МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

**Методичні матеріали
щодо забезпечення самостійної роботи студентів
з дисципліни**

“ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ” І “СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ”

(для бакалаврів, спеціалістів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2010

Підготовлено професором кафедри прикладної математики та програмування *І. В. Бейком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 10 від 19.06.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії керування персоналом

Бейко І. В. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисциплін "Теорія керування" і "Системний аналіз та проектування систем обробки інформації" (для бакалаврів, спеціалістів). – К.: ДП "Вид. дім "Персонал", 2010. — 27 с.

Методична розробка містить пояснювальну записку, зміст дисциплін "Теорія керування" і "Системний аналіз та проектування систем обробки інформації", основні задачі оптимального керування, а також список літератури.

Призначено для самостійної роботи студентів денної та заочної форм навчання.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета навчально-методичних матеріалів для самостійної роботи студентів з дисциплін “Терія керування” і “Системний аналіз та проектування систем обробки інформації” — допомогти студентам опанувати методами розв’язування задач оптимального керування і системного аналізу, зокрема, з використанням сучасного математично-комп’ютерного інструментарію. Самостійна робота студентів виконується в домашніх умовах, а також у бібліотеках, навчальних кабінетах, комп’ютерних класах. Самостійна робота студента методично планується і спрямовується як особиста творча праця, проте за консультування і надання допомоги з боку викладачів і фахівців деканату. Самостійна робота студента — це робота на практичних заняттях і над конспектами лекцій, робота з опрацювання літературних джерел в бібліотеках, зокрема, в електронних, вивчення навчального матеріалу за підручниками, навчальними посібниками, а також підготовка доповідей, рефератів, написання курсових робіт; пошукова і науково-дослідна діяльність і самотестування.

Інтенсифіковане самостійне навчання сприяє суттєвому підвищенню якості знань, допомагає їх поглибити та оволодіти тими знаннями і вміннями, які є необхідними для кваліфікованого фахівця професіонала.

До основних завдань викладача на лекції належить: пробуджувати у студентів потяг до поглиблення знань шляхом самостійного навчання, творчого пошуку.

Цими методичними матеріалами самостійна робота студентів скеровується на вивчення сучасних проблем, пов’язаних з відшуканням, побудовою та впровадженням оптимальних стратегій керування складними системами з використанням оптимальних засобів та систем обробки інформації. Самостійна індивідуальна робота сприяє поглибленому засвоєнню студентами основних принципів та методичних положень, на які спирається сучасна теорія керування. Вивчення навчального матеріалу охоплює оглядові лекції і виконання практичних завдань, які акцентують увагу на складних та вузлових питаннях навчальної дисципліни.

При самостійній роботі над виконанням індивідуальних теоретичних і практичних занять студент використовує різні засоби, починаючи з опрацювання власних конспектів лекцій, матеріалу в рекомендованих підручниках, навчальних посібниках, а також грунтовного ознайомлення з навчально-методичним забезпеченням для комп'ютеризованого навчання: навчальними та довідковими матеріалами з фондів з інформаційно-пошукових систем мережі Інтернет, сучасними методами пошуку інформації за тематичними розділами.

ЗМІСТ
дисциплін
"ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ" І "СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ"

Тема 1. Задачі оптимального керування, системного аналізу та проектування систем оборобки інформації

Приклади керованих динамічних процесів і систем. Математична модель керованої системи. Фазовий простір. Допустимі керування. Критерії оптимальності. Задачі оптимального керування Майєра і Лагранжа та їх еквівалентність. Математичні методи оптимального керування динамічними системами та процесами. Задачі системного аналізу та проектування систем оборобки інформації

Література [1—3; 7; 9]

Тема 2. Методи комп'ютерного прогнозування динамічних процесів. Стійкість, керованість, оптимальність

Методи копм'ютерного прогнозування динамічних процесів. Методи Ейлера, Рунге-Китти та їх модифікації на випадок розривної функції керування. Стійкість динамічної системи. Критерії стійкості. Керованість та критерії керованості автономних і неавтономних систем.

Література [1—3; 7; 9]

Тема 3. Принцип максимуму для лінійної задачі Майєра. Задача оптимальної швидкодії. Двоїста задача. Методи і числові алгоритми побудови оптимальних керувань

Принцип максимуму для лінійної задачі Майєра. Методи і алгоритми розв'язування лінійної задачі Майєра. Задача оптимальної швидкодії та числові методи її розв'язання. Методи і алгоритми розв'язування двоїстої задачі оптимального керування за критерієм мінімаксу норми керування. Задачі оптимального керування з фазовими обмеженнями

Література [2; 5—7; 9]

Тема 4. Побудова оптимальних керувань за квадратичним критерієм оптимальності

Задача оптимального керування з квадратичним критерієм оптимальності. Метод побудови оптимального керування за допомогою розв'язуючого оператора. Принцип оптимальності: рівняння Белмана і рівняння Ріккаті для квадратичного критерію оптимальності лінійної системи. Метод оптимального керування дискретними системами. Оптимальне керування дискретними системами під дією випадкових збурень.

Література [1; 2; 7—9]

Тема 5. Методи побудови оптимального керування для нелінійної системи. Принцип максимуму для нелінійних керованих систем. Узагальнені оптимальні керування

Метод локальних варіацій для наближеної побудови оптимального керування. Методи лінеаризації. Метод проекції градієнта. Метод штрафних функцій. Узагальнені оптимальні керування.

Література [1; 2; 7; 8]

Тема 6. Метод динамічного програмування і побудова замкнутих підсистем оптимального керування

Принцип оптимальності і рівняння Белмана для нелінійних керованих систем. Методи побудови синтезу оптимального керування.

Література [2; 4; 7]

Тема 7. Диференційні ігри і оптимальні стратегії у диференційних іграх

Лінійні диференційні ігри оптимального переслідування. Задачі оптимального переслідування за критерієм швидкодії. Задачі оптимального переслідування за квадратичним функціоналом. Наближені методи побудови квазіоптимальних стратегій.

Література [1; 2; 4; 6; 9]

Тема 8. Узагальнені задачі оптимізації у функціональних просторах

Приклади задач варіаційного числення. Зв'язок задач оптимального керування із задачами варіаційного числення. Правило множників Лагранжа. Теорема Куна-Такера-Кураша. Класична задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера. Необхідні умови оптимальності для задачі Больця.

Література [5; 6; 8; 9]

Питання для самостійного опрацювання:

- задачі теорії оптимального керування;
- методи та алгоритми побудови оптимальних керувань;
- Задачі системного аналізу та інформаційного забезпечення в системах керування;
- розв'язування лінійних задач оптимального керування;
- лінійні та нелінійні задачі оптимізації з обмеженнями
- ітераційні методи побудови оптимальних керувань для нелінійних систем та підсистем граф-операторних моделей.

Знання, яких потрібно набути самостійно:

- концептуальні знання з конструктивної теорії оптимального керування;
- методи і алгоритми побудови оптимальних керувань;
- методи цільового аналізу керованих систем і процесів;
- ітераційні методи побудови оптимальних керувань для нелінійних систем і підсистем граф-операторних моделей;
- Методи обробки інформації в системах оптимального керування.

Уміння, яких потрібно набути самостійно:

- розв'язувати задачі конструктивної теорії оптимального керування;
- проводити системний аналіз керованих процесів;
- будувати числові алгоритми для розв'язування задач оптимального керування;
- розв'язувати лінійні та нелінійні задачі оптимального керування;
- реалізувати ітераційні методи комп'ютерної побудови оптимальних керувань для складних граф-операторних систем;.

Індивідуальні завдання:

Тип завдання: розробка алгоритмів і програм для розв'язування задач лінійного та нелінійного програмування, проведення числових експериментів для оптимізації параметрів алгоритмів; ознайомлення та опрацювання тематичної літератури; розробка алгоритмів та програм для розв'язування задач оптимізації функцій багатьох змінних; проведення числових експериментів для оптимізації параметрів алгоритмів; ознайомлення та опрацювання тематичної літератури.

Мета завдання: перевірка знань студентів, набутих у процесі вивчення методів та алгоритмів для розв'язування задач лінійного та нелінійного програмування; перевірка знань студентів, набутих у процесі вивчення методів та алгоритмів багатомірної оптимізації.

Самостійна робота: проаналізувати результати, отримані в індивідуально проведених обчислювальних експериментах

Ключові терміни: *задачі оптимізації функцій багатьох змінних, необхідні та достатні умови мінімуму, алгоритми прискореної оптимізації, задачі лінійного програмування*

ОСНОВНІ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Три складові задач оптимального керування:

(1) *математична модель* для обчислення (прогнозування) траєкторії $x(t)$ керованого процесу,

(2) множина *допустимих керувань* (множина усіх можливих для використання керувань),

(3) критерій *оптимальності* (за яким вибирають оптимальне керування).

Математична модель керованої системи — це сукупність математичних рівнянь, які дають можливість розраховувати (прогнозувати) траєкторію $x(t)$ керованої системи за вибраним керуванням $u(t)$. Якщо математична модель описується диференційним рівнянням

$$dx(t)/dt = f(x(t), u(t)),$$

то для розрахунку траєкторії $x(t)$, по якій буде рухатися керований об'єкт при вибраному керуванні $u(t)$, достатньо замінити похідну $dx(t)/dt$ близьким до неї (при малому значенні кроку Δt) дробом $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ і з отриманого рівняння

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=f(x(t),u(t))$$

отримати формулу

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t\, f(x(t), u(t))$$

для обчислення значення $x(t+\Delta t)$ при вибраному керуванні $u(t)$. Дійсно, стартуючи із заданого в початковий момент часу t_0 початкового стану $x(t_0)$, можемо обчислити наступні значення траєкторії $x(t)$ за формулами

$$x(t_0+\Delta t) = x(t_0) + h^* f(x(t_0), u(t_0)),$$
$$x(t_0+2\Delta t) = x(t_0+\Delta t) + h^* f(x(t_0+\Delta t), u(t_0+\Delta t)),$$
$$\ldots$$
$$x(T) = x(T\text{-}\Delta t) + h^* f(x(T\text{-}\Delta t), u(T\text{-}\Delta t)).$$

Зауважимо, що на практиці використовуються більш точні формули для прогнозування траєкторії, наприклад, формули Рунге-Кутта:

$$k_1 = f(x(t), u(t)),$$
$$k_2 = f(x(t) + hk_1/2, u(t + h/2)),$$
$$k_3 = f(x(t) + hk_2/2, u(t + h/2)),$$
$$k_4 = f(x(t) + hk_3, u(t + h))$$
$$x(t + h) = x(t) + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h/6.$$

У керованих системах великої розмірності стан $x(t)$, а, можливо, і керування $u(t)$ є векторами $x(t)=(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))$, $u(t)=(u_1(t), u_2(t),..., u_r(t))$ і тому залежність векторної траєкторії $x(t)$ від векторного керування $u(t)$ описується системою диференціальних рівнянь

$$dx_1(t)/dt = f_1 (x_1(t), x_2(t),..., x_n(t), u_1(t), u_2(t),..., u_r(t)) = f_1(x, u),$$
$$dx_2(t)/dt = f_2 (x_1(t), x_2(t),..., x_n(t), u_1(t), u_2(t),..., u_r(t)) = f_2(x, u),$$
$$\ldots$$
$$dx_n(t)/dt = f_n(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t), u_1(t), u_2(t),..., u_r(t)) = f_n(x, u).$$

Цю систему також записують у компактній векторній формі

$$dx(t)/dt = f(x(t), u(t)),$$

користуючись векторними позначеннями

$$dx(t)/dt = (dx_1(t)/dt, dx_2(t)/dt,..., dx_n(t)/dt),$$
$$f(x(t), u(t)) = (f_1(x(t), u(t)), f_2(x(t), u(t)),..., f_n(x(t), u(t))).$$

Допустимі керування – це керування u, які належать заданій множині Ω. Наприклад, множина Ω може складатися із усіх керувань

$u_i(t)$, які у кожен момент часу t задовольняють нерівностям $0 \le u_i(t) \le 1$, тобто

$$\Omega = \{ u(t) | u(t) \ [0,1]\}.$$

На практиці найчастіше зустрічаються такі множини допустимих керувань:

$\Omega = \{ u | -1 \le u_i(t) \le 1,\ i = 1,2,..., r\}$ — усі значення керувань можна вибирати лише із інтервалу [-1,1].

$\Omega = \{ u | \ a_i(t) \le u_i(t) \le b_i(t),\ i = 1,2,..., r\}$ — значення $u_i(t)$ можна вибирати з інтервалу $[a_i(t), b_i(t)]$.

$\Omega = \{u | \int_0^T u_i(t)dt \le P_i \}$ — обмеження на запас i-го ресурсу P_i

$\Omega(P) = \{u | \int_0^T (K(t)\, u(t), u(t))\, dt \le P \}$ — "енергетичні" обмеження на керування.

Критерій оптимальності і оптимальне керування. Критерієм оптимальності називають функцію, за якою визначають оптимальне керування. Наприклад, якщо критерієм оптимальності вибрано фунцію $I(u)$,

$$I(u) \equiv \Phi(x(T, u)) + \int_0^T f_0(x(t, u), u(t), t)dt,$$

(Φ та f_0 — задані функції, а $x(t, u)$ — траєкторія системи при керуванні $u(t)$),

то *оптимальним керуванням* називають таке керування u^{opt} Ω, яке дає найбільше значення функції $I(u)$, тобто при кожному іншому допустимому керуванні u Ω задовольняє нерівність

$$\Phi(x(T, u^{opt})) + \int_0^T f_0(x(t, u^{opt}), u^{opt}(t), t)dt \ge \Phi(x(T, u)) + \int_0^T f_0(x(t, u), u(t), t)dt.$$

У задачах економіки критерієм оптимальності часто вибирають отриманий при керуванні u прибуток

$$I(u) \equiv (c, x(T, u)),$$

де $x(T, u)$ — це кількість вироблених товарів, які вироблені при використанні керування u, а c — вектор цін цих товарів, тобто прибуток дорівнює $(c, x(T, u)) = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i(T, u)$.

Приклади.

Приклад 1. Позначимо через $x(t)$ відсоток хворих у момент часу t під час вірусної епідемії, а через $u(t)$ — інтенсивність противірусних заходів. Тоді спрощену математичну модель для прогнозування $x(t)$ при вибраному $u(t)$ можна описати диференціальним рівнянням

$$dx(t)/dt = x(t)(100 - x(t))\, p_1/(p_2 + u(t)).$$

За допомогою такої математичної моделі можна спрогнозувати очікувану кількість хворих $x(t)$ на наступні моменти часу t $[0, T]$.

Завдання 1. Для заданої на інтервалі часу t $[0, T]$ функції $u(t)$ і для заданих параметрів моделі

$$p_1 = 2, p_2 = 1, \mathrm{x}(0) = 2, T = 2$$

спрогнозувати динаміку епідемії, тобто обчислити траєкторію $x(t)$ на інтервалі часу t $[0, T]$.

Для виконання завдання скористаємося наближеною формулою

$$x(t+h) = x(t) + h\, x(t)(100 - x(t))\, p_1/(p_2 + u(t)).$$

Завдання 2. Спрогнозувати величину можливих сумарних збитків від вірусної епідемії на заданому інтервалі часу t $[0, T]$ в умовах проведення довільно вибраних лікувально-профілактичних заходів $u(t)$. Величину $J(u)$ цих сумарних збитків обчислити як значення інтеграла

$$J(u) = \int_0^T (Px(t) + cu(t))dt,$$

де $Px(t)$ — оцінка величини збитків в час t внаслідок тимчасової непрацездатності відсотка хворих $x(t)$, а $cu(t)$ — оцінка величини витрат на проведення лікувально-профілактичних заходів $u(t)$. Для довільно вибраних двох різних лікувально-профілактичних заходів $u(t) = u_1(t)$ та $u(t) = u_2(t)$ (тобто для довільно вибраних двох різних функцій $u_1(t)$ та $u_2(t)$) знайти менші сумарні збитки серед $J(u_1)$ та $J(u_2)$ за умов $P = 10$, $c = 5$.

Завдання 3. За допомогою обчислювальних експериментів відшукати $u(t)$ з якомога меншим значенням $J(u)$ при обмеженнях $0 <= u(t) <= 4$.

Приклад 2. Якщо $x(t)$ — біомаса риби у водоймі у час t, $g(x(t))$ — інтенсивність приросту біомаси риби, а $u(t)$ — витрати на проведення вилову з інтенсивністю $u(t)x(t)$, то прогноз $x(t)$ на заданий інтервал часу t $[0, T]$ може бути обчислений за допомогою використання математичної моделі

$$dx(t)/dt = g(x(t)) - u(t)x(t).$$

Найбільш ефективне (оптимальне) ведення рибогосподарства на заданому інтервалі часу t $[0, T]$ забезпечується вибором такої інтенсивності вилову (тобто такою функцією $u(t)$), яка максимізує прибуток $J(u)$,

$$J(u) = \int_0^T (pu(t)x(t) - cu(t))dt,$$

де p — ціна виловленої риби, а $cu(t)$ — витрати, пов'язані із забезпеченням інтенсивності вилову $u(t)x(t)$.

Функцію $u(t)$, яка максимізує прибуток, називають *оптимальним* керуванням.

Завдання 1. За допомогою обчислювальних експериментів відшукати таку функцію $u(t)$, яка забезпечує найбільший прибуток $J(u)$ на інтервалі часу $t \quad [0, T]$ за умов $x(0) = 1$, $g(x) = px$, $p = 2$, $c = 1$, $T = 2$.

Завдання 2 (не обов'язкове). Знайти оптимальне керування $u(t)$ на інтервалі часу $t \quad [0, T]$ за умов $x(0) = 1$, $g(x) = px$, $p = 2$, $c = 1$, $T = 2$.

Приклад 3. Якщо $x(t)$ — об'єм цінної деревини у лісовому господарстві у час t, $g(x, t)$ — швидкість її приросту, а $u(t)$ — інтенсивність її вирубки, то математична модель

$$dx(t)/dt = g(x(t), t) - u(t)$$

може бути використана для прогнозування $x(t)$ і для прогнозування прибутку

$$J(u) = \int_0^T (Pu(t) - cu(t))dt,$$

де $Pu(t)$ — вартість отриманої в процесі вирубки деревини, а $cu(t)$ — витрати на вирубку з інтенсивністю $u(t)$).

Завдання 1. За допомогою обчислювальних експериментів відшукати $u(t)$, яке максимізує прибуток $J(u)$ на інтервалі часу $t \quad [0, T]$ за умов

$$x(0) = 10,\ P = 2,\ c = 1,\ T = 2,$$
$$g(x, t) = at^{-b}xe^{-rx},\ a > 0,\ b > 0,\ r > 0,$$
$$u(t) >= 0,\ x(t) >= 0.$$

Якщо керованою системою є автомобіль, то його швидкість $x(t)$ у момент часу t залежить від сили тяги двигуна $u_1(t)$ і від сили гальмування $u_2(t)$. За другим законом Ньютона залежність швидкості від цих керувань описується математичною моделлю (для додатніх значень $x(t)$)

$$dx(t)/dt = (u_1(t) - u_2(t) - Cx^2(t))/m,$$

яка відповідає моделі (2) при $f(x(t), u(t)) \equiv (u_1(t) - u_2(t) - Cx^2(t))/m$, де m — маса автомобіля, а C — коефіцієнт опору повітря, який залежить від геометричної форми автомобіля — чим ближче форма автомобіля до “каплеподібної форми”, тим менший опір повітря і тим менше значення числа C).

У цій задачі множиною допустимих керувань $u_1(t)$ є інтервал $[0, U_1^{\max}]$, де $U_1^{\max}$ — максимальна сила тяги двигуна автомобіля, а множиною допустимих керувань $u_2(t)$ є інтервал $[0, U_2^{\max}]$, де $U_2^{\max}$ — максимальна сила гальмування, яка визначається вагою автомабіля та коефіцієнтом тертя автомобільних шин.

2. У складніших моделях прогнозування руху об'єкта (автомобіля, літака чи іншого об'єкта) у тримірному просторі вектор стану $x(t)$ повинен включати:

- три просторові координати $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ рухомого об'єкта у час t,
- відповідні три координати швидкості об'єкта $x_4(t)=dx_1(t)/dt$, $x_5(t)=dx_2(t)/dt$, $x_6(t)=dx_3(t)/dt$,
- три кути $x_7(t)$, $x_8(t)$, $x_9(t)$ орієнтації рухомого об'єкта у просторі
- та відповідні три координати кутової швидкості $x_{10}(t)=dx_7(t)/dt$, $x_{11}(t)=dx_8(t)/dt$, $x_{12}(t)=dx_9(t)/dt$.

Відповідно математична модель для прогнозування траєкторії $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_{12}(t))$ просторового руху включає 12 диференційних рівнянь для описання динамічної залежності усіх 12 компонент $x_1(t)$, $x_2(t)$,..., $x_{12}(t)$ від 4-х складових керування автомобілем $u(t)=(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$, яке включає:

$u_1(t)$ — кут, на який повертають рульове колесо у кожен момент часу t (цей кут міняється з часом t),

$u_2(t)$ — кут натиску педалі акселератора (педалі газу) у кожен момент часу t,

$u_3(t)$ — номер включеної у момент часу t передачі,

$u_4(t)$ — кут, на який у момент часу t натиснута педаль гальма (інші додаткові компоненти керування автомобілем, зокрема, “включено/виключено фари”, “відкрито/закрито праву/ліву задню/передню шибку” тощо, які несуттєво впливають на траєкторію автомобіля, часто не включаються до моделі руху автомобіля).

3. Траєкторія $x(t)$ фінансово-економічного та соціального розвитку суспільства і держави включає велику кількість компонент $x_1(t)$, $x_2(t)$,..., $x_n(t)$ (у найбільш адекватних сучасних моделях значення n уже наближається до десятків тисяч). Динаміка змін усіх компонентів $x_1(t)$, $x_2(t)$,..., $x_n(t)$ залежить від багатьох компонентів державного

керування $u(t)$, яке включає, зокрема, такі важливі компоненти керування:

$u_1(t)$ — керування системою комерційних та державних банків (керування фінансовими потоками, які через систему позик забезпечують виробництво можливостями своєчасно закуповувати необхідні для виробництва ресурси — фінансова система в державі виконує такі ж функції забезпечення виробництва ресурсами, як і система кругообігу в живому організмі забезпечує усі клітини організму необхідними для розвитку клітин ресурсами),

$u_2(t)$ — керування економічним розвитком держави (зокрема, або сприяючи розвитку малого і середнього бізнесу, або гальмуючи його — все залежить від ступеня узурпації влади олігархами та монополістами, яким невигідно мати конкурентів; тому й не дивно спостерігати пожежі та заборону гуманітарки, яка сьогодні одягає незаможних; не дивно спостерігати і заборону і захмарне мито на купівлю дешевих і добротних зарубіжних автомобілів (які ще й третини свого ресурсу не використали і цілком задовольнили б і потреби ще слабкого сьогодні середнього класу, а також через помірне мито наповнили б убогу поки що державну казну); проте заради отримання у власну кишеню надприбутків від зібраних із зарубіжних комплектуючих автомобілів, олігарх ігнорує нагальні потреби суспільства в забезпеченні транспортними засобами),

$u_3(t)$ — керування процесами збереження природного середовища та природних ресурсів (зокрема, чи віддавати у приватну власність береги річок, острови, ліси та водоймища, чи зберегти їх цивілізоване всенародне використання — адже їх прихватизація є недопустимим розкраданням держави),

$u_4(t)$ — керування наукою і освітою у нарощуванні інтелектуального потенціалу нації, який сьогодні є вкрай необхідним для переходу від постіндустріального суспільства до суспільства мережних знань із всезагальною вищою освітою та безперервним впродовж життя навчанням (за умов узурпації влади надміру освічені "розумники заважають жити" і тому кількість вищих навчальних закладів скорочується, а у розвинених демократичних країнах дедалі ширше впроваджується загальна вища освіта для забезпечення належного високого наукового потенціалу нації),

$u_5(t)$ — спосіб вибору депутатів до Верховної Ради (зокрема, чи зберігати право кожного обирати і бути обраним у депутати на мажоритарних округах, чи дозволити партійним керівникам зліквідувати мажоритарні округи з метою їх власноручного складання партійних списків кандидатів у народні депутати (із своїх вірнопідданих охоронців, родичів, водіїв тощо).

Система державного керування має і багато інших важливих компонентів, які можна оптимізувати методами науки оптимального керування. Очевидно, що нарощування інтелектуального потенціалу нації є необхідним засобом протистояння узурпації влади та розкраданню держави.

ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОСТІ КЕРУВАННЯ

Задача 1. У початковий час t_0 система знаходиться у деякому початковому стані x^0. Потрібно знайти керування $u(t)$, за яким система (1) перейде із початкового стану $x(t_0)=x^0$ до потрібного у час t=T кінцевого стану $x(T)=x^T$.

Задача 2. Знайти такий початковий стан $x(t_0)$ і знайти таке керування u із допустимої множини Ω, $u\ \ \Omega$, щоб у момент часу $t=T$ стан системи $x(T)$ належав множині $S^1(T)$, тобто знайти такі $x(t_0)$ та u, за яких виконуються умови:

$$u\ \ \Omega, x(t_0)\quad S^0(t^0), x(T)\quad S^1(T).$$

Беручи до уваги, що задачі 1 і 2 можуть мати багато розв'язків, виникає задача — знайти серед цих керувань оптимальне керування, тобто “найкраще” керування, яке є розв'язком наступної задачі оптимального керування.

Основна задача оптимального керування. Знайти таке керування $u^{\text{opt}}\ \ \Omega$, при якому траєкторія $x(t, u^{\text{opt}})$ керованої системи

$$dx(t)/dt = f(x(t), u(t)),$$

забезпечить найбільше значення критерію оптимальності $I(u)$,

$$I(u) \equiv \Phi(x(T, u)) + \int_0^T f_0(x(t, u), u(t), t)dt,$$

тобто для будь-якого іншого допустимого керування $u\ \ \Omega$ буде виконуватися нерівність

$$\Phi(x(T, u^{\text{opt}})) + \int_0^T f_0(x(t, u^{\text{opt}}), u^{\text{opt}}(t), t)dt \geq \Phi(x(T, u)) + \int_0^T f_0(x(t, u), u(t), t)dt.$$

Керування u^{opt} називають оптимальним керуванням, а траєкторію $x(t, u^{opt})$ — оптимальною траєкторією.

Додаткова інформація. Один із ефективних математичних методів відшукання оптимального керування спирається на використання теореми *принципу максимуму.* Теорема *принципу максимуму* справедлива для широкого класу керованих процесів, які описуються нелінійними системами диференціальних рівнянь загального виду

$$dx(t)/dt = f(x(t), u(t))$$

і справедлива також для широкого класу *критеріїв оптимальності* загального виду $J(u) =$

$$F(x(T)) + \int_0^T g(x(t), u(t))dt.$$

Теорема *принципу максимуму* стверджує, що серед усіх допустимих керувань $u(t)\ \ U$, які належать заданій допустимій множині U, оптимальне керування $u^*(t)\ \ U$ (тобто те керування, яке максимізує значення *критерію оптимальності* $J(u)$) повинно у кожен момент часу t максимізувати функцію виду $(y(t), f(x(t), v)) + g(x(t), v)$. Формулювання цієї теореми таке.

Теорема. *У випадку існування неперервних похідних f_x' та g_x' оптимальне керування $u^*(t)$ є одним із тих керувань $u(t)$, які є розв'язком крайової задачі* (9)-(12):

$$dx(t)/dt = f(x(t),$$
$$u(t)), dy(t)/dt = -[f_x'(x(t), u(t))]^{T} y(t) - g_x'(x(t), u(t)),$$
$$u(t) = \mathrm{argmax}_{v\ U} [(y(t), f(x(t), v)) + g(x(t), v)],$$
$$x(0) = x^0, y(T) = F_x'(x(\mathrm{T})).$$

Якщо дана крайова задача має лише один розв'язок $u(t)$, то цей розв'язок є оптимальним керуванням. Очевидно, для його відшукання досить підібрати таке початкове значення $y(0)$, при якому виконається рівність

$$y(T) = F_x'(x(\mathrm{T})).$$

Шукане значення $y(0)$ обчислюють як мінімізатор функції $\|y(T) - F_x'(x(\mathrm{T}))\|$.

Лінійні задачі оптимального керування

1. Лінійні керовані процеси описуються системою лінійних диференційних рівнянь

$$dx/dt=A(t)x+g(u(t), t),$$

$$\text{де } x(t)=(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)),$$
$$u(t)=(u_1(t), u_2(t),..., u_r(t)),$$

$A(t)$ — задана матриця-функція розмірності $(n\times n)$,

а $g(u(t), t)$ — задана n-мірна вектор-функція.

Лінійна задача Майєра. Знайти оптимальне керування $u^{opt}(t)$ $V(t)$, яке максимізує значення $(c, x(T))$ для кінцевого стану $x(T)$ керованої системи $dx/d=A(t)+g(u(t), t)$ у фіксований момент часу T.

Розв'язування. Із теорії лінійних диференційних рівнянь відомо, що для функції $y(t)$, яка є розв'язком задачі Коші

$$dy(t)/dt = -A^T(t)y(t), y(T)=c.$$

виконується рівняння

$$(c, x(T))=(y(t_0), x(t_0))+ \int_0^T (y(t), g(u(t), t))dt.$$

Це означає, що величина $(c, x(T))$ досягає максимального значення на тому керуванні $u^{opt}(t)$, яке максимізує значення інтегралу $\int_0^T (y(t), g(u(t), t))dt$, тобто на тих керуваннях $u^{opt}(t)$, які у кожен момент часу t для всіх керувань $u(t)$ $V(t)$ задовольняють нерівність "принципу максимуму"

$$..(y(t), g(u^{opt}(t), t)) \geq (y(t), g(u(t), t)).$$

Із цього принципу максимуму отримуємо такий алгоритм для побудови оптимального керування:

Етап 1. Знаходимо функцію $y(t)$, яка є розв'язком задачі Коші $dy(t)/dt = -A^T(t)y(t), y(T)=c$.

Етап 2. Для кожного моменту часу t знаходимо оптимальне керування $u^{opt}(t)$ як те керування серед усіх керувань $u(t)$ $V(t)$, яке максимізує значення $(y(t), g(u(t), t))$, тобто задовольняє нерівність

$$(y(t), g(u^{opt}(t), t)) \geq (y(t), g(u(t), t)).$$

Побудова оптимального керування з обмеженою потужністю

Задача. При обмеженнях на потужність α допустимого керування $u_i(t)$, тобто при обмеженнях

$$-\alpha\leq u_i(t)\leq\alpha, i=1,..., r$$

побудувати оптимальне керування, яке переводить систему

$$dx(t)/dt=A(t)x(t)+B(t)u(t),$$

із її початкового стану $x(t_0)$ до такого кінцевого стану $x(T)$, який максимізує значення $(c, x(T))$.

Розв'язування. Із теорії лінійних диференційних рівнянь відомо, що для функції $y(t)$, яка задовольняє системі $dy(t)/dt = -A^T(t)y(t)$ та умові $y(T)=c$, виконується рівняння

$$(c, x(T))=(y(t_0), x(t_0))+ \int_0^T (y(t), B(t)u(t))dt.$$

Це означає, що величина $(c, x(T))$ досягає максимального значення на такому керуванні $u(t)$, яке максимізує значення інтеграла $\int_0^T (y(t), B(t)u(t))dt$. А значення цього інтегралу буде максимальним на тих керуваннях $u^{\text{opt}}(t)$, які у кожен момент часу t максимізують значення $(y(t), B(t)u(t))$ при обмеженнях $-\alpha \le u_i(t) \le \alpha$, $i=1,..., r$.

Беручи до уваги, що транспонована матриця $B^T(t)$ задовольняє рівнянню $(y(t), B^T(t)u(t))=(y(t), B(t)u(t))$ при будь-яких значеннях $y(t)$ та $u(t)$, а також беручи до уваги, що значення $(y(t), B(t)u(t))$ обчислюється за формулами

$$(y(t), B(t)u(t))=(B^T(t)y(t), u(t)) = \sum_{i=1}^{r} [B^T(t)y(t)]_i u_i(t),$$

доходимо висновку, що керування $u^{\text{opt}}(t)$, яке максимізує $(c, x(T))$, тобто, яке максимізує значення $\sum_{i=1}^{r} [B^T(t)y(t)]_i u_i(t)$ при обмеженнях $-\alpha \le u_i(t) \le \alpha$, обчислюється для всіх $i=1,2,..., r$ за формулами:

якщо i-та компонента вектора $B^T(t)y(t)$ є додатньою, тобто, якщо $[B^T(t)y(t)]_i>0$, то $u_i^{\text{opt}}(t) =\alpha$,

якщо $[B^T(t)y(t)]_i<0$, то $u_i^{\text{opt}}(t)=-\alpha$

якщо $[B^T(t)y(t)]_i=0$, то $u_i^{\text{opt}}(t)$ є будь-яким допустимим значенням із інтервалу $[-\alpha,\alpha]$.

Побудова оптимального керування з термінальними обмеженнями за критерієм потужності

Задача. Побудувати оптимальне керування, яке переводить систему

$dx(t)/dt=A(t)x(t)+B(t)u(t)$,

із її початкового стану $x(t_0)$ на гіперплощину $(c, x(T))=d$. при мінімальному значенні потужності α, тобто при обмеженнях — $\alpha \le u_i(t) \le \alpha$, $i=1,..., r$, з мінімальним значенням α.

Розв'язування. Із розв'язку задачі оптимального керування з обмеженою потужністю відомо, що керування, яке при обмеженнях

$-\alpha \le u_i(t) \le \alpha$ максимізує значення $(c, x(T))$, обчислюється для всіх $i=1,2,..., r$ за формулами:

якщо i-та компонента вектора $B^T(t)y(t)$ є додатньою, тобто, якщо $[B^T(t)y(t)]_i>0$, то $u_i^{opt}(t) = \alpha$,

якщо $[B^T(t)y(t)]_i<0$, то $u_i^{opt}(t) = -\alpha$,

якщо $[B^T(t)y(t)]_i=0$, то $u_i^{opt}(t) = 0$,

де $y(t)$ є розв'язком задачі Коші $dy(t)/dt = -A^T(t)y(t)$, $y(T)=c$. Відомо також, що для такої функції $y(t)$

виконується рівняння

$$(c, x(T))=(y(t_0), x(t_0))+ \int_0^T (y(t), B(t)u(t))dt.$$

Це означає, що шукану мінімальну потужність α, при якій задовольняється рівняння $(c, x(T))=d$, можемо обчислити із рівняння

$$d = (y(t_0), x(t_0))+ \int_0^T (y(t), B(t)u^{opt}(t))dt.$$

Дійсно, беручи до уваги, що у даному випадку

$$\int_0^T (y(t), B(t)u^{opt}(t))dt= \int_0^T (B^T(t)y(t), u^{opt}(t))dt=$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^{r} \alpha \left| [B^T(t)y(t)]_i \right| dt=\alpha \int_0^T \sum_{i=1}^{r} \left|[B^T(t)y(t)]_i\right| dt$$

маємо для знаходження найменшої потужності α таке рівняння

$$d = (y(t_0), x(t_0))+\alpha \int_0^T \sum_{i=1}^{r} \left|[B^T(t)y(t)]_i\right| dt,$$

тобто маємо

$$\alpha = \frac{d-(\mathrm{y}(0),\mathrm{x}(0))}{\int_0^T \sum_{i=1}^{r} \left|[\mathrm{B}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\mathrm{y}(\mathrm{t})]_{\mathrm{i}}\right| \mathrm{d}}$$

Отже, розв'язання задачі оптимального керування з термінальним обмеженням $(c, x(T))=d$ та з критерієм мінімізації потужності зводиться до виконання таких обчислень:

Етап 1. Знайти (обчислити) функцію $y(t)$, яка є розв'язком задачі Коші $dy(t)/dt = -A^T(t)y(t)$, $y(T)=c$.

Етап 2. За формулою

$$\alpha = \frac{d-(\mathrm{y}(0),\mathrm{x}(0))}{\int_0^T \sum_{i=1}^{r} \left|[\mathrm{B}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\mathrm{y}(\mathrm{t})]_{\mathrm{i}}\right| \mathrm{d}}$$

обчислити мінімальне значення потужності α, яка необхідна для переведення керованої системи $dx(t)/dt=A(t)x(t)+B(t)u(t)$ із початкової точки $x(t_0)$ на гіперплощину $(c, x(T))=d$.

Етап 3. Обчислити оптимальні значення компонент $u_i^{\text{opt}}(t)$ вектора керування $u^{\text{opt}}(t)$ за формулами

$$u^{\text{opt}}(t)=\alpha\text{sign}(B^T(t)y(t)),$$

тобто:

- якщо i-та компонента $[B^T(t)y(t)]_i$ вектора $B^T(t)y(t)$ є додатньою, то покласти $u_i^{\text{opt}}(t) = \alpha$,
- якщо $[B^T(t)y(t)]_i<0$, то покласти $u_i^{\text{opt}}(t) = -\alpha$,
- якщо $[B^T(t)y(t)]_i=0$, то покласти $u_i^{\text{opt}}(t) = 0$.

Побудова оптимального керування лінійною системою при інтервальних обмеженнях на керування

Задача. Побудувати оптимальне керування, яке переводить систему

$$dx(t)/dt=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$

із початкового стану $x(t_0)$ в момент часу $t=t_0$ до такого стану $x(T)$ в момент часу $t=T$, який максимізує значення $(c, x(T))$. при інтервальних обмеженнях $u_i(t)\ \ [a_i(t), b_i(t)]$, $i=1,..., r$.

Розв'язування. Згідно з принципом максимуму оптимальне керування $u^{\text{opt}}(t)$ знаходится як те керування, яке максимізує значення $(y(t), B(t)u(t))$ при обмеженнях $u_i(t)\ \ [a_i(t), b_i(t)]$, $i=1,..., r$.

Беручи до уваги, що транспонована матриця $B^T(t)$ задовольняє рівнянню $(y(t), B^T(t)u(t))=(y(t), B(t)u(t))$ і беручи до уваги, що значення $(y(t), B(t)u(t))$ обчислюється за формулами

$$(y(t), B(t)u(t))=(B^T(t)y(t), u(t))=\sum_{i=1}^{r}\ [B^T(t)y(t)]_i u_i(t),$$

доходимо висновку, що оптимальне керування $u_i^{\text{opt}}(t)$, яке максимізує значення $(y(t), B(t)u(t))$, максимізує також і значення $\sum_{i=1}^{r}\ [B^T(t)y(t)]_i u_i(t)$, і тому маємо:

- для тих моментів часу t, для яких виконується нерівність $[B^T(t)y(t)]_i > 0$, максимальне значення $[B^T(t)y(t)]_i u_i(t)$ на інтервалі $u_i(t)\ \ [a_i(t), b_i(t)]$ досягається при керуванні $u_i(t)=b_i(t)$,

- а для тих моментів часу t, для яких виконується нерівність $[B^{T}(t)y(t)]_i<0$, максимальне значення $[B^T(t)y(t)]_i u_i(t)$ при обмеженнях $u_i(t)$ $[a_i(t), b_i(t)]$ досягається на керуванні $u_i(t)=b_i(t)$.

Це означає, що оптимальне керування $u^{opt}(t)$, яке максимізує $[B^T(t)y(t)]_i u_i(t)$, максимізує $\sum_{i=1}^{r} [B^T(t)y(t)]_i u_i(t)$, максимізує $(y(t), B(t)u(t))$, і згідно з принципом максимуму максимізує також і значення $(c, x(T))$, обчислюється для всіх $i=1,2,..., r$ за формулами:

якщо $[B^T(t)y(t)]_i>0$, то $u_i^{opt}(t)=b_i(t)$,

якщо $[B^T(t)y(t)]_i<0$, то $u_i^{opt}(t)=a_i(t)$

якщо $[B^T(t)y(t)]_i=0$, то $u_i^{opt}(t)$ є будь-яким допустимим значенням із інтервалу $[a_i(t), b_i(t)]$.

Побудова оптимального керування лінійною системою за критерієм потужності

Побудова оптимального керування лінійною системою при інтегральних обмеженнях на керування

Задача 1. Побудувати оптимальне керування системою $dx/dt=A(t)x+B(t)u(t)$, яке максимізує значення $(c,x(T))$. при інтегральних обмеженнях на допустиме керування $u(t)$, які задані інтегральною нерівністю

$$\int_0^T (K(t)u(t), u(t))dt \le P.$$

Розв'язування. Із теорії лінійних диференційних рівнянь відомо, що для функції $y(t)$, яка є розв'язком задачі Коші

$dy(t)/dt = -A^T(t)y(t)$, $y(T)=c$

виконується рівняння

$$(c, x(T))=(y(0), x(0))+ \int_0^T (y(t), B(t)u(t))dt.$$

Це означає, що величина $(c, x(T))$ досягає максимального значення на тому керуванні $u^{opt}(t)$, яке максимізує значення інтеграла $\int_0^T (y(t), B(t)u(t))dt$ на множині керувань $u(t)$, що задовольняють нерівність $\int_0^T (K(t)u(t), u(t))dt\le P$. Отже, шукане керування $u^{opt}(t)$ є розв'язком оптимізаційної задачі: знайти керування $u(t)$, яке максимізує значення інтегралу $\int_0^T (y(t), B(t)u(t))dt$ при обмеженнях $\int_0^T (K(t)u(t), u(t))dt\le P$.

Цей розв'язок $u^{\mathrm{opt}}(t)$ можемо знайти методом Лагранжа, а саме, за методом Лагранжа оптимальне керування $u^{\mathrm{opt}}(t)$ знаходиться серед тих керувань $u(t)$, які максимізують функцію Лагранжа $L(u,\lambda)$ з множником Лагранжа λ:

$$L(u,\lambda)=\int_0^T (y(t), B(t)u(t))dt+\lambda\int_0^T (K(t)u(t), u(t))dt=\int_0^T \{(y(t), B(t)u(t))dt+\lambda(K(t)u(t), u(t))\}dt,$$

тобто максимізують значення $\{(y(t), B(t)u(t))dt+\lambda(K(t)u(t), u(t))\}$. Відомо, що в умовах існування цього максимального значення при додатньо-визначеній матриці $K(t)=K^T(t)$, його максимум досягається на тих значеннях керування, у яких градієнт по $u(t)$ від виразу у фігурних дужках дорівнює нулю, тобто на тих керуваннях, які задовольняють рівнянню ${}_u\{(y(t), B(t)u(t))dt+\lambda(K(t)u(t), u(t))\}=0$, тобто рівнянню $B^T(t)u(t)+2\lambda K(t)u(t)=0$ і тому маємо $u(t)=(1/(2\lambda))K^{-1}(t)B^T(t)y(t)=\mu K^{-1}(t)B^T(t)y(t)$.

Невідоме число μ знаходимо із рівняння

$$\int_0^T (K(t)u(t), u(t))dt=\int_0^T (K(t)\mu K^{-1}(t)B^T(t)y(t),\mu K^{-1}(t)B^T(t)y(t))dt=\mu^2\int_0^T (B^T(t)y(t), K^{-1}(t)B^T(t)y(t))dt=P.$$

Тобто маємо $\mu^2=P/\int_0^T (B^T(t)y(t), K^{-1}(t)B^T(t)y(t))dt$, $\mu=(P/\int_0^T (B^T(t)y(t), K^{-1}(t)B^T(t)y(t))dt)^{1/2}$ і, нарешті, отримуємо оптимальне керування

$$u^{\mathrm{opt}}(t)=\mu K^{-1}(t)B^T(t)y(t)=(P/\int_0^T (B^T(t)y(t), K^{-1}(t)B^T(t)y(t))dt)^{1/2}K^{-1}(t)B^T(t)y(t).$$

Отже, для знаходженя оптимального керування достатньо знайти розв'язок $y(t)$ системи $dy(t)/dt=A^T(t)y(t)$, $y(T)=c$, та підставити його у формулу

$$u^{\mathrm{opt}}(t)=(P/\int_0^T (B^T(t)y(t), K^{-1}(t)B^T(t)y(t))dt)^{1/2}K^{-1}(t)B^T(t)y(t).$$

Синтез оптимального керування

Приклад оптимального синтезу орієнтацією космічного корабля.

Математична задача оптимального керування динамічним об'єтом, який описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1,\ ...,\ x_n;\ u_1,\ ...\ u_l),\ \ u_r \in \Omega,\ \ j = 1,n,\ \ r = 1,l$$

зводиться до відшукання найкращого керування $u(t)$, яке мініміує функціонал (критерій якості керування)

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\xi),\ u(\xi)d\xi$$

на основі інформації про стан системи $x(t)$, який здебільшого оцінюють за даними спостережень z $=f(x)$.

Якщо ввести додаткову компоненту вектора стану

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(x(\xi), u(\xi))d\xi$$

то, очевидно,

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f_0(x_1,\ ...\ x_n;\ u_1,\ ...\ u_l)$$

і розширена система приводиться до виду

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\ u),$$

де

$$x = (x_0,\ x_1,\ ...\ x_n)^T,$$

$$u = (u_1,\ u_2,\ ...\ u_l)^T$$

$$f(x, u)=(f_0(x, u), f_1(x, u),..., f_n(x, u))^T.$$

Якщо u^0 є оптимальним керуванням, а x^0 є оптимальною траєкторією, то малі збурення δx оптимальної траєкторії внаслідок збурень початкового значення $\delta x(0)$ описуються рівняннями у варіаціях

$$\delta\dot{x} = \frac{\partial f(x^0,\ u^0)}{\partial x}\delta x$$

і відповідна спряжена система має вигляд

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f(x^0,\ u^0)}{\partial x}\right)^T \psi,\ \ \psi = (\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n)^T.$$

За принципом максимуму Л. С. Понтрягіна може бути знайдено оптимальне керування $u = u^0$ орієнтацією космічного апарата (в площині) за допомогою обертання маховика встановленого всередині космічного апарата. На вал маховика подається обертальний момент M, який створює кутове прискорення $\ddot{\theta}$ згідно з диференціальним рівнянням

$$J_M\ddot{\theta} = M,$$

де J_M – момент інерції маховика. Згідно з законом збереження кінетичного моменту космічного апарата повинно виконуватися рівняння

$$\frac{d}{dt}\left(J_M\dot{\theta} + J_0\dot{\varphi}\right) = 0,$$

де J_0 – момент інерції космічного апарата, а — кут орієнтації. Із останнього рівняння випливає

$$J_M\ddot{\theta} = -J_0\ddot{\varphi} = M.$$

Тому величину пропорційну моменту M, взяту с протилежним знаком, приймемо за керування u

$$u = -\frac{M}{J_0}$$

Для знаходження за допомогою принципу максимуму оптимального керування, яке мінімізує витрати енергії $Q = \int\limits_{t_0}^{t_1} u^2(\xi)d\xi$, введемо загальноприйняті позначення

$$x_0(t) = \int\limits_{t_0}^{t} u^2(\xi)d\xi.$$

$$x_1(t) = \varphi$$

$$x_2(t) = \dot{\varphi}\text{'}$$

у якій керована система набуває вигляду

$$\dot{x}_0(t) = u^2(t).$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t).$$

Беручи до уваги, що у даному випадку маємо $f_0(t) = u^2(t)$, $f_1(t) = x_2(t)$, $f_2(t) = u(t)$, за принципом максимуму шукане оптимальне керування повинно максимізувати функцію Гамільтона

$$\tilde{\mathrm{H}} = \psi_0 u^2(t) + \psi_1 x_2(t) + \psi_2 u(t), \quad \psi_0 < 0.$$

Очевидно, максимальне значення цієї функції досягається на тому значенні керування *u*, на якому її похідна дорівнює нулю, тобто $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = 0$. Із останнього рівняння випливає, що оптимальне керування повинно задовольняти рівнянню $u = -\frac{\psi_2}{2\psi_0}$. Для відшукання функцій $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ скористаємося системою диференціальних рівнянь

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_0} = 0, \quad \psi_0 = const$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_1} = 0, \quad \psi_1 = const$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_2} = \psi_{1.}$$

$$\psi_2(t) = -\psi_1(t - t_0),$$

Отже, маємо $u(t) = \frac{\psi_1}{2\psi_2}(t - t_0)$. Це означає, що оптимальне керування космічним опаратом є лінійною функцією від часу, тобто $u(t)=at+b$.

Для знаходження невідомих *a, b* скористаємося рівняннями динаміки космічного апарата при використанні керування $u(t)=at+b$. Маємо такі рівняння

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -at + b,$$

$$x_2(t) = -\frac{at^2}{2} + bt + x_2(0),$$

$$x_1(t) = -\frac{at^3}{6} + \frac{bt^2}{2} + x_2(0)t + x_1(0)$$

Якщо у кінцевий момент $t = t_1$, потрібно забезпечити орієнтацію космічного апарата за вимогою $x_1(t_1) = \varphi_0$, $x_2(t_1) = 0$, то для знаходження постійних *a* та *b* маємо два рівняння

$$\frac{at_1^2}{2} - bt_1 + x_2(0) = 0,$$

$$-\frac{at_1^3}{6} + b\frac{t_1^2}{2} + x_2(0)t_1 + x_1(0) = \varphi_0$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. — К.: — Вища шк. 1983. — 512 с.
2. *Бейко И. В., Бейко М. Ф.* Численные методы решения задач оптимального управления. — К.: Знание, 1970.
3. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: — Наука, 1969. — 408 с.
4. *Белман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. — М.: Наука, 1969. — 226 с..
5. *Будак Б. М. Васильев Ф. П.* Приближенные методы решения задач оптимального управления: В 2 ч. —М., 1969.
6. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980. — 520 с.

Додаткова

7. *Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф.* Основы теории управления. — К.: Вища шк., 1975. — 328 с.
8. *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966. — 176 с.
9. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленко*
Комп’ютерне верстання *І. О. Музика*

Зам. № ВКЦ-4246

Формат 60×84/16 . Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний. Тираж 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП “Видавничий дім “Персонал”
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. ХХ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008 р.