задачі.

ДОДАТОК

Таблиця 1

Значення функції $\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$.

μ \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0, 3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363
10			0,0008	0,0053	0,0181
11			0,0002	0,0019	0,0082
12			0,0001	0,0006	0,0034
13				0,0002	0,0013
14				0,0001	0,0005
15					0,0002
16					0,0001

Таблиця 2

Значення функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt.$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,60	0,2257	1,28	0, 3997	1,64	0,4495
0,10	0,0398	0,70	0,2580	1,30	0, 4032	1,65	0,4505
0,20	0,0793	0,80	0,2881	1,33	0, 4082	1,66	0,4515
0,26	0,1026	0,90	0,3159	1,40	0, 4192	1,70	0,4554
0,30	0,1179	1,00	0,3413	1,43	0, 4236	1,76	0,4608
0,40	0,1554	1,10	0,3643	1,50	0, 4332	1,80	0,4641
0,50	0,1915	1,20	0,3849	1,60	0, 4452	1,90	0,4713
1,96	0,4750	2,57	0,4949	3,10	0,4990	3,60	0,4998
2,00	0,4772	2,60	0,4953	3,20	0,4993	3,70	0,4998
2,10	0,4821	2,66	0,4961	3,29	0,4995	3,80	0,4999
2,20	0,4861	2,70	0,4965	3,30	0,4995	3,90	0,4999
2,30	0,4892	2,80	0,4974	3,33	0,4995	4,00	0,49999
2,33	0,4901	2,90	0,4981	3,40	0,4996	5,00	0,499999
2,50	0,4938	3,00	0,4986	3,50	0,4997		

Таблиця 3

Значення χ^2 залежно від ймовірності $P(\chi^2 < \chi^2_{1} - \alpha) = 1-\alpha$ і числа степенів вільності κ.

κ \ 1−α	0,05	0,10	0,90	0,95	0,99
1	0,0039	0,016	2,7	3,8	6,6
2	0,103	0,211	4,6	6,0	9,2
3	0,352	0,584	6,3	7,8	11.3
4	0,71	1,06	7,8	9,5	13,3
5	1,14	1,61	9,2	11.1	15,1
6	1,63	2,20	10,6	12.6	16,8
7	2,17	2,83	12,0	14,1	18,5

Закінчення табл. 3

8	2,73	3,49	13,4	15,5	20,1
9	3,32	4,17	14,7	16,9	21,7
10	3,94	4,86	16,0	18,3	23,2
11	4,6	5,6	17,3	19,7	24,7
12	5,2	6,3	18,5	21,0	26,2
13	5,9	7,0	19,8	22,4	27,7
14	6,6	7,8	21,1	23,7	29,1
15	7,3	8,5	22,3	25,0	30,6
16	8,0	9,3	23,5	26,3	32,0
17	8,7	10,1	24,8	27,6	33,4
18	9,4	10,9	26,0	28,9	34,8
19	10,1	11,7	27,2	30,1	36,2
20	10,9	12,4	28.4	31,4	37,6

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — М., 1986. — 431 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К., 1979. — 407 с.
3. *Дороговцев А. Я., Сильвестров Д. С., Скороход А. В., Ядренко М. Н.* Теорія вероятностей: Сб. задач. — К., 1980. — 432 с.
4. *Прохоров А. В., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. — М., 1986. — 327 с.
5. *Климов Г. П., Кузьмин А. Д.* Вероятность, процессы, статистика: Задачи с решением. — М., 1985. — 232 с.
6. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М., 1985. — 232 с.
7. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 1999.
8. *Горбань С. Ф., Снижко Н. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: МАУП, 1999.
9. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Практитум з курсу “Теорія ймовірностей і математична статистика”, — К.: Вид-во КІНГ, 1991.
10. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Практитум з математичної статистики. — К.: Вид-во КІНГ, 1991.

Додаткова

11. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. — М.: Высш. шк., 1999.
12. *Шефтель З. Г.* Теорія ймовірностей. — К., 1994.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленко*
Комп’ютерне верстання *А. П. Нечипорук*

Зам. № ВКЦ-4429

Формат $60\times84/_{16}$. Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний. Наклад 50 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, пр. Червонозоряний, 119, літ. XX

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008