МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

**Методичні рекомендації
щодо забезпечення самостійної роботи студентів
з дисциплін**

“ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ АНАЛІЗУ” ТА “ТЕОРІЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ”

(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2010

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики
та програмування *М. П. Дяченком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики
та програмування (протокол № 10 від 19.06.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Дяченко М. П. Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисциплін “Додаткові розділи аналізу” та “Теорія спеціальних функцій” (для бакалаврів). — К.: ДП “Вид. дім “Персонал”, 2010. — 24 с.

Методичні рекомендації містять пояснювальну записку, зміст дисциплін “Додаткові розділи аналізу” та “Теорія спеціальних функцій” з питаннями для самоконтролю та прикладами, а також список літератури.

Призначена для самостійної роботи студентів денної форми навчання.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Метою курсу є завершення математичної підготовки бакалавра. У ньому вміщено традиційні доповнення до курсів математичного та функціонального аналізу, математичної фізики та диференціальних рівнянь, що мають фундаментальне значення в теоретичних дослідженнях і розв'язуванні практичних задач прикладного аналізу. В першу чергу — це основи теорії міри та теорії узагальнених функцій. До них примикають теорії лінійних інтегральних рівнянь та спеціальних функцій, апарат останньої має безпосереднє відношення до побудови та обґрунтування методів розв'язування задач прикладного аналізу.

Відповідно до вимог сучасності, у викладанні математичних дисциплін здійснюється зміщення центру ваги з навчання за парадигмою "отримання знань" до навчання за парадигмою "добування знань". Навчальний процес при цьому трансформується у форму скороченого процесу відкриття студентами відкритого. Зміна акцентів у навчанні змінює і співвідношення між різними формами навчання. Так, лекції стають своєрідним введенням до проблематики навчальної теми, тоді як активне засвоєння отриманої інформації, поглиблення її змісту та творче осмислення здійснюється в результаті самостійної роботи в аудиторії (семінарські та практичні заняття) і за її межами.

Метою методичних рекомендацій є надання практичної допомоги студентам в організації позааудиторної самостійної роботи при вивченні дисциплін "Додаткові розділи аналізу" та "Теорія спеціальних функцій", що тісно пов'язані між собою метою і змістом. Рекомендації містять в собі питання навчальних програм названих дисциплін, посилання на інформаційні джерела, де вони роз'яснюються, питання для самоконтролю та приклади практичного застосування навчального матеріалу для перевірки і закріплення рівня його засвоєння.

ЗМІСТ
дисциплін
"ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ АНАЛІЗУ"
ТА "ТЕОРІЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ"

Змістовий модуль І. Елементи теорії множин

Модуль передбачає повторення фундаментальних положень та висновків розділів дискретної математики, що стосувались скінчених множин, а також поглиблення і узагальнення їх змісту на випадок злічених та незлічених множин.

Необхідно опрацювати і засвоїти:

1.1. *Множини.* Визначення множини та підмножини, універсальної та порожньої множин. Способи задавання множин та операції над множинами: об'єднання та перетин, різниця та симетрична різниця, доповнення. Двоїстість доповнення. Належність елементу множині і включення одної множини до іншої. Замикання множини відносно операції, визначеної над її елементами. Ознаки множин. Розбиття множин на класи за ознакою. Фактор-множина. Умови допустимості розбиття за ознакою.

1.2. *Відображення множин.* Поняття образу і прообразу. Властивості образів і прообразів. Типи відображень: сюр'єкція, ін'єкція та бієкція. Співвідношення між поняттями відображення і функції. Обернені відображення, властивості обернених відображень.

1.3. *Оцінка множин***.** Скінчена та нескінчена множини. Властивості нескінчених множин. Злічені та незлічені множини. Незліченість множини дійсних чисел. Потужність множини. Одиниці потужності: потужність зліченої множини $\aleph_0$ (алеф-0) і потужність континуума $\aleph$ (c). Еквівалентність множин. Два способи порівняння множин: перерахуванням та відображенням (теорема Кантора-Бернштейна). Співвідношення між потужностями множини і множини множин.

1.4. *Упорядкування множин.* Визначення часткового і цілковитого порядку. Символи порядку. Мінімальний і максимальний елементи, верхня та нижня грані упорядкованої множини. Ланцюг. Відображення, що не порушують порядок (ізоморфізм). Властивості впорядкованих множин. Способи упорядкування множин. Аксіома вибору, теореми Цермело, Хаусдорфа та лема Цорна.

1.5. *Системи множин.* Поняття системи множин. Нуль і одиниця системи множин. Розклад довільної множини за системою попарно неперетинних множин. Класифікація систем множин: кільце, півкільце, алгебра. Властивості кільця і півкільця стосовно об'єднання і перетину скінченого числа множин. Кільце, породжене півкільцем.

Узагальнення властивостей об'єднання і перетину скінченого числа множин на випадок зліченого числа множин. Поняття σ — та δ – кілець, σ – та δ – алгебр. Мінімальне кільце і мінімальна алгебра на системі множин. Борелівська множина.

Література [1–2]

Студент повинен *вміти:*

вільно користуватись теоретико-множинними визначеннями та поняттями при формулюванні та розв'язуванні задач, розрізняти правильні і неправильні співвідношення між окремими множинами, між множинами і елементами множин, будувати множини і системи множин з використанням означених операцій, будувати відображення множин, порівнювати скінчені і нескінчені множини, доводити справедливість теоретико-множинних співвідношень.

Питання для самоконтролю та приклади:

1.1. Наведіть основні способи задавання множин. Дайте означення рівних множин, проілюструйте подібними прикладами:

$$G = \{\text{круг, сектор, сегмент}\},$$

$$G = \{x \mid x\text{- круг та його елементи}\},$$

де множина G задана двома способами: перерахуванням елементів та об'єднуючою властивістю елементів, що їй належать.

1.2. Охарактеризуйте відношення належності та включення, сформулюйте їх властивості. Вкажіть відмінності між цими відношеннями. Проаналізуйте приклади та відповіді на них:

Приклад 1: чи правильне відношення належності

$$\{3\} \in \{\{1\}\{2\}, 3\} ?$$

Відповідь: ні, неправильне, тому що елемент{ 3} відсутній в пере-лі-ку, що визначає множину справа від знаку $\in$. Присутній у множині елемент 3 та елемент{ 3} є елементами різної природи.

Приклад 2: чи правильне відношення включення

$$\{3\} \subseteq \{\{1\}\{2\}, 3\} ?$$

Відповідь: так, правильне, тому що множина { 3}, що складається з одного елемента 3 є підмножиною множини елементів {{1} {2}, 3}.

1.3. Доведіть зліченість множини раціональних чисел і незліченість множини дійсних чисел.

1.4. Нехай

$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ — універсальна множина.

$$A = \{1,3,5,6\}, B = \{1,2,3,5,7\}, C\{2,5,7,8\}$$

Визначте, з яких елементів складена задана множина:

$$(A \setminus D)\Delta(B \cap \overline{C}) .$$

1.5. За допомогою діаграми Венна підтвердити або спростувати таке твердження: якщо $A = B \cup C$ то $A \setminus B = C$

1.6. Установіть бієктивне відображення множини точок відрізка на множину точок прямої.

1.7. Доведіть, що множина нулів многочленів з раціональними коефіцієнтами є зліченою.

Порада: Врахуйте, що множина раціональних чисел є зліченою.

1.8. Площину можна розглядати як об’єднання множини паралельних прямих. Як ще можна розбити площину на класи множин та що при цьому буде класом еквівалентності і що фактор-множиною?

1.9. Покажіть, що злічена множина еквівалентна своїй нескінченій частині.

1.10. В чому різниця між верхньою і нижньою межею впорядкованої множини та мінімальним і максимальним елементами цієї ж множини?

1.11. Що називають системою множин та дайте визначення одиниці в системі множин.

1.12. Покажіть, що будь-яке кільце має порожню множину.

1.13. Доведіть, що система множин, яка складається з порожньої $\varnothing$ та будь-якої непорожньої множини A утворює алгебру з одиницею A .

1.14. Доведіть, що система скінчених підмножин будь-якої не порожньої множини A є кільцем.

1.15. Покажіть, що в умовах попередньої задачі система скінчених підмножин утворює алгебру тоді і тільки тоді, коли множина A є також скінченою.

1.16. Доведіть, що кільце є замкнутою системою множин відносно операцій об’єднання, перетину, різниці і симетричної різниці.

1.17. Дайте визначення півкільця та наведіть приклади півкілець.

1.18. Доведіть, що перетин будь-якої множини кілець є кільцем.

1.19. Опишіть конструкцію кільця, породженого напівкільцем.

1.20. Доведіть твердження: елементи кільця, побудованого над півкільцем, допускають скінчені розклади за елементами півкільця.

1.21. Опишіть конструкцію σ-алгебри множин.

1.22. Дайте визначення σ – кільця та δ – кільця, σ – та δ – алгебри.

1.23. Доведіть, що поняття σ – алгебри та δ – алгебри збігаються.

1.24. Дайте визначення борелівської системи множин.

Змістовий модуль II. Міра та інтеграли за мірою

Модуль має за мету узагальнення поняття міри і інтеграла за мірою (на осі, площині і в просторі), якими оперує класичний аналіз, на випадок довільної множини довільної природи.

Необхідно опрацювати і засвоїти:

2.1. *Міру елементарних множин на осі, площині і в просторі.* Властивості елементарних множин стосовно об'єднання, перетину, різниці та симетричної різниці елементарних множин. Міра відрізка, прямокутника та паралелепіпеда. Міра елементарних множин. Властивості міри: невід'ємність, адитивність та монотонність.

2.2. *Міру довільних множин.* Покриття довільної множини елементарними. Поняття і властивості зовнішньої міри довільної множини. Замкнутість класу вимірних множин відносно операцій перетину та об'єднання. Вимірність об'єднання і перетину скінченого та зліченого числа вимірних множин. Міра об'єднання попарно не перетинних вимірних множин. Вимірність доповнення.

2.3. *Абстрактну міру.* Означення функції множин. Скінчено- та злічено-адитивні функції множин. Необхідна і достатня ознака зліченої аддитивності функції множин. Властивості аддитивної функції на кільці. Визначення абстрактної міри як невід'ємної та зліченоадитивної функції на множинах півкільця. Поняття скінченої та σ — скінченої міри. Означення продовження міри. Продовження міри з півкільця на породжене ним кільце. Єдиність продовження міри та його властивості. Відстань між множинами за мірою. Міра Лебега-Стільтьєса. Абсолютно неперервна, дискретна і сингулярна міри. Поняття неперервності та σ – аддитивності міри.

2.4. *Вимірні функції.* Множини Лебега та означення вимірності функцій. Властивості вимірних функцій. Замкнутість класу вимірних функцій відносно арифметичних операцій.

Означення еквівалентності функцій та вимірність еквівалентних функцій. Збіжність за мірою і збіжність майже скрізь. Зв'язок між поняттями збіжності за мірою і рівномірною збіжністю. Теорема Єгорова.

2.5. *Інтеграл Лебега.* Обмеженість змісту інтеграла Рімана. Приклад функції Дирихле. Означення простих функцій. Властивості простих функцій. Конструювання інтеграла Лебега для простих функцій. Узагальнення поняття інтеграла Лебега на довільну множину скінченої міри. Означення інтегровності за Лебегом. Умови коректності означення. Властивості інтеграла Лебега. Умова допустимості граничного переходу під знаком інтеграла. Інтеграл Лебега від необмеженої функції. Застосування зрізу для інтегрування необмежених функцій.

Інтеграл Лебега як функція множини. Заряд. Розклади Хана і Жордана. Типи зарядів. Абсолютно неперервні заряди. Теорема Радона-Никодима.

2.6. *Інтеграл Стільтьєса.* Твірна функція, міра за твірною функцією (міра Лебега — Стільтьєса). Розклад міри Лебега — Стільтьєса на дискретну, абсолютно неперервну та сингулярну міри. Конструювання інтеграла Лебега-Стільтьєса. Інтеграл Лебега — Стільтьєса від стрибкоподібної та абсолютно неперервної функцій. Деякі застосування інтеграла Стільтьєса в теорії ймовірностей. Порівняння інтегралів Лебега-Стільтьєса і Рімана-Сільтьєса (з класичного аналізу).

2.7. *Диференціювання неозначеного інтеграла Лебега.* Монотонні функції. Диференційованість монотонної функції. Абсолютно неперервні функції та функції з обмеженою варіацією. Їх властивості. Похідна інтеграла Лебега за верхньою межею. Похідна неозначеного інтеграла Лебега. Відновлення функції за її похідною.

Література [1; 2]

Студент повинен *вміти:*

виводити математичні абстракції теорії міри з узагальнень практичного досвіду вимірювання об'єктів, розпізнавати відношення між абстракціями за відношеннями між їх конкретними проявами, застосовувати знання з теорії множин і теорії міри для обґрунтування узагальнень класичного аналізу на область всіх вимірних множин та використовувати узагальнення при розв'язуванні завдань.

Питання для самоконтролю та приклади

2.1. Перерахуйте елементарні вимірні об'єкти та дайте визначення елементарної множини.

2.2. Доведіть, що об'єднання, перетин, різниця і симетрична різниця двох елементарних множин є також множиною елементарною.

2.3. Що є мірою відрізка, прямокутника, паралелепіпеда?

2.4. Чи може мати континуальна множина міру нуль?

2.5. Обґрунтуйте перехід від вимірювання елементарних множин до вимірювання множин довільного змісту. Використайте для цього поняття покриття множин елементарними множинами.

2.6. Дайте визначення функції над множинами.

2.7. Які функції називаються монотонними, аддитивними?

2.8. Дайте визначення поняття зовнішньої міри, її властивості.

2.9. Доведіть твердження: якщо множини A та B належать кільцю, $B \subset A$ і значення аддитивної функції $f(A)$ скінчене, то $f(B)$ є також скінченим.

2.10. Доведіть, що рівність $f(\varnothing) = 0$ має місце, якщо існує хоча б одна множина A, що належить кільцю, для якої $f(A)$ скінчене.

2.11. Дайте означення та наведіть приклади скінчено- та зліченоаддитивної міри.

2.12. Дайте означення вимірності множин за Лебегом.

2.13. Доведіть, що всі вимірні множини належать σ – алгебрі.

2.14. Дайте означення еквівалентності вимірних функцій.

2.15. Визначення поняття збіжності майже скрізь.

2.16. Сформулюйте теорему Єгорова.

2.17. Поясніть поняття відстані між множинами за мірою.

2.18. Поясніть поняття збіжності за мірою.

2.19. Яка міра зліченої множини?

2.20. Дайте означення функції Дирихле.

2.21. Доведіть вимірність функції-константи.

2.22. Якщо функція f є вимірною на множині E, чи буде вона вимірною на вимірній підмножині множини E?

2.23. Доведіть, що функція f буде вимірною на множині E, якщо E є скінченим або зліченим об'єднанням множин, на кожній з яких функція f вимірна.

2.24. Доведіть вимірність неперервної на вимірній множині функції.

2.25. Знайти Лебегову міру множини точок квадрата [0,1]*[0,1], хоча б одна координата яких раціональна.

2.26. Довести, що неперервні функції еквівалентні тільки тоді, коли вони рівні.

2.27. Довести вимірність функції $f(x) = x^2$.

2.28. Наведіть значення інтеграла за мірою від постійної функції.

2.29. Чи можна виносити константу з-під знака інтеграла Лебега?

2.30. Доведіть аддитивність інтеграла Лебега.

2.31. Обчисліть інтеграл Лебега функції Дирихле.

2.32. Що таке абсолютна неперервність інтеграла Лебега?

2.33. Сформулюйте поняття ймовірнісного простору в термінах теорії мір.

2.34. Дайте приклад об'єктів теорії ймовірності у вигляді інтеграла Лебега.

2.35. Наведіть приклад функції, яка неінтегровна за Ріманом, але інтегровна за Лебегом.

2.36. Поясніть зміст інтеграла Лебега на множинах нескінченої міри.

2.32. В чому полягає ідея зрізу при обчисленні інтеграла Лебега від необмеженої функції?

2.33. Обчисліть інтеграл Лебега функції

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, \ x - \textit{раціональне} \\ \sin(x), \ x - \textit{ірраціональне} \end{cases}$$

на відрізку $[0, \dfrac{\pi}{2}]$

2.21. Обчисліть інтеграл Лебега функції

$$f(x) = \begin{cases} 2^n, x \in (\dfrac{1}{3^n}, \dfrac{1}{3^{n-1}}) \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

2.22. На відрізку [1, 2] обчисліть інтеграл Лебега від необмеженої функції

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

2.23. Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не є сумовною на відрізку [0,1] (скористайтесь методом зрізу).

2.24. Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ є сумовною на відрізку [0,1] та обчисліть значення інтеграла Лебега цієї функції.

2.25. Обчисліть інтеграл Стільтьєса $\int_0^4 x^2 dF$ за функцією

$$F(x)=\begin{cases}2x, x\le 2\\ 5+x/2, x>2\end{cases}$$

2.26. Обчисліть інтеграл Стільтьєса $\int_{1\backslash 2}^{3} xdF$ за функцією

$$F(x)=\begin{cases}1n(x-1), & x\le 2\\ x, & x>2\end{cases}$$

2.27. Обчисліть варіацію функції

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1-x & 0<x<1\\ 5 & x=1\end{cases}$$

2.28. Доведіть, що функція

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x^2\cos(\dfrac{\pi}{x}) & x\neq 0\end{cases}$$

має обмежену варіацію.

2.30. Знайдіть повну варіацію функції

$F(x)=\cos^2(x)$ на відрізку $[0, \dfrac{3\pi}{2}]$

2.31. Доведіть, що функція

$$F(x)=\begin{cases}x\cos(\dfrac{\pi}{2x}) & 0<x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$$

має необмежену варіацію.

Змістовий модуль III. Елементи теорії узагальнених функцій

Ставиться за мету перекинути місток між поняттями неперервної, розривної та дискретно заданої функцій, підвести під них єдину теоретичну базу та ознайомити студентів з методами її застосування.

Необхідно опрацювати і засвоїти:

3.1. *Обмеженість класичного поняття функції та ідея узагальнення.* Проблема математичного опису, миттєвої сили, точкового заряду, дискретного розподілу мас та проблема диференціювання функцій, що не мають класичних похідних. Інтуїтивне поняття δ – функції. Означення фінітної функції та збіжності послідовності нескінчене число раз диференційних фінітних функцій. Зв'язок між функціями і функціоналами. Поняття основного простору та основних функцій.

3.2. *Узагальнені функції.* Означення та носій узагальненої функції. Регулярні та сингулярні узагальнені функції. Формули Сохоцького. Лінійна заміна змінних в узагальнених функціях. Поняття локально інтегровної функції. Зв'язок між локально інтегровними і узагальненими функціями.

Визначення δ–функції. Зміщена δ–функція та її похідна. Регуляризація функцій з особливостями. Головне значення невизначеного, в класичному розумінні, інтеграла. Дії над узагальненими функціями: додавання функцій, множення функції на число, множення на нескінчено гладку функцію. Поняття простору узагальнених функцій. Граничний перехід, диференціювання і похідна в просторі узагальнених функцій. Властивості диференціювання.

Згортка звичайних і узагальнених функцій. Умови існування згортки. Диференціювання згортки. Властивості згортки.

δ–подібні послідовності, збіжність у просторі узагальнених функцій. Зміст узагальненої функції з точковим носієм. Щільність множини основних функцій у просторі узагальнених функцій.

Розклад узагальнених функцій з точковим носієм і фінітних функцій за похідними. Застосування узагальнених функцій для представлення рядів, розбіжних у класичному розумінні.

Відновлення функції за її похідною. Диференціальні рівняння в просторі узагальнених функцій та їх розв'язування.

Функції повільного росту. Узагальнені функції повільного росту та функції з точковим носієм. Прямий добуток узагальнених функцій повільного росту. Згортка узагальнених функцій повільного росту.

Література [3–6]

Студент повинен *вміти:*

застосовувати узагальнені функції в теоретичних дослідженнях та розв'язуванні практичних завдань.

Питання для самоконтролю та приклади до теми:

3.1. Наведіть приклади задач, нерозв'язних у звичайних функціях.

3.2. Що означає розширення множини функцій?

3.3. Дайте означеня основної функції.

3.4. Наведіть приклади основних функцій.

3.5. Обґрунтуйте достатність запасу основних функцй.

3.6. Визначте поняття збіжності в просторі основних функцій.

3.7. Сформулюйте поняття узагальненої функції.

3.8. Покажіть, що поняття узагальненої функції справді є розширенням поняття функції.

3.9. Що таке носій узагальненої функції?

3.10. Поясніть зміст поняття регулярної узагальненої функції?

3.11. Що таке сингулярна узагальнена функція?

3.12. Які властивості звичайних функцій зберігають узагальнені?

3.13. Як обчислити похідну узагальненої функції?

3.14. Наведіть приклад сингулярної узагальненої функції з неточковим носієм.

3.15. Опишіть властивості прямого добутку узагальнених функцій.

3.16. Опишіть поняття згортки узагальнених функцій.

3.17. Поясніть зміст диференціювання згортки узагальнених функцій.

3.18. Покажіть, що похідна від регулярної узагальненої функції збігається з її похідною в класичному розумінні.

3.19. Дайте означення функції Хевісайда та знайдіть похідну від неї.

3.20. Поясніть зміст похідної δ–функції.

3.21. Як визначається похідна стрибкоподібної функції в просторі узагальнених функцій?

3.18. Наведіть приклад узагальненої функції повільного росту.

3.19. Доведіть комутативність та асоціативність згортки.

3.20. Виведіть формулу похідної для згортки.

3.21. Доведіть неперервність згортки.

3.22. Доведіть щільність множини фінітних функцій у просторі узагальнених функцій.

3.23. Наведіть значення суми ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(ix)}{i}$ в просторі узагальнених функцій.

3.24. Чому дорівнює похідна від узагальненої функції, представленої сумою п.3.23?

3.25. Наведіть методику пошуку розв’язків диференціального рівняння в класі узагальнених функцій.

3.26. Чи існують у просторі узагальнених функцій такі розв'язки системи n лінійних диференціальних рівнянь з n невідомими, які відрізняються від її розв'язків у класичному розумінні?

Змістовий модуль IV. Лінійні інтегральні рівняння

Зміст модуля є ілюстрацією ефективності методів функціонального аналізу та теорії спеціальних функцій у дослідженні одного класу лінійних інтегральних операторів, що мають практичну цінність, та в побудові методів пошуку нерухомих точок цих операторів.

Необхідно опрацювати і засвоїти:

4.1. *Інтегральний оператор Фредгольма.* Ядро оператора. Цілковита неперервність оператора Фредгольма в просторах неперервних $C_{[0,1]}$ і інтегровних з квадратом $L^2_{[0,1]}$ функцій. Умова самоспряженості (симетричності) інтегрального оператора Фредгольма. Власні числа і власні функції оператора. Властивості власних чисел та власних функцій оператора Фредгольма з симетричним ядром.

4.2. *Лінійні інтегральні рівняння.* Інтегральні рівняння Фредгольма першого та другого родів. Однорідні та неоднорідні рівняння. Поняття коректності задач за Адамаром. Рівняння Фредгольма першого роду як приклад некоректної задачі.

Рівняння Фредгольма другого роду. Визначники Фредгольма, метод Фредгольма розвязуваня інтегральних рівнянь. Теореми Фредгольма.

Метод стискаючих відображень у розв'язуванні рівнянь Фредгольма другого роду, умова збіжності методу.

Теорема про обережний оператор $(I-A)^{-1}$. Застосування теореми до побудови розв'язків рівнянь Фредгольма другого роду. Застосування теореми Гілберта-Шмідта до побудови розв'язків рівнянь типа $(I-\lambda A)\,x(t) = f(t)$, зв'язок з рівнянням Фредгольма другого роду. Поняття резольвентного ядра, його знаходження методом ітерацій ядра оператора Фредгольма. Ряд Неймана.

Розклад розв'язку інтегрального рівняння за повною системою координатних функцій. Метод Бубнова-Гальоркіна в розв'язуванні інтегральних рівнянь.

Побудова резольвенти оператора Фредгольма методом ітерації ядер. Поняття виродженого ядра. Теореми Фредгольма для рівнянь з виродженими ядрами, методика розв'язування інтегральних рівнянь з виродженими ядрами.

Інтегральні рівняння Вольтера, загальна характеристика і методи розв'язування.

Література [7–8]

Студент повинен *вміти:*

класифікувати лінійні інтегральні рівняння, аналізувати та доводити їх властивості, користуючись методами функціонального аналізу обґрунтовувати вибір раціонального методу розв'язування та знаходити розв'язки цих інтегральних рівнянь.

Питання для самоконтролю та приклади до теми

4.1. Сформулюйте поняття лінійного інтегрального рівняння.

4.2. Дайте визначеня рівняння Фредгольма першого роду та другого роду?

4.3. Дайте визначення коректної за Адамаром задачі та поясніть чому рівняння Фредгольма першого роду є некоректною задачею?

4.4. Що таке рівняння Вольтера першого роду та другого роду?

4.5. Що таке однорідне та неоднорідне інтегральні рівняння?

4.6. Опишіть процедуру зведення інтегрального рівняння Вольтера до інтегрального рівняння Фредгольма.

4.7. Що таке оператор Фредгольма?

4.8. Наведіть поняття ядра оператора Фредгольма.

4.9. Наведіть поняття спряженого інтегрального рівняння.

4.10. Що таке симетричне ядро?

4.11. Що таке вироджене ядро?

4.12. Наведіть алгоритм розв'язання інтегральних рівнянь з виродженим ядром.

4.13. Сформулюйте теореми Фредгольма для вироджених ядер.

4.14. Сформулюйте теореми Фредгольма в загальному випадку.

4.15. Наведіть приклади задач, що зводяться до інтегральних рівнянь.

4.16. Доведіть компактність оператора Фредгольма в просторі неперервних функцій $C\,[a, b]$.

4.17. Доведіть компактність оператора Фредгольма у просторі неперервних функцій $L^2_{[a,\, b]}$.

4.18. Доведіть, що власні числа і власні функції інтегрального оператора $Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$ є дійсними, якщо $K(t, s) = K(s, t)$.

4.19. Наведіть загальну форму розв'язку інтегрального рівняння

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

у вигляді розкладу за системою власних функцій, та визначіть умови, за яких розв'язок рівняння існує.

4.20. Довести, що інтегральне рівняння

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

має розвя'зок, якщо

$$\lambda < \frac{1}{K},$$

де

$$K = \max_{t,s\in[0,1]} |K(t,s)|$$

4.21. Довести, що інтегральний оператор

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

є самоспряженим, якщо

$$K(t,s) = K(s,t).$$

4.22. Довести, що інтегральне рівняння

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

має розвя'зок, якщо $1/\lambda$ не є власним числом оператора Фредгольма.

4.23. Довести, що у випадку симетричного ядра власні функції оператора Фредгольма попарно ортогональні, а власні числа — дійсні.

4.24. Знайдіть методом послідовних ітерацій резольвенту лінійного оператора Фредгольма другого роду з ядром $K(t,s) = e^{t-s}$.

4.25. Зведіть інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром типа $K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s)$ до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

4.26. Визначити наближений розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду $\varphi(t) = t + \int_{-1}^{1} st\varphi(s)ds$ у вигляді розкладу

$\varphi(t) = \sum_i a_i u_i(t)$ за повною системою поліномів Лагранжа $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = t$, $u_3(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}$, ... з точністю до 3-х складових.

4.27. Як застосувати систему поліномів Лагранжа для розв'язування рівняння Фредгольма другого роду з областю визначення $[0,1]$

Теорія спеціальних функцій

Змістовий модуль V. Джерела і базис теорії

Мета — ознайомлення студентів з практичними задачами математичної фізики, які породжують зразки окремих систем спеціальних функцій та дослідження властивостей диференціального оператора другого порядку, що визначає загальні властивості всіх систем спеціальних функцій незалежно від їх конкретної форми.

Необхідно опрацювати і засвоїти

5.1. *Хвильове рівняння і рівняння Гамільтона*. Природа та загальний вигляд рівняння Гамільтона. Поняття розділення змінних, добуток Лапласа. Рівняння Гамільтона та вигляд добутку Лапласа на прикладах прямокутних, циліндричних і сферичних систем координат. Формальний перелік криволінійних координатних систем, для яких змінні розділяються, та пов'язаних з ними множин спеціальних функцій. Розклад розв'язків граничних задач за повними системами ортогональних координатних функцій. Проблема обґрунтування повноти і ортогональності множин спеціальних функцій як систем координатних функцій.

5.2. *Самоспряжені диференціальні оператори*. Самоспряжені дифе-ренціальні оператори як джерело повних систем ортогональних координатних функцій. Загальний вигляд самоспряженого диференціального оператора. Спряжені граничні умови. Власні значення та власні функції самоспряженого диференціального оператора, їх властивості.

5.3. *Диференціальний оператор Штурма-Ліувілля*. Умови самоспряженості оператора. Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку та зведення його до рівняння Штурма-Ліувілля. Умови ортогональності розв'язків рівняння Штурма-Ліувілля. Вагові коефіцієнти, ортогональність з вагою. Рівняння для спеціальних функцій як часткові випадки рівняння Штурма-Ліувілля.

5.4. *Гіпергеометричне рівняння.* Гіпергеометричне рівняння і гіпергеометрична функція Гаусса. Ваговий коефіцієнт, що перетворює гіпергеометричний диференційний оператор в самоспряжений. Поліноми Якобі, Лежандра, Чебишева, Ерміта, Лагерра та ультрасферичні поліноми як часткові випадки гіпергеометричної функції. Зв'язок між поліномами Чебишева і гармонічними функціями.

Література [9–10]

Студент повинен *вміти:*

вільно володіти поняттями основ теорії самоспряжених диференціальних операторів, виводити умови самоспряженості і доводити властивості диференціальних самоспряжених операторів взагалі і оператора Штурма-Ліувілля зокрема, та застосовувати теоретичні положення для дослідження розв'язків частинних випадків диференціальних рівнянь другого порядку, що визначають множини спеціальних функцій.

Питання для самоконтролю та приклади до теми

5.1. Наведіть хвильове диференційне рівняння та пов'язане з ним рівняння Гельмгольця в декартових координатах.

5.2. Поясніть зміст поняття “рівняння зі змінними, що розділяються”.

5.3. Для якої форми границі розділяються змінні в декартовій системі координат?

5.4. Перерахуйте відомі вам системи криволінійних координат, в яких змінні для рівняння Гельмгольця розділяються.

5.5. Наведіть схему розв'язання рівняння Гельмгольця методом Фур'є.

5.6. З введенням яких спеціальних функцій пов'язане розділення змінних для рівняння Гельмгольця в циліндричних та сферичних системах координат ?

5.7. В чому ви вбачаєте теоретичну і практичну цінність апарату спеціальних функцій?

5.8. Наведіть зв'язок між лінійними спряженими диференційними операторами та умову самоспряженості.

5.9. Як виглядає диференціальний оператор Штурма-Ліувілля та умова його самоспряженості?

5.10. При яких умовах задача на власні значення оператора Штурма-Ліувілля визначає множину гармонічних функцій?

5.11. Проаналізуйте зв'язок між задачею на власні значення для диференціального оператора другого порядку в загальній формі і аналогічною задачею для оператора Штурма-Ліувілля.

5.12. Що таке "зважена ортогональність"?

5.13. Наведіть загальний вигляд диференційного рівняння Гауса.

5.14. Які умови самоспряженості у диференціального оператора Гауса?

5.15. Який зв'язок між рівнянням Гауса и рівнянням Штурма-Ліувілля?

5.16. Знайдіть розклад розв'язку рівняння Гауса в ступеневий ряд.

5.17. Поясніть, що таке "гіпергеометрична функція".

5.18. За яких умов гіпергеометрична функція перетворюється в:

a) поліноми Якобі;
b) ультрасферичні поліноми;
c) поліноми Лежандра;
d) поліноми Чебишева першого та другого родів;
e) ермітові поліноми;
f) поліноми Лагерра.

Змістовий модуль VI. Аналітичне подання і властивості спеціальних функцій

Модуль є введенням до теорії найбільш вживаних в обчислювальній практиці систем спеціальних функцій на основі дослідження відповідних їм диференційних рівнянь та аналітичних форм представлення розв'язків цих рівнянь.

Необхідно опрацювати і засвоїти

6.1. *Гамма-функції*. Визначення гамма-функції. Основні властивості гамма-функцій, функція ψ (*x*), функція B (p, q).

6.2. *Рівняння Гаусса*. Розклад розв'язків диференціального рівняння в ступеневі ряди. Розв'язання гіпергеометричного рівняння. Гіперге-ометричний ряд та дослідження його збіжності. Рекурентні перетво-рення в гіпергеометричних рядах.

6.3. *Циліндричні функції*. Рівняння Бесселя. Розв'язки рівняння Бесселя з довільним порядковим номером. Лінійно незалежні розв'язки рівняння Бесселя з цілими порядковими номерами.

Функції Бесселя першого роду. Зв'язок $J_N(z)$ і $J_{-N}(z)$ при цілому N. Рекурентні формули. Застосування рекурентних співвідношень для обчислення розкладів у ряди за функціями Бесселя. Функції Бесселя напівцілого порядку. Функція Бесселя другого роду або функції Неймана. Функції Бесселя третього роду або функції Ханкеля. Функції Бесселя від уявного аргументу. Ортогональність функцій Бесселя. Твірна функція функцій Бесселя. Інтеграл Бесселя. Інтеграл Пуассона.

Асимптотичні формули для функцій Бесселя (асимптотики для великих значень порядкового номера і великих значень аргументу).

Застосування функцій Бесселя. Рівняння Ломмеля.

6.4. *Сферичні функції Лежандра.* Диференціальне рівняння, що визначає сферичні функції. Зв'язок з граничними задачами математичної фізики в сферичній системі координат. Рівняння Лежандра. Розклад розв'язків рівняння Лежандра в ступеневі ряди. Рекурентні співвідношення, що визначають коефіцієнти розкладів. Поліноми Лежандра. Твірна функція поліномів Лежандра. Рекурентні формули. Формула Родріга. Ортогональність поліномів Лежандра. Локалізація коренів поліномів Лежандра. Функції Лежандра першого та другого родів. Приєднані функції Лежандра для цілих та дробових значень поряд-кового номера. Рекурентні співвідношення для приєднаних функцій. Ортогональність приєднаних функцій. Інтегральні представлення для сферичних функцій.

6.5. *Поліноми Чебишева.* Диференціальне рівняння для функцій Чебишева. Функції Чебишева першого та другого родів. Поліноми Чебишева. Зв'язок з біноміальними розкладами. Основні властивості поліномів. Рекурентні співвідношення і застосування поліномів Чебишева для апроксимації функцій.

6.6. *Поліноми Ерміта.* Рівняння Шредінгера. Ротатор. Правила відбору (для ротатора). Поліноми Ерміта. Формула для обчислення поліномів Ерміта. Ортогональність функцій Ерміта, поліномів Ерміта, норма поліномів Ерміта. Твірна функція поліномів Ерміта.

Рекурентні співвідношення для поліномів Ерміта. Квантовий осцилятор, ймовірності переходу, правило відбору.

6.7. *Поліноми Лагерра.* Зрізане гіпергеометричне рівняння. Поліноми Лагерра, приєднані поліноми Лагерра. Твірна функція поліномів Лагерра. Рекурентні формули для поліномів Лагерра.

Література [10–13]

Студент повинен *вміти:*

виводити властивості спеціальних функцій із загальних властивостей оператора Штурма-Ліувілля, досліджувати та шукати розв'язки диференційних рівнянь для спеціальних функцій, використовувати їх в обчислювальній практиці.

Питання для самоконтролю та приклади до теми

6.1. Дайте визначення гамма-функції.

6.2. Які ви знаєте основні властивості гамма-функцій?

6.3. Дайте визначення та перерахуйте властивості функції ψ (x).

6.3. Дайте визначення та перерахуйте властивості функції В (p, q).

6.4. Як ви розумієте основну ідею розв'язання лінійних рівнянь другого порядку.

6.5. Дайте визначення рівняння Гаусса. Розв'язання гіпергеометричного рівняння.

6.6. Дайте визначення гіпергеометричного ряду. За яких умов він є збіжним?

6.7. Які властивості рекурентних перетворень в гіпергеометричних рядах?

6.8. Дайте визначення функції Бесселя першого роду.

6.9. Наведіть зв'язок між функціями Бесселя першого роду $J_N(z)$ і $J_{-N}(z)$ при цілому N та рекурентні формули для функцій Бесселя.

6.10. Дайте визначення функції Бесселя напівцілого порядку.

6.11. Дайте визначення функції Бесселя другого роду або функції Неймана. Властивості функцій Неймана.

6.12. Дайте визначення функції Бесселя третього роду або функції Ханкеля.

6.13. Дайте визначення функції Бесселя від уявного аргументу.

6.14. Ортогональність функцій Бесселя. Твірна функція функцій Бесселя.

6.15. Запишить інтеграл Бесселя, перерахуйте його властивості.

6.16. Запишіть інтеграл Пуассона та викладіть його властивості.

6.17. Наведіть асимптотичні формули для функцій Бесселя у випадку великих значень порядкового числа та великих значень аргументу.

6.18. Які ви знаєте застосування функцій Бесселя?

6.19. Знайдіть значення інтеграла

$$I(z) = \int_0^z J_v(z)dz$$

у вигляді розкладу за системою функцій Бесселя першого роду.

6.20. Знайдіть аналітичну форму для обчислення інтегралів Френеля

$$C(\nu) = \int_0^v \cos(\frac{\pi t^2}{2})dt \text{ та } S(\nu) = \int_0^v \sin(\frac{\pi t^2}{2})dt$$

у вигляді розкладів їх значень за системою функцій Бесселя половинного порядку.

Рекомендація: введіть заміну змінних $\frac{\pi t^2}{2} = z$ та використайте результат п. 6.19.

6.22. Як можна скористатись рекурентними співвідношеннями між значеннями сусідніх за порядком спеціальних функцій для підсумовування розкладів довільних функцій в ряди за спеціальними функціями?

6.23. Дайте визначення рівняння Ломмеля.

6.24. Дайте визначення сферичних функцій Лежандра.

6.25. Дайте означення ортогональності функцій та доведіть ортогональність функцій Лежандра.

6.26. Запишить формулу Родрига.

6.27. Як визначається норма полінома Лежандра?

6.28. Запишіть диференціальне рівняння для приєднаних функцій.

6.29. Дайте визначення приєднаної функції Лежандра.

6.30. Доведіть ортогональність приєднаних функцій Лежандра.

6.31. Як визначається норма приєднаних функцій Лежандра?

6.32. Що таке твірна функція поліномів Лежандра?

6.33. Які рекурентні співвідношення звязують поліноми Лежандра?

6.34. Які рекурентні співвідношення зв'язують приєднані поліноми Лежандра.

6.35. Викладіть схему обчислення розкладень функцій в ряд за поліномами Лежандра.

6.36. Запишіть інтегральне представлення поліномів Лежандра та приєднаних функцій Лежандра.

6.37. Запишіть рівняння для поліномів Ерміта та формулу для обчислення поліномів Ерміта.

6.38. Доведіть ортогональність функцій Ерміта, поліномів Ерміта, та запишіть вираз для норми поліномів Ерміта.

6.39. Поясніть, що таке твірна функція поліномів Ерміта?

6.40. Які рекурентні співвідношення зв’язують значення для поліномів Ерміта.

6.41. Що таке приєднані поліноми Лагерра?

6.42. Запишить зрізане гіпергеометричне рівняння.

6.43. Як ви розумієте термін “твірна функція поліномів Лагерра”?

6.44. Наведіть рекурентні формули для поліномів Лагерра.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Вулих В. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1973.
2. *Колмогоров А. Н., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — К.: Вища шк., 1974.
3. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М., 1958.
5. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — Т.3. — М.: Высш. шк., 1989.
7. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения: Введение в теорию. — М.: Наука, 1965.
8. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения: Задачи и упражнения. — М.: Наука, 1965.
9. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. — М., 1961.
10. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1965.
11. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. —М.: 1963.
12. *Вахрушев Н. В., Хаблов В. В.* Специальные функции: Интегральные уравнения. Вариационное исчисление: Практикум: Учеб. пособие. — Новосибирск: НГТУ, 2001. — 75 с.
13. *Славянов С. Ю., Лай В.* Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей / Пер. с англ. А. Я. Казаков, Альфред Зеегер (предисл.). — СПб.: Невский диалект, 2002.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленка*
Комп’ютерне верстання *І. О. Музика*

Зам. № ВКЦ-4250

Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний. Наклад 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008