

МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА
з дисципліни
“ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ”
(для спеціалістів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2009

МАУП

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Додаткові розділи математичного аналізу — це фундаментальна математична дисципліна, навчальний матеріал якої оснований на використанні знань з математичного аналізу, лінійної алгебри, звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, чисельних методів та методів оптимізації.

Метою і завданням курсу є:

- вивчення теорії міри і властивостей функцій, чисельних методів і алгоритмів розв'язання операторних рівнянь з використанням принципу стискаючих відображень, а також некоректні по Тихонову задачі і методи їх розв'язання;
- розвиток умінь і навичок розв'язувати практичні задачі із використанням ПК.

Програма курсу має на меті забезпечити студентів необхідним базовим математичним апаратом для подальшого ґрунтовного вивчення наступних курсів: математичне програмування; математичне моделювання в економіці; математичні моделі і методи оптимального управління.

Підсумкова перевірка рівня засвоєння студентами матеріалу курсу, передбаченого програмою, здійснюється у вигляді заліку.

Підготовлено доцентами кафедри прикладної математики та програмування
М. П. Дяченком та В. О. Людвиченком

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування
(протокол № 10 від 19.06.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Дяченко М. П., Людвиченко В. О. Навчальна програма дисципліни “Додаткові розділи математичного аналізу” (для освітньо-кваліфікаційного рівня СП). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2009. — 14 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план дисципліни “Додаткові розділи математичного аналізу”, зміст дисципліни, питання для самоконтролю, список літератури.

- © Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2009
- © ДП «Видавничий дім «Персонал», 2009

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

дисципліни

“ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ”

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
	Змістовий модуль I. Коректні задачі в метричних (нормованих) просторах
1	Базові відомості з теорії метричних просторів
2	Нерухомі точки відображень в одновимірному та скінченно-вимірному просторі
3	Нерухомі точки відображень в банаховому просторі
4	Принцип нерухомої точки Шаудера та його застосування
	Змістовий модуль II. Некоректні задачі і методи їх розв'язання
5	Поняття некоректних задач і приклади класів некоректних задач
6	Визначення розв'язків некоректних задач різних класів і методи їх знаходження
Разом годин: 108	

ЗМІСТ

дисципліни

“ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ”

Змістовий модуль I. Коректні задачі в метричних (нормованих) просторах

Тема 1. Базові відомості з теорії метричних просторів

• **Відстань між точками** $\rho(x, y)$ в скінченно-вимірних та функціональних просторах:

Література [1–8]

• **Відкрита куля**, відкритий окіл точки метричного простору. Внутрішні точки околу і точки дотику до околу. Замикання. Щільність і сепарабельність в метричних просторах. Значення сепарабельності в теорії апроксимації.

Література [1–8]

• **Збіжність в метричному просторі**. Фундаментальні послідовності і повнота метричного простору. Повнота метричних просторів. Простори Банаха і Гільберта.

Література [1–8]

• **Компактність**. Компактність в собі і в метричному просторі. Обмеженість компактних множин. ε -мережа і загальний критерій компактності. Компактність в скінченно-вимірних просторах. Компактність в функціональних просторах.

Література [1–8]

• **Відображення**. Відображення множини в себе. Неперервність відображення. Взаємно-однозначні відображення. Розв'язування задачі як процес побудови оберненого відображення. Існування та єдність розв'язків задач. Поняття коректних (по Адамару) та некоректних задач.

Література [1–8]

Тема 2. Нерухомі точки відображень в одновимірному (скінченно-вимірному) просторі.

• Вкладені відрізки. Принцип вкладених (стягуючих) відрізків. Узагальнення принципу стягуючих відрізків для n -вимірного евклідового простору (теорема Брауера про нерухому точку).

Література [1–8]

• **Застосування теореми про нерухому точку в класичному аналізі**. Зведення пошуку коренів рівнянь до пошуку нерухомої точки нелінійного відображення. Метод Ньютона. Теорема Лагранжа про середнє. Теорема про існування розв'язку неявного рівняння двох змінних. Застосування теореми в обчислювальній практиці.

Література [1–8]

• **Застосування теореми про нерухому точку в алгебрі**. Лінійне відображення. Умова стисливості лінійного відображення в евклідовому просторі. Ітеративна процедура пошуку розв'язків системи лінійних рівнянь.

Література [1–8]

Тема 3. Нерухомі точки відображень в банаховому просторі.

• **Принцип стискаючих відображень в банаховому просторі**. Замкнуті кулі. Теорема про замкнуті кулі. Стискаюче відображення. Теорема Банаха про нерухому точку в повному метричному просторі. Побудова ітеративного процесу пошуку нерухомої точки для абстрактного відображення в повному метричному просторі.

Література [1–8]

• **Застосування теореми про нерухому точку в теорії інтегральних рівнянь**. Інтегральний оператор Фредгольма та умова його

стисливості. Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду. Існування та єдиність розв'язку лінійних неоднорідних інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду в просторах неперервних та інтегрованих з квадратом функцій. Метод ітерацій в знаходженні розв'язку цих рівнянь.

- Рівняння Вольтера та розповсюдження на них результатів теорії інтегральних рівнянь Фредгольма. Дослідження та розв'язування системи інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду. Застосування теореми про нерухому точку до дослідження та розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь.

Література [1–8]

- **Застосування теореми про нерухому точку в теорії диференціальних рівнянь.** Еквівалентність диференціальних та інтегральних рівнянь. Умова стисливості. Метод послідовних наближень в розв'язуванні диференціальних рівнянь.

Література [1–8]

Тема 4. Принцип нерухомої точки Шаудера та його застосування

- **Компактні оператори.** Поняття опуклості множин. Приклади опуклих множин. Поняття цілковитої неперервності (компактності) операторів. Умови цілковитої неперервності (теорема Немицького).

Література [1–8]

- **Нерухома точка нелінійного оператора.** Теорема Шаудера про нерухому точку компактного оператора. Застосування теореми Шаудера до дослідження нелінійного диференціального рівняння (теорема Пеано).

Література [1–8]

Змістовий модуль II. Некоректні задачі і методи їх розв'язання

Тема 5. Поняття коректно поставлених і некоректних задач. Приклади класів некоректних задач

- Поняття коректно поставлених і некоректно поставлених задач.
- Некоректна задача чисельного диференціювання..
- Рівняння Фредгольма 1-го роду як класичний зразок некоректних задач.

- Випадок знаходження кореня нелінійного рівняння, як некоректної задачі.

- Випадок знаходження точки мінімуму функції однієї змінної, як некоректної задачі.

- Системи лінійних алгебраїчних рівнянь вироджені та погано обумовлені, як некоректні задачі.

- Некоректні задачі оптимального планування (лінійного програмування).

- Некоректні задачі нелінійного програмування.

Література [9–13]

Тема 6. Визначення розв'язків некоректних задач різних класів і методи їх знаходження

- Визначення розв'язків некоректних задач різних класів
- Розв'язання класів некоректних задач методом регуляризації Тихонова (зведенням їх до задач умовної мінімізації)

- Метод невязки

- Метод квазірозв'язків

Література [9–13]

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка принципова різниця між точками простору та елементами множини?
2. В чому суть узагальнення поняття геометричної відстані між точками до відстані між елементами функціональних просторів?
3. Сформулюйте аксіоми метрики та наведіть приклади метрики в функціональних просторах.
4. Які з функцій

$$\rho(x, y) = |x - y|;$$

$$\rho(x, y) = x^3 - y^3;$$

$$\rho(x, y) = |x^3 - y^3|;$$

$$\rho(x, y) = |\arctg(x) - \arctg(y)|.$$

є метриками?

5. Як можна визначити відстань між функціями $y(t) = t$ та $y(t) = t^2$?

6. Що таке куля одиничного радіусу і як вона виглядає в метриках

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$$

з центрами в точках $x = 0$ та $x(t) = 0$?

7. Яка послідовність точок метричного простору називається збіжною?
8. Чи завжди границя збіжної послідовності належить цій послідовності?
9. Як називається збіжна послідовність, яка не обов'язково містить в собі границю?
10. Дайте означення фундаментальної послідовності точок метричного простору.
11. Який простір називається повним ?
12. Що таке замикання підмножини метричного простору ?
13. Чим відрізняється відкрита куля від замкнутої кулі в метричному просторі ?
14. Які точки множини метричного простору називають внутрішніми і які граничними ?
15. Що таке окіл точки в метричному просторі ?
16. Дайте означення щільності множини M в множині R спираючись на поняття: а) окіл точки, б) замикання, с) границі збіжної послідовності.
17. Дайте означення сепарабельності метричного простору.
18. Яка множина є скрізь щільною в евклідовому просторі?
19. Яка множина є скрізь щільною в просторі $C_{[a,b]}$?
20. Яка множина є скрізь щільною в просторі L_2 ?
21. Яке значення має поняття щільності для апроксимації функцій?
22. Яка підмножина метричного простору називається обмеженою?
23. В чому різниця між поняттями: збіжна послідовність і обмежена послідовність точок метричного простору?
24. Чи із всякої обмеженої множини метричного простору можна вибрати фундаментальну послідовність? Сформулюйте теорему Больцано-Вейерштраса.
25. Доведіть, що нескінченна обмежена множина базисних ортонормальних функцій простору L_2 , не є фундаментальною. Прокоментуйте, чи не суперечить це теоремі Больцано-Вейерштраса. Чим відрізняється наведена послідовність від об'єкту теореми Вейерштраса?
26. Як називаються множини функціонального метричного простору, для яких справедлива теорема Больцано-Вейерштраса?
27. Дайте означення предкомпактної та компактної множин в термінах теореми Больцано-Вейерштраса.

28. Що таке покриття множини? Дайте визначення компактності, спираючись на поняття покриття.
29. Сформулюйте ознаку компактності множини, спираючись на поняття ε -сітки (теорема Хаусдорфа).
30. Дайте означення обмеженості та рівномірної обмеженості функцій $\varphi(t) \in C_{[a,b]}$.
31. Дайте означення рівномірної неперервності та рівно степеневій неперервності функцій $\varphi(t) \in C_{[a,b]}$.
32. Сформулюйте критерій компактності для підмножин метричного функціонального простору $C_{[a,b]}$ (теорема Арцела).
33. Сформулюйте критерій компактності для підмножин метричного функціонального простору L_p (теорема Риса).
34. Дайте визначення норми та нормованого функціонального простору і сформулюйте критерій компактності підмножин цього простору (теорема Колмогорова).
35. Дайте означення відображення та неперервного відображення.
36. Дайте означення оберненого і взаємно однозначного відображення.
37. Визначте практичний зміст задачі побудови оберненого відображення, та дайте означення коректної по Адамару задачі.
38. Дайте означення компактного оператора.
39. Наведіть властивості компактних операторів.
40. Доведіть, що в скінченно-вимірному просторі лінійний оператор є компактним.
41. Довести, що оператор тотожного відображення не є компактним.
42. Дайте визначення стискаючого відображення.
43. Що таке нерухома точка відображення?
44. Дайте визначення принципу стягуючих відрізків в одновимірному просторі
45. Сформулюйте теорему Брауера про нерухому точку для скінченновимірному евклідовому простору.
46. Сформулюйте теорему про вкладені кулі в метричному просторі.
47. Сформулюйте принцип стискаючих відображень в довільному метричному просторі.
48. Викладіть ітеративний алгоритм пошуку нерухомої точки в довільному метричному просторі.

49. Зведіть задачу розв'язування нелінійного рівняння до пошуку нерухомої точки. Вкажіть спосіб перетворення нелінійного відображення в стискаюче.
50. Поясніть зв'язок між методом Ньютона і методом стискаючих відображень.
51. Сформулюйте теорему Лагранжа про середнє значення функції на інтервалі та доведіть теорему про існування розв'язку неявного рівняння (двох змінних). На прикладі викладіть методику її застосування.
52. Наведіть умову стисливості лінійного відображення в евклідовому просторі та зведіть розв'язування системи лінійних рівнянь до пошуку нерухомої точки.
53. Встановіть умову стисливості інтегрального оператора Фредгольма та зведіть задачу пошуку розв'язків інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду до пошуку нерухомої точки в функціональному просторі.
54. Проілюструйте можливість застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь.
55. Викладіть методику застосування теореми про нерухому точку для встановлення умов існування і єдності розв'язку задачі Коші для диференційного рівняння першого порядку.
56. Викладіть методику застосування теореми про нерухому точку для встановлення умов існування і єдності розв'язку задачі Коші для системи диференційних рівнянь першого порядку.
57. Сформулюйте теорему про нерухому точку в банаховому просторі (теорема Шаудера).
58. Суть поняття некоректних задач по Тихонову?
59. Довести, що задача чисельного диференціювання некоректна..
60. Довести, що задача розв'язання рівняння Фредгольма 1-го роду некоректна.
61. При якій умові задача знаходження кореня нелінійного рівняння некоректна ?
62. В яких випадках пошук розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь є некоректні задачі ?
63. Які задачі розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називаються погано обумовленими, некоректними ?
64. В яких випадках задачі оптимального планування (лінійного програмування) некоректні ?
65. В яких випадках задачі нелінійного програмування некоректні ?
66. Як визначається розв'язок рівнянь Фредгольма 1-го роду у випадку їх некоректності?
67. Як визначається розв'язок систем лінійних алгебраїчних рівнянь у випадку їх некоректності?
68. В чому суть методу регуляризації Тихонова розв'язування некоректних задач ?
69. В чому суть методу невязок розв'язування некоректних задач ?
70. В чому суть методу квазірозв'язку розв'язування некоректних задач ?
71. Якими методами забезпечується розв'язання погано обумовлених, некоректних СЛАР ?
72. В чому суть методу розв'язування некоректних задач зведенням їх до задач умовної мінімізації (коректних задач математичного програмування) ?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Баскаков А. Г. Сжимающие отображения и решения нелинейных уравнений. СОЖ, 1997. — № 5. — С. 118–121.
2. Колмогоров А. Н. Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
3. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. Наука, М., 1975.
4. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. — М., 1973.
5. Макаров И. П. Дополнительные главы математического анализа. — М., 1968.
6. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М., 1970.
7. Шашкин Ю. А. Неподвижные точки. — М.: Наука, 1989.
8. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1965. — 302 с.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974. — 223 с.
10. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач — М.: Наука, 1987. — 240 с.
11. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. — К.: Наук. думка, 1986. — 584 с.
12. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. — 115 с.
13. Молчанов И. Н. Машинные методы решения задач прикладной математики. — К.: Наук. думка, 2007. — 550 с.

Додаткова

14. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: — М.: Наука, 1987. — 598 с.
15. Бахвалов Н. С., Латин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях: Учебное пособие. — М.: Высш. шк., 2000. — 190 с.
16. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
17. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: Учебник для вузов. — М.: Высш. шк., 2002. — 840 с.

18. Зеленський К. Х., Ігнатенко В. М., Коц О. П. Комп'ютерні методи прикладної математики. — К.: Академперіодика, 2002. — 480 с.
19. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посіб. — К.: Наук. думка, 2005. — 344 с.
20. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. — 1963. — 151, № 3. — С. 501–504.
21. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. — 1963. — 153, № 1. — С. 49 – 52.
22. Тихонов А. Н., Гончарський А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983. — 200 с.
23. Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, 1995. — 312 с.
24. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980. — 330 с.
25. Страхов В. Н. Смена парадигмы в теории линейных некорректных задач. — М.: ОИФЗ РАН, 2001. — 48 с.
26. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
27. Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М.: Наука, 1986. — 182 с.
28. Васин В. В., Агеев А. Л. Некорректные задачи с априорной информацией. — Екатеринбург: Уральская издательская фирма "Наука". — 1993. — 263 с.
29. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравитации. — К.: Наук. думка, 1978. — 228 с.
30. Засядько А. А. Сравнение методов Тихонова и многокритериальной оптимизации при решении задачи восстановления сигналов // Проблемы управления и информатики, 2003. — № 5. — С. 60 – 67.
31. Засядько А. А. Методи розв'язання некорректних задач на основі багатокритеріальної оптимізації і диференціальних перетворень для автоматизованих систем управління /Автореферат дисертації на здобуття вченого ступеня доктора технічних наук /. — К., 2006. — 38 с.

ЗМІСТ

Пояснювальна записка.....	3
Тематичний план дисципліни “Додаткові розділи математичного аналізу”	4
Зміст дисципліни “Додаткові розділи математичного аналізу”	4
Питання для самоконтролю.....	7
Список літератури	12

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор
Комп'ютерне верстання *А. А. Кучерук*

Зам. № ВКЦ-4073

Підп. до друку 23.02.09. Формат 60 84/16. Папір офсетний.
Друк ротатійний трафаретний. Ум. друк. арк. 1,98. Обл.-вид. арк. 1,76.

Наклад 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»

03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. ХХ

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008*