МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни

"РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ"

(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2010

Підготовлено професором кафедри прикладної математики і програмування *Р. М. Чернігою* та доцентом кафедри прикладної математики і програмування *В. А. Дуткою*

Затверджено на засіданні кафедри інформатики та інформаційних технологій (протокол № 1 від 30.01.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Черніга Р. М., Дутка В. А. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Рівняння математичної фізики” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2010. — 49 с.

Методична розробка містить пояснювальну записку, тематичний план дисципліни “Рівняння математичної фізики”, матеріал для самостійного вивчення, питання, задачі і приклади для самоконтролю, зразки розв’язання задач, список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета курсу — набуття студентами знань, умінь та навичок розв'язування задач з курсу рівнянь математичної фізики. Математична фізика — це одна з фундаментальних математичних дисциплін, яка включає побудову та дослідження математичних моделей фізичних явищ. Основою математичних моделей є, як правило, диференціальні рівняння з частинними похідними та інтегро-диференціальні рівняння, які отримують із відомих законів фізики. Такі класичні розділи фізики, як механіка, термодинаміка, електродинаміка, квантова механіка, теорія поля базуються на законах, які можна записати у вигляді відповідних рівнянь математичної фізики.

Для вивчення курсу необхідні знання з математичного аналізу, теорії функції комплексної змінної, лінійної алгебри та звичайних диференціальних рівнянь.

Під час навчання студенти здобувають знання і навички розв'язання основних задач з математичної фізики, які потрібні у подальшому для вивчення математичних дисциплін за програмою підготовки бакалавра за спеціальністю “Прикладна математика”, зокрема, у вивченні:

- чисельних методів розв'язання рівнянь математичної фізики;
- методів математичного моделювання;
- варіаційного числення.

Для підсумкової перевірки засвоєних знань студенти складають іспит.

Самостійне вивчення окремих розділів тем з навчально-тематичного плану вивчення дисципліни “Рівняння математичної фізики” є важливою передумовою успішного засвоєння цієї фундаментальної дисципліни математики. Відомо, що лише систематичне самостійне опрацювання матеріалу дає можливість якомога краще оволодіти сумою знань, умінь та навичок, необхідних для високої професійної підготовки. Студент, який прагне досконало оволодіти професією, має добре розуміти: на занятті викладач подає основи знань, які є фундаментом для подальшого поглиблення й удосконалення знань з дисципліни. Збагачення загальною сумою знань, накопичених людством, розширення загального світогляду, усвідомлення наявної перспективи щодо реалізації певних знань є основним мотивом до сумлінного відношення до навчання.

Згідно з державними стандартами навчальний матеріал дисципліни "Рівняння математичної фізики", передбачений робочою навчальною програмою для засвоєння студентом в процесі самостійної роботи, виноситься на підсумковий контроль поряд з навчальним матеріалом, який опрацьовувався при проведенні лекцій та практичних занять. Самостійна робота студента над засвоєнням навчального матеріалу з конкретної дисципліни може виконуватися у бібліотеці вищого навчального закладу чи іншій бібліотеці науково-технічного спрямування, навчальних кабінетах, комп'ютерних класах (лабораторіях) та в домашніх умовах. Самостійна робота студента повинна бути спланована, організаційно і методично спрямована як особиста творча праця без прямої взаємодії з викладачем. Навчальний час, відведений для самостійної роботи, регламентується робочою навчальною програмою і повинен становити значну частку від загального обсягу навчального часу студента, відведеного для вивчення дисципліни "Рівняння математичної фізики". У необхідних випадках ця робота проводиться відповідно до заздалегідь складеного графіка, що гарантує можливість індивідуального доступу студента для консультації з викладачем чи використання персонального комп'ютера та доступу до відповідних баз даних. Необхідно наголосити, що уміння знаходити необхідний матеріал для самостійного вивчення окремих розділів тем дисципліни в епоху тотальної інформатизації суспільства набуває важливого значення. Йдеться перш за все про вміння студента користуватися пошуковими базами даних в Інтернет, засвоєними студентом під час вивчення відповідних дисциплін комп'ютерного спрямування.

Самостійне опрацювання матеріалу з курсу дисципліни "Рівняння математичної фізики" повинне здійснюватись шляхом:

- опрацювання конспектів лекцій та аналізу задач і прикладів, розв'язаних на практичних заняттях;
- опрацювання основної та додаткової літератури за наведеним списком;
- опрацювання окремих частин матеріалу за науковою і спеціальною літературою з використанням сучасних спеціалізованих пошукових систем в Інтернет (наприклад, scholar. google. com, www. sciencedirect. com);
- розв'язання задач та прикладів, запропонованих як домашні завдання на практичних заняттях та наведених у методичці як зразки;

- самотестування з використанням питань, задач і прикладів для самоконтролю.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
дисципліни
"РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ"

№ пор.	Назва змістового модуля та теми
	Змістовий модуль I. Класифікація лінійних рівнянь і приклади класичних рівнянь математичної фізики
1	Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними
2	Класифікація та канонічний вид лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку
3	Постановки крайових задач математичної фізики
	Змістовий модуль II. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є)
4	Загальна схема методу відокремлення змінних
5	Розв'язання крайових задач для рівняння дифузії (теплопровідності) та хвильового рівняння методом відокремлення змінних
	Змістовий модуль III. Спеціальні функції в математичній фізиці
6	Циліндричні функції. Розв'язок крайових задач у циліндричній системі координат методом відокремлення змінних
7	Сферичні функції. Розв'язок крайових задач у сферичній системі координат методом відокремлення змінних.
	Змістовий модуль IV. Класичні рівняння математичної фізики
8	Рівняння Лапласа та Пуассона. Розв'язок задачі Діріхле
9	Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння
10	Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії
11	Застосування нелінійних диференціальних рівнянь при моделюванні процесів живої та неживої природи
Разом годин: 162	

МАТЕРІАЛ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ

Самостійне вивчення окремих частин тем з тематичного плану дисципліни “Рівняння математичної фізики” є необхідною умовою успішного засвоєння основного матеріалу.

Лекційний матеріал призначається для вивчення студентами найважливіших понять, означень, теорем та їх застосування, акцентується увага на складних, важливих питаннях дисципліни.

Для успішного засвоєння студентами теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок моделювання процесів природи відповідно до тем із тематичного плану наведено зразки розв’язання задач математичної фізики.

Тема 1. Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними

Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Диференціальні рівняння з частинними похідними n-го порядку відносно k змінних. Нелінійні, квазілінійні, однорідні диференціальні рівняння з частинними. Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку. Принцип суперпозиції розв’язків.

Література[1–8]

Тема 2. Класифікація та канонічний вид лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку

Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку: рівняння гіперболічного, еліптичного та параболічного типу. Канонічний вид лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку. Рівняння характеристик.

Література [1–7]

Зразки розв’язання задач

Приклад 1. Визначити тип рівняння

$$u_{xx} + 2u_{xy} - xu_{yy} + u = 0 . \qquad (1)$$

<u>*1-й спосіб*</u>. Зведемо квадратичну форму $Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - x\lambda_2^2$, яка відповідає даному рівнянню, до канонічного вигляду $Q_1(\xi_1, \xi_2) = \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2$:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - x\lambda_2^2 = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 - \lambda_2^2 - x\lambda_2^2 =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (-1 - x)\lambda_2^2.$$

Увівши заміну $\xi_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \xi_2 = \lambda_2$, отримаємо канонічний вигляд квадратичної форми

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = Q_1(\xi_1, \xi_2) = \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2, \tag{2}$$

де $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1 - x$. Тепер залежно від знаків коефіцієнтів α_1 і α_2 канонічного вигляду (2) квадратичної форми диференціальне рівняння (1) буде певного типу.

1) Якщо α_1 і α_2 одного знака, то рівняння буде *еліптичного* типу, тобто при $\alpha_1\alpha_2 > 0$. В даному випадку маємо: $\alpha_1\alpha_2 > 0 \Leftrightarrow 1 + x < 0 \Leftrightarrow x < -1$. Отже, при $x < -1$ рівняння (1) є рівнянням еліптичного типу.
2) Якщо α_1 і α_2 мають різні знаки, то рівняння буде *гіперболічного* типу, тобто при $\alpha_1\alpha_2 < 0$ або при $x > -1$.
3) Якщо один із членів α_1, α_2 дорівнює нулю, то рівняння буде *параболічного* типу. В даному випадку при $1 + x = 0$, тобто при $x = -1$.

2-й спосіб. У випадку диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно двох змінних

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + f(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

для визначення типу рівняння можна використати дискримінант Δ характеристичної форми даного рівняння $\Delta = b^2 - ac$. Для рівняння (1) маємо $a = 1$, $b = 1$, $c = -x$ тоді $\Delta = 1 + x$.

1. Якщо $\Delta < 0$, то рівняння буде *еліптичного* типу, тобто при $\Delta = 1 + x < 0$, а отже, при $x < -1$.
2. Якщо $\Delta > 0$, то рівняння буде *гіперболічного* типу, тобто при $\Delta = 1 + x > 0$ або при $x > -1$.
3. Якщо $\Delta = 0$, то рівняння буде *параболічного* типу при $\Delta = 1 + x = 0$, тобто при $x = -1$.

Зауваження. Неважко перевірити, 1-ий та 2-ий способи для визначення типу рівняння (1) є рівносильними.

Приклад 2. Визначити тип рівняння

$$-u_{xx} + 3u_{xy} + 5u_{yy} + u_{xz} + 6u_{yz} + 2u_{zz} - u_x + u_z + u = 0. \tag{3}$$

Це рівняння є рівнянням в частинних похідних *другого* порядку відносно *трьох* змінних. Зведемо квадратичну форму

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_3 + 6\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3^2, \tag{4}$$

яка відповідає рівнянню (3), до канонічного вигляду

$$Q_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + \alpha_3\xi_3^2\,. \qquad (5)$$

Один із способів приведення квадратичної форми (3) до канонічного вигляду полягає в такому. Спочатку в правій частині (3) виділяємо повний квадрат, що містить всі члени із λ_1, після цього із решти членів виділяємо знову повний квадрат, що містить всі члени із λ_2, а після цього залишиться іще член, який містить λ_3^2. Використання цього способу для приведення квадратичної форми (3) до канонічного вигляду дає:

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = -\lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_3 + 6\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3^2 = -\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \cdot \frac{3}{2}\lambda_2 -$$

$$-\left(\frac{3}{2}\lambda_2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\lambda_2\right)^2 + 5\lambda_2^2 + 2\lambda_1 \cdot \frac{1}{2}\lambda_3 - \left(\frac{1}{2}\lambda_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda_3\right)^2 + 6\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3^2 =$$

$$= -\left(\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}\lambda_2 \cdot \frac{1}{2}\lambda_3 + 5\lambda_2^2 + \left(\frac{3}{2}\lambda_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda_3\right)^2 + 6\lambda_2\lambda_3 +$$

$$+2\lambda_3^2 = -\left(\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3\right)^2 + \frac{29}{4}\lambda_2^2 + \frac{3}{2}\lambda_2\lambda_3 + 6\lambda_2\lambda_3 + \frac{5}{4}\lambda_3^2 = -$$

$$-\left(\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3\right)^2 + \frac{29}{4}\lambda_2^2 + \frac{15}{2}\lambda_2\lambda_3 + \frac{5}{4}\lambda_3^2 = -\left(\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3\right)^2 +$$

$$+\frac{29}{4}\lambda_2^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{29}}{2}\lambda_2 \cdot \frac{15}{2}\lambda_3 + \left(\frac{15}{2}\lambda_3\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\lambda_3\right)^2 + \frac{5}{4}\lambda_3^2 = -$$

$$-\left(\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\lambda_2 + \frac{15}{2}\lambda_3\right)^2 - \frac{220}{4}{\lambda_3}^2 = -$$

$$-\left(\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\lambda_2 + \frac{15}{2}\lambda_3\right)^2 - 55{\lambda_3}^2.$$

Увівши заміну $\xi_1 = \lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3$, $\xi_2 = \frac{\sqrt{29}}{2}\lambda_2 + \frac{15}{2}\lambda_3$, $\xi_3 = \lambda_3$,

отримаємо такий канонічний вигляд

$$Q_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\xi_1^2 + \xi_2^2 - 55\xi_3^2 = \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + \alpha_3\xi_3^2$$

квадратичної форми (4), де $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -55.$ Всі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ канонічного вигляду є ненульовими і знак коефіцієнта α_2 відрізняється від знака двох інших коефіцієнтів α_1 і α_3. Отже, згідно із загальноприйнятою класифікацією рівняння (3) є рівнянням *гіперболічного* типу.

Зведення рівняння в частинних похідних другого порядку від двох змінних до канонічного виду (канонічної форми)

Зведення диференціального рівняння (1) з частинними похідними

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (1)$$

другого порядку до канонічної форми стосується головним чином тільки тієї частини рівняння, яка містить члени з похідними другого порядку. Нижче викладена методика зведення диференціального рівняння (1) з частинними похідними другого порядку відносно двох змінних до такого канонічного виду, в якому серед коефіцієнтів при похідних другого порядку *ненульовим є лише коефіцієнт при змішаній похідній*.

Отже, введемо нові змінні

$$\xi = \xi(x,y) \text{ і } \eta = \eta(x,y) \qquad (2)$$

таким чином, щоб у записаному відносно них рівнянні (1)

$$a_1(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2b_1(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + c_1(\xi,\eta)u_{\eta\eta} + d_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \qquad (3)$$

коефіцієнти $a_1(\xi,\eta)$ і $c_1(\xi,\eta)$ стали нульовими. При цьому якобіан переходу від координат x, y до ξ, η повинен бути ненульовим:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad (4)$$

Запишемо похідні $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ в координатах ξ, η, вважаючи тепер функцію u функцією від змінних ξ і η, котрі в свою чергу є функціями від координат x і y:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y; \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Підставивши вирази (5) і (6) в (1), отримаємо рівняння

$$
\begin{aligned}
&a(x,y)(u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx})+2b(x,y)\\
&(u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy})+\\
&+c(x,y)(u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy})+\\
&+d(x,y,u,u_x,u_y)=0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

У рівнянні (7) зберемо всі коефіцієнти при других частинних похідних $u_{\xi\xi}$, $u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}$, тоді одержимо:

$$
\begin{aligned}
&\left(a(x,y)\xi_x^2+2b(x,y)\xi_x\xi_y+c(x,y)\xi_y^2\right)u_{\xi\xi}+\\
&+2\left(a(x,y)\xi_x\eta_x+b(x,y)(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+c(x,y)\xi_y\eta_y\right)u_{\xi\eta}+\\
&+\left(a(x,y)\eta_x^2+2b(x,y)\eta_x\eta_y+c(x,y)\eta_y^2\right)u_{\eta\eta}+a(x,y)(u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx})+\\
&+2b(x,y)(u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy})+c(x,y)(u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy})+d(x,y,u,u_x,u_y)=0
\end{aligned}
$$

або

$$
a_1(\xi,\eta)u_{\xi\xi}+2b_1(\xi,\eta)u_{\xi\eta}+c_1(\xi,\eta)u_{\eta\eta}+d_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0\,, \tag{8}
$$

де

$$
\begin{aligned}
a_1(\xi,\eta)&=a(x,y)\xi_x^2+2b(x,y)\xi_x\xi_y+c(x,y)\xi_y^2\,,\\
b_1(\xi,\eta)&=a(x,y)\xi_x\eta_x+b(x,y)(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+c(x,y)\xi_y\eta_y\,,\\
c_1(\xi,\eta)&=a(x,y)\eta_x^2+2b(x,y)\eta_x\eta_y+c(x,y)\eta_y^2\,,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
d_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)&=a(x,y)(u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx})+2b(x,y)(u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy})+\\
&+c(x,y)(u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy})+d(x,y,u,u_x,u_y).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Канонічні форми рівнянь гіперболічного типу

Рівняння (1) є рівнянням гіперболічного типу, якщо дискримінант $\Delta=b^2-ac>0$. Для того щоб записати диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно двох змінних (1) гіперболічного типу в канонічній формі, вибирають нові змінні так, щоб у рівнянні (8) коефіцієнти a_1 і c_1 дорівнювали нулю. Тоді рівняння (8) матиме вигляд

$$
2b_1(\xi,\eta)u_{\xi\eta}+d_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0\,,
$$

або після ділення обох частин на $2b_1$:

$$
u_{\xi\eta}=k(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,. \tag{11}
$$

Рівняння (11) називають ***першою канонічною формою***.

Як випливає із (9), для того щоб коефіцієнти a_1 і c_1 дорівнювали нулю, повинні виконуватись рівняння

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0 ,$$

$$a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0 . \qquad (12)$$

Тобто (12) є квадратними рівняннями відносно $\dfrac{\xi_x}{\xi_y}$ та $\dfrac{\eta_x}{\eta_y}$:

$$a\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2b\frac{\xi_x}{\xi_y} + c = 0 . \qquad (13)$$

Подібно до того, як рівняння $x = 0$, $y = 0$ описують координатні лінії в прямокутній декартовій системі координат (x, y), а рівняння $x = C_1$, $y = C_2$ описують координатні напрямки, рівняння $\xi = 0$, $\eta = 0$ описують координатні лінії в системі координат (ξ, η), а рівняння

$$\xi = C_3, \eta = C_4 \qquad (14)$$

описують координатні напрямки в цій же системі координат. Вздовж координатних напрямків (13) виконуються умови

$$d\xi = 0, d\eta = 0 \qquad (15)$$

або

$$\xi_x dx + \xi_y dy = 0 , \quad \eta_x dx + \eta_y dy = 0 . \qquad (16)$$

Звідси маємо

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = -\frac{dy}{dx} , \quad \frac{\eta_x}{\eta_y} = -\frac{dy}{dx} . \qquad (17)$$

Підставивши в (13) вирази (17), отримаємо рівняння

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0 , \qquad (18)$$

яке називають ***характеристичним рівнянням***. Звідси маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} . \qquad (19)$$

Загальний розв'язок $\xi(x,y)$ першого рівняння (19) (візьмемо в (19) знак "+") і загальний розв'язок $\eta(x,y)$ другого рівняння (19) (візьмемо в (19) знак "–") — обидва ці розв'язки будуть тими шуканими функціями $\xi(x,y)$ і $\eta(x,y)$, які перетворюють в нуль коефіцієнти a_1 і c_1 рівняння (8). Ці загальні розв'язки називають ***характеристиками рівняння*** (1).

Якщо ввести нові незалежні змінні

$$\omega=\xi+\eta,\quad \nu=\xi-\eta, \tag{20}$$

то отримаємо *другу канонічну форму рівняння* гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}=k_1(\omega,\nu,u,u_\omega,u_\nu)\,. \tag{21}$$

У цій формі змішані похідні відсутні. Якщо $k_1\equiv 0$, то матимемо *хвильове рівняння* з двома незалежними змінними.

Приклад 3. Звести рівняння

$$2u_{xx}+5u_{xy}+2u_{yy}-6u_x+7u=0 \tag{22}$$

до канонічного вигляду. В даному випадку, згідно з позначеннями в рівнянні (1), маємо: $a=2,\ b=\frac{5}{2},\ c=2$, тоді дискримінант $\Delta=b^2-ac=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{9}{4}>0$ і рівняння (22) є рівнянням гіперболічного типу. Записуємо рівняння характеристик (18):

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-5\frac{dy}{dx}+2=0\,, \tag{23}$$

звідки маємо два звичайних диференціальних рівняння для знаходження характеристик:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4}}{2}=\frac{\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}}{2}=\frac{5\pm3}{4}$$

або $\frac{dy}{dx}=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2},\ \frac{dy}{dx}=\frac{5+3}{4}=2$.

Звідси знаходимо рівняння характеристик

$$2dy=dx,\quad dy=2dx \quad\Leftrightarrow\quad 2y=x+C_1,\quad y=2x+C_2 \quad\Leftrightarrow$$
$$x-2y=C_3,\ \ 2x-y=C_4\,.$$

За першу і другу характеристики вибираємо такі:

$$\xi=x-2y,\qquad \eta=2x-y\,. \tag{24}$$

Знаходимо перші частинні похідні функцій ξ і η по x і y:

$$\begin{aligned}&\xi'_x=1,\quad \xi'_y=-2,\\ &\eta'_x=2,\quad \eta'_y=-1.\end{aligned} \tag{25}$$

Обчислюємо якобіан переходу від координат x, y до ξ, η:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 .$$

Всі другі похідні ξ і η по x і y дорівнюють нулю. Перевіримо, чи коефіцієнти $a_1(\xi,\eta)$ і $c_1(\xi,\eta)$ дорівнюють нулю. Для цього обчислюємо похідні:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + 2u_\eta, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -2u_\xi - u_\eta;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} = u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} =$$

$$= -2u_{\xi\xi} - 5u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Підставивши отримані вирази для похідних $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ в рівняння (22), одержимо:

$$2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} - 6u_x + 7u = 2(u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}) +$$

$$+5(-2u_{\xi\xi} - 5u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta}) + 2(4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - 6(u_\xi + 2u_\eta) + 7u = 0$$

або

$$-9u_{\xi\eta} - 6(u_\xi + 2u_\eta) + 7u = 0 \;\Leftrightarrow\; u_{\xi\eta} + \frac{2}{3}u_\xi + \frac{4}{3}u_\eta - \frac{7}{9}u = 0 . \qquad (26)$$

Таким чином, *перша канонічна форма рівняння* (22) має вигляд (26).

Для одержання *другої канонічної форми* рівняння (22) введемо нові змінні α і β

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta . \qquad (27)$$

Тоді

$$\begin{matrix} \alpha'_\xi = 1, & \alpha'_\eta = 1, \\ \beta'_\xi = 1, & \beta'_\eta = -1,. \end{matrix} \quad . \begin{vmatrix} \alpha'_\xi & \alpha'_\eta \\ \beta'_\xi & \beta'_\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 , \qquad (28)$$

$$\begin{gathered} u_\xi = u_\alpha \alpha_\xi + u_\beta \beta_\xi = u_\alpha + u_\beta, \\ u_\eta = u_\alpha \alpha_\eta + u_\beta \beta_\eta = u_\alpha - u_\beta, \\ u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha} - u_{\alpha\beta} + u_{\beta\alpha} - u_{\beta\beta} = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}. \end{gathered} \qquad (29)$$

Після підстановки виразів (29) в рівняння (26) отримаємо

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{2}{3}(u_\alpha + u_\beta) + \frac{4}{3}(u_\alpha - u_\beta) - \frac{7}{9}u = 0 . \qquad (30)$$

Рівняння (30) — це *друга канонічна форма* рівняння (22).

Приклад 4. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} + u_x + u = 0\,. \qquad (1^*)$$

В даному випадку, згідно з позначеннями в рівнянні (1), маємо: $a=1, b=1, c=x$, тоді дискримінант $\Delta = b^2 - ac = 1 - x$.

1) При $\Delta < 0$, тобто при $1 - x < 0$ рівняння (31) є рівнянням *еліптичного* типу. Записуємо рівняння характеристик (18):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + x = 0\,, \qquad (32)$$

звідки маємо два звичайних диференціальних рівняння для знаходження характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-x}}{1} = 1 \pm \sqrt{1-x} = 1 \pm i\sqrt{x-1}$$

або $\dfrac{dy}{dx} = 1 \pm i\sqrt{x-1} \;\; \Leftrightarrow \quad dy = (1 \pm i\sqrt{x-1})dx$

$$\Leftrightarrow \quad dy = dx \pm i\sqrt{x-1}dx\,.$$

Звідси маємо такі рівняння для знаходження двох характеристик (першій характеристиці відповідає знак “+”, другій — знак “–”):

$$y = x \pm i\int \sqrt{x-1}dx \;\; \Leftrightarrow \quad y = x \pm i\int (x-1)^{\frac{1}{2}} dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = x + i\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C_1\,, \;\; y = x - i\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C_2\,;$$

$$x - y + i\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} = -C_1 = C_3\,, \;\; x - y - i\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} = -C_2 = C_4\,.$$

Отже, ми одержали рівняння характеристик у вигляді

$$\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C_3, \qquad \varphi(x,y) - i\psi(x,y) = C_4\,, \qquad (33)$$

де $\varphi(x,y) = x - y, \quad \psi(x,y) = \dfrac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$.

Тобто, у випадку рівняння еліптичного типу маємо дві комплексно-спряжені характеристики (33). В цьому випадку нові змінні ξ, η вибирають таким чином

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y)$$

тобто в даному випадку

$$\xi == x - y, \qquad \eta = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\,. \qquad (34)$$

Знаходимо перші частинні похідні функцій ξ і η по x і y:

$$\xi_x = 1, \qquad \xi_y = -1,$$

$$\eta_x = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{1}{2}} \equiv \sqrt{x-1}, \quad \eta_y = 0;$$

Обчислюємо якобіан переходу від координат x, y до ξ, η і перевіряємо, чи він не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{x-1} & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{x-1} \neq 0\,.$$

Другі частинні похідні функцій ξ і η по x і y мають вигляд:

$$\xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,,\ \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0\,.$$

Записуємо вирази для похідних:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + \sqrt{x-1}\,u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\xi;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} = u_{\xi\xi} + 2\sqrt{x-1}\,u_{\xi\eta} +$$

$$+(x-1)u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}u_\eta,$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} = -u_{\xi\xi} -$$

$$-\sqrt{x-1}u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

Підставивши отримані вирази для похідних $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ в рівняння (31), одержимо:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} + u_x + u = u_{\xi\xi} + 2\sqrt{x-1}\,u_{\xi\eta} + (x-1)u_{\eta\eta} +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}u_\eta + 2(-u_{\xi\xi} - \sqrt{x-1}\,u_{\xi\eta}) + xu_{\xi\xi} + u_\xi + \sqrt{x-1}\,u_\eta + u = 0$$

або

$$(x-1)u_{\xi\xi} + (x-1)u_{\eta\eta} + u_\xi + \left(\sqrt{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)u_\eta + u = 0 \iff$$

$$\iff u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{x-1}u_\xi + \frac{2x-1}{2\sqrt{(x-1)^3}}u_\eta + \frac{1}{x-1}u = 0\,.$$

Виразивши в останньому рівнянні старі змінні x, y через нові змінні ξ, η, використавши формули (34), отримаємо остаточний вигляд канонічної форми рівняння (31)

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\left(\frac{3}{2}\eta\right)^{-\frac{2}{3}}u_\xi+\left(\left(\frac{3}{2}\eta\right)^{-\frac{1}{3}}+(3\eta)^{-1}\right)u_\eta+\left(\frac{3}{2}\eta\right)^{-\frac{2}{3}}u=0\,. \qquad (35)$$

Таким чином, якщо рівняння (31) є рівнянням еліптичного типу, то його *канонічна форма* має вигляд (35).

2) При $\Delta=0$, тобто при $x=1$ рівняння (31) є рівнянням *параболічного* типу. Записуємо рівняння характеристик (18):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}+x=0\,,$$

або

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}+1=0\,, \qquad (36)$$

яке має лише один розв'язок:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{b}{a}=1\,.$$

Звідси маємо рівняння для знаходження однієї характеристики:

$$dy=dx \;\Rightarrow\; y=x+C_1 \;\Rightarrow\; x-y=-C_1=C_2\,. \qquad (37)$$

Отже, у вигляді першої нової змінної ξ можна вибрати $\xi=x-y$, а вибрати другу нову змінну η можна довільно при умові, що якобіан переходу $\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}$ не дорівнюватиме нулю. Виберемо $\eta=y$.

Тоді $\xi_x=1,\quad \xi_y=-1,$

$\eta_x=0,\quad \eta_y=1.$

Обчислюємо якобіан переходу від координат x, y до ξ, η і перевіряємо, чи він не дорівнює нулю: $\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

Другі частинні похідні функцій ξ і η по x і y дорівнюють нулю: $\xi_{xx}=\xi_{xy}=\xi_{yy}=\eta_{xx}=\eta_{xy}=\eta_{yy}=0$. Записуємо вирази для похідних:

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi,$$

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=-u_\xi+u_\eta;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} = u_{\xi\xi},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Підставивши вирази для похідних $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ в рівняння (31), одержимо:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} + u_x + u = u_{\xi\xi} + 2(-u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + u_\xi + u = 0$$

або

$$u_{\eta\eta} + u_\xi + u = 0 \,. \tag{38}$$

Отже, якщо рівняння (31) є рівнянням *параболічного типу*, то його *канонічна форма* має вигляд (38).

3). При $\Delta > 0$, тобто при $1 - x > 0$ рівняння (31) є рівнянням *гіперболічного* типу. Записуємо рівняння характеристик (18):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + x = 0,$$

звідки маємо два звичайних диференціальних рівняння для знаходження характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-x}}{1} = 1 \pm \sqrt{1-x}$$

або

$$\frac{dy}{dx} = 1 \pm \sqrt{1-x} \iff dy = (1 \pm \sqrt{1-x})dx \iff dy = dx \pm \sqrt{1-x}\,dx\,.$$

Звідси одержуємо два таких рівняння для знаходження двох характеристик (першій характеристиці відповідає знак “+”, другій — знак “–”):

$$y = x \pm \int \sqrt{1-x}\,dx \iff y = x \mp \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\Rightarrow \quad y = x - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C_1, \Rightarrow \quad y = x + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C_2;$$

$$x - y - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} = -C_1 = C_3, \quad x - y + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} = -C_2 = C_4\,.$$

За першу і другу характеристики вибираємо такі:

$$\xi = x - y - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = x - y + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\,. \tag{39}$$

Знаходимо перші частинні похідні функцій ξ і η по x і y:

$$\xi_x = 1 + (1-x)^{\frac{1}{2}}, \qquad \xi_y = -1,$$

$$\eta_x = 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}, \qquad \eta_y = -1.$$

Обчислюємо якобіан переходу від координат x, y до ξ, η і перевіряємо, чи він не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+(1-x)^{\frac{1}{2}} & -1 \\ 1-(1-x)^{\frac{1}{2}} & -1 \end{vmatrix} = -2\sqrt{1-x} \neq 0\,.$$

Другі частинні похідні функцій ξ і η по x і y мають вигляд:

$$\xi_{xx} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, \qquad \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}, \qquad \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0\,.$$

Записуємо вирази для похідних:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = (1+\sqrt{1-x})u_\xi + (1-\sqrt{x-1})\,u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\xi - u_\eta;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} = (2-x+2\sqrt{1-x})\,u_{\xi\xi} +$$

$$+2x\,u_{\xi\eta} + (2-x-2\sqrt{1-x})u_{\eta\eta} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}u_\xi + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}u_\eta,$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} =$$

$$= -(1+\sqrt{1-x})u_{\xi\xi} + (-1-\sqrt{1-x}-1+\sqrt{1-x})u_{\xi\eta} - (1-\sqrt{1-x})u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Підставивши отримані вирази для похідних $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ в рівняння (31), одержимо:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} + u_x + u = (2-x+2\sqrt{1-x})\,u_{\xi\xi} +$$

$$+2x\,u_{\xi\eta} + (2-x-2\sqrt{1-x})u_{\eta\eta} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}u_\xi + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}u_\eta +$$

$$+2\Big(-(1+\sqrt{1-x})u_{\xi\xi} + (-1-\sqrt{1-x}-1+\sqrt{1-x})u_{\xi\eta} - (1-\sqrt{1-x})u_{\eta\eta}\Big) +$$

$$+x\Big(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\Big) + (1+\sqrt{1-x})u_\xi + (1-\sqrt{x-1})\,u_\eta + u = 0$$

або

$$4(x-1)u_{\xi\eta}+(1+\sqrt{1-x})u_\xi+(1-\sqrt{1-x})u_\eta+u=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; u_{\xi\eta}-\frac{(1+\sqrt{1-x})}{4(1-x)}u_\xi+\frac{(\sqrt{1-x}-1)}{4(1-x)}u_\eta-\frac{1}{4(1-x)}u=0\,.$$

Виразивши в останньому рівнянні старі змінні x, y через нові змінні $\xi,\ \eta$, використавши формули (39), отримаємо остаточний вигляд канонічної форми рівняння (31)

$$u_{\xi\eta}-\frac{\left(1+\left(\frac{3}{4}(\eta-\xi)\right)^{\frac{1}{3}}\right)}{4\left(\frac{3}{4}(\eta-\xi)\right)^{\frac{2}{3}}}u_\xi+\frac{\left(\left(\frac{3}{4}(\eta-\xi)\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)}{4\left(\frac{3}{4}(\eta-\xi)\right)^{\frac{2}{3}}}u_\eta-\frac{1}{4\left(\frac{3}{4}(\eta-\xi)\right)^{\frac{2}{3}}}u=0. \quad (40)$$

Таким чином, якщо рівняння (31) є рівнянням *гіперболічного типу*, то його *перша канонічна форма* має вигляд (40).

Зведення диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами з частинними похідними другого порядку від *n* змінних до канонічного вигляду

Звести диференціальне рівняння з частинними похідними (ДРЧП) другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\,u_{x_ix_j}+\sum_{k=1}^{n}B_k\,u_{x_k}+Cu=0 \qquad (1)$$

до канонічного вигляду. Тут $A_{ij},\ B_k,\ C$ – постійні коефіцієнти,

$$u_{x_k}\equiv\frac{\partial u}{\partial x_k},\;\; u_{x_ix_j}\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\,.$$

Нехай знайдено перехід від старих змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ до нових незалежних змінних $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ за формулами

$$\xi_k=\alpha_{k1}x_1+\alpha_{k2}x_2+\ldots+\alpha_{kn}x_n=\sum_{m=1}^{n}\alpha_{ki}x_i, \qquad k=1,2,\ldots,n\,, \qquad (2)$$

де $\|\alpha\|\equiv\|\alpha_{km}\|$ – матриця переходу від старих $x_1, x_2, \dots, x_n$ до нових $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ змінних. Тоді запишемо вирази для похідних

$$\xi_{k,i}\equiv\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}=\alpha_{ki}\,. \qquad (3)$$

$$u_{x_i} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\xi'_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ki}, \qquad (4)$$

$$u_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ki}\right) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \xi_m}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ki}\right)\cdot\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} = \sum_{k,m=1}^{n} u_{\xi_k\xi_m}\alpha_{ki}\alpha_{mj}. \qquad (5)$$

Тоді, підставивши вираз (5) в перший член рівняння (1), отримаємо для нього вираз

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\sum_{k,m=1}^{n} u_{\xi_k\xi_m}\alpha_{ki}\alpha_{mj} = \sum_{k,m=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{mj}u_{\xi_k\xi_m} =$$

$$= \sum_{k,m=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{mj}\right)u_{\xi_k\xi_m} = \sum_{k,m=1}^{n}\bar{A}_{km}u_{\xi_k\xi_m} \qquad (6)$$

Тут використовується позначення

$$\bar{A}_{km} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{mj}\,. \qquad (7)$$

Таким чином, при переході від старих змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ до нових $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ за формулою (2) коефіцієнти при старих похідних перетворюються за формулою (7).

З іншого боку, рівнянню (1) ставиться у відповідність квадратична форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j\,. \qquad (8)$$

Виберемо нові змінні $s_1, s_2, \ldots, s_n$ так, щоб квадратичну форму (8) звести до канонічного вигляду

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \bar{Q}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i s_i^2\,, \qquad (9)$$

де кожен з коефіцієнтів p_i, (i = 1, 2,..., n) приймає одне із значень “+1”, “–1” або “0”. Запишемо формули переходу від змінних $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ до змінних $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Нехай в старому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ n-вимірного простору вектор $\vec{v}$ має представлення

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n\,, \qquad (10)$$

а в новому базисі $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ вектор $\vec{v}$ має таке представлення

$$\vec{v} = s_1\vec{f}_1 + s_2\vec{f}_2 + \ldots + s_n\vec{f}_n\,. \qquad (11)$$

Виразимо вектори нового базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ через вектори старого базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$:

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \beta_{11}\vec{e}_1 + \beta_{21}\vec{e}_2 + \dots + \beta_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{f}_2 &= \beta_{12}\vec{e}_1 + \beta_{22}\vec{e}_2 + \dots + \beta_{n2}\vec{e}_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{f}_n &= \beta_{1n}\vec{e}_1 + \beta_{2n}\vec{e}_2 + \dots + \beta_{nn}\vec{e}_n, \end{aligned} \tag{12}$$

і підставимо в (11):

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n = s_1\vec{f}_1 + s_2\vec{f}_2 + \dots + s_n\vec{f}_n = s_1(\beta_{11}\vec{e}_1 + \beta_{21}\vec{e}_2 + \dots \\ &+\beta_{n1}\vec{e}_n) + s_2(\beta_{12}\vec{e}_1 + \beta_{22}\vec{e}_2 + \dots + \beta_{n2}\vec{e}_n) + \dots + s_n(\beta_{1n}\vec{e}_1 + \beta_{2n}\vec{e}_2 + \dots + \\ &+\beta_{nn}\vec{e}_n). \end{aligned} \tag{13}$$

Прирівнявши коефіцієнти при векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, звідси отримаємо

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} s_k, \quad i = 1,2,\dots,n\,. \tag{14}$$

Підставивши (14) в (8), отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j &= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \sum_{k,m=1}^{n} \beta_{ik}s_k\beta_{jm}s_m = \sum_{k,m=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\beta_{ik}\beta_{jm}\right)s_k s_m = \\ &= \sum_{k,m=1}^{n} \bar{A}_{km}s_k s_m, \end{aligned} \tag{15}$$

тобто

$$\bar{A}_{km} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\beta_{ik}\beta_{jm}, \quad k,m = 1,2,\dots,n\,. \tag{16}$$

Тепер порівняємо формули (7) і (16): якщо в формулі (7) покласти

$$\alpha_{ki} = \beta_{ik}, \quad k, i = 1,2,\dots,n\,, \tag{17}$$

(тобто вибираємо матрицю $\|\alpha\| \equiv \|\alpha_{ki}\|$ як транспоновану матрицю $\|\beta\| \equiv \|\beta_{ik}\|$), то тоді характеристична форма рівняння (1) матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u_{\xi_i\xi_i} + \sum_{l=1}^{n} \bar{B}_l u_{\xi_l} + \bar{C}u = 0\,. \tag{18}$$

Таким чином, маємо такий *алгоритм для зведення ДРЧП другого порядку з постійними коефіцієнтами (1) до канонічної форми*:

1) Зводимо квадратичну форму, яка відповідає даному ДРЧП другого порядку, з постійними коефіцієнтами (1)

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

до канонічного вигляду

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\bar{Q}(s_1,s_2,...,s_n)=\sum_{i=1}^{n} p_i s_i^2 \ . \qquad \text{(I)}$$

2) Виражаємо змінні $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ через змінні $s_1, s_2, \dots, s_n$

$$\lambda_i=\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}s_k, \quad i=1,2,...,n \ . \qquad \text{(II)}$$

3) Транспонуємо матрицю $\|\beta\|\equiv\|\beta_{ik}\|$ і отримуємо матрицю $\|\alpha\|\equiv\|\alpha_{ki}\|$:

$$\alpha_{ki}=\beta_{ik}, \quad k,i=1,2,...,n \qquad \text{(III)}$$

і записуємо формули переходу від змінних ξ_k до x_k

$$\xi_k=\sum_{m=1}^{n}\alpha_{km}x_m, \quad k=1,2,...,n \ . \qquad \text{(IV)}$$

4) Використовуючи формули переходу (IV) записуємо рівняння (1) в канонічній формі.

Приклад 3. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}+u_x+u_y+2u_z-u=0 \ . \qquad (19)$$

1) Зводимо квадратичну форму, яка відповідає даному рівнянню, до канонічної форми (I):

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2^2+4\lambda_2\lambda_3+5\lambda_3^2=(\lambda_1+\lambda_2)^2+(\lambda_2+2\lambda_3)^2+$$
$$+\lambda_3^2=s_1^2+s_2^2+s_3^2,$$

$p_1=p_2=p_2=1$, отже таке рівняння є рівнянням еліптичного типу

$$s_1=\lambda_1+\lambda_2\,,\ s_2=\lambda_2+2\lambda_3\,,\ s_3=\lambda_3\,.$$

2) В результаті розв’язання системи:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 \ =s_1,\\ \lambda_2+2\lambda_3=s_2,\\ \qquad\ \lambda_3=s_3\end{cases}$$

виражаємо змінні λ_i через s_i

$$\lambda_1 = s_1 - s_2 + 2s_3,$$
$$\lambda_2 = s_2 - 2s_3,$$
$$\lambda_3 = s_3$$

або у векторно-матричній формі $\vec{\lambda} = \|\beta\|\vec{s}$, і записуємо матрицю переходу $\|\beta\|$ від змінних λ_i до змінних s_i:

$$\|\beta\| = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Транспонуємо матрицю $\|\beta\| \equiv \|\beta_{ik}\|$ і отримуємо матрицю $\|\alpha\| \equiv \|\alpha_{ki}\|$:

$$\|\alpha\| = \|\beta\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

і записуємо формули переходу від змінних ξ_k до x_k, тобто до x, y, z:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x, \\ \xi_2 &= -x + y, \\ \xi_3 &= 2x - 2y + z. \end{aligned} \qquad (IV)$$

4) Запишемо рівняння (49) в канонічній формі. Для цього запишемо похідні

$$\xi_{1,x} = 1, \quad \xi_{1,y} = 0, \quad \xi_{1,z} = 0,$$
$$\xi_{2,x} = -1, \quad \xi_{2,y} = 1, \quad \xi_{2,z} = 0,$$
$$\xi_{3,x} = 2, \quad \xi_{3,y} = -2, \quad \xi_{3,z} = 1;$$

$$u_x = u_{\xi_1}\xi_{1,x} + u_{\xi_2}\xi_{2,x} + u_{\xi_3}\xi_{3,x} = u_{\xi_1} - u_{\xi_2} + 2u_{\xi_3},$$
$$u_y = u_{\xi_1}\xi_{1,y} + u_{\xi_2}\xi_{2,y} + u_{\xi_3}\xi_{3,y} = u_{\xi_2} - 2u_{\xi_3},$$
$$u_z = u_{\xi_1}\xi_{1,z} + u_{\xi_2}\xi_{2,z} + u_{\xi_3}\xi_{3,z} = u_{\xi_3};$$
$$u_x + u_y + 2u_z - u = u_{\xi_1} + 2u_{\xi_3} - u.$$

Отримуємо канонічний вигляд рівняння:

$$u_{\xi_1\xi_1} + u_{\xi_2\xi_2} + u_{\xi_3\xi_3} + u_{\xi_1} + 2u_{\xi_3} - u = 0.$$

Тема 3. Постановки крайових задач математичної фізики

Класичні рівняння математичної фізики: рівняння Лапласа, хвильове рівняння та рівняння теплопровідності (дифузії). Фізичні задачі, які приводять до цих рівнянь. Виведення цих рівнянь. Задача про нестаціонарне температурне поле стержня. Задача про коливання тонкої струни. Задача про стаціонарне температурне поле паралелепіпеда з внутрішніми джерелами тепла, на поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем.

Література [1; 5; 6]

Тема 4. Загальна схема методу відокремлення змінних

Частинні розв'язки лінійної задачі математичної фізики з нульовими (однорідними) граничними умовами. Відокремлення змінних. Власні функції та власні значення задачі Штурма-Ліувілля. Ортогональність та повнота системи власних функцій, невід'ємність власних значень. Суперпозиція частинних розв'язків.

Література [7]

Тема 5. Розв'язання крайових задач для рівняння дифузії (теплопровідності) та хвильового рівняння методом відокремлення змінних

Розв'язання нестаціонарних задач теплопровідності (дифузії) методом відокремлення змінних: однорідне рівняння теплопровідності на відрізку з ненульовою початковою умовою та нульовими граничними умовами; неоднорідне рівняння теплопровідності з нульовою початковою умовою та нульовими граничними умовами; неоднорідне рівняння теплопровідності з ненульовою початковою умовою та нульовими граничними умовами. Мішана лінійна задача теплопровідності: неоднорідне рівняння теплопровідності з ненульовою початковою умовою та ненульовими граничними умовами.

Задача про вільні коливання тонкої струни із закріпленими кінцями, для точок якої в початковий момент часу задані переміщення і швидкості. Задача про вимушені коливання струни, один кінець якої закріплений жорстко, а другий — пружно.

[1–3; 6]

Зразки розв'язання задач

1. Однорідне рівняння теплопровідності з ненульовою початковою умовою та нульовими граничними умовами

Розглядається крайова задача: знайти розв'язок $u(x, t)$ однорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 \le x \le \pi, \qquad t > 0 \tag{1}$$

з ненульовою початковою умовою

$$u(x,0) = x^2, \qquad 0 \le x \le \pi \tag{2}$$

та однорідними граничними умовами 1-го роду (умовами Діріхле)

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0, \\ &u(l,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Задачу (1) — (3) розв'язуємо методом відокремлення змінних (методом Фур'є). *Основна ідея методу* полягає в такому. Будемо шукати всі частинні розв'язки $u_k(x, t)$ рівняння (1), які мають вигляд добутку

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) \tag{4}$$

та задовольняють однорідні граничні умови (3). Потім із усіх цих частинних розв'язків будуємо лінійну комбінацію

$$\sum_k u_k(x,t) = \sum_k X_k(x)T_k(t)\,, \tag{5}$$

яка згідно з принципом суперпозиції для лінійного однорідного рівняння теплопровідності (1) буде також розв'язком цього ж рівняння. Для цієї ж лінійної комбінації (5) при $t = 0$ задовольняємо початкову умову (2). Таким чином, лінійна комбінація (5) і буде шуканим розв'язком задачі (1) — (3)

$$u(x,t) = \sum_k X_k(x)T_k(t)\,. \tag{6}$$

Отже, підставивши добуток (5) в рівняння (1), отримаємо

$$X_k(x)T_k'(t) = a^2 X_k''(x)T_k(t)\,. \tag{7}$$

Вважаючи, що $X_k(x)T_k(t) \ne 0$, та поділивши обидві частини рівняння (7) на $a^2 X_k(x)T_k(t)$, одержимо

$$\frac{T_k'(t)}{a^2 T_k(t)} = \frac{X_k''(x)}{X_k(x)}\,. \tag{8}$$

Ліва частина рівності (8) не залежить від x, а права частина не залежить від t, тобто обидві ці частини є однією і тією ж постійною величиною. Позначимо її через “$-\mu_k^2$”, це є так звана константа відокремлення змінних:

$$\frac{T_k'(t)}{a^2 T_k(t)} = \frac{X_k''(x)}{X_k(x)} = -\mu_k^2. \tag{9}$$

Звідси отримуємо два звичайні диференціальні рівняння

$$T_k'(t) + a^2\mu_k^2 T_k(t) = 0, \tag{10а}$$

$$X_k''(x) + \mu_k^2 X_k(x) = 0. \tag{10б}$$

Рівняння (10*а*) має такий розв’язок

$$T_k(t) = A_k e^{-a^2\mu_k^2 t}, \tag{11а}$$

а загальний розв’язок рівняння (10*б*) має такий вигляд

$$X_k(x) = B_k \sin \;_k x + C_k \cos \;_k x, \tag{11б}$$

де A_k, B_k, C_k – постійні коефіцієнти. Коефіцієнти A_k, B_k, C_k і константи μ_k невідомі і їх потрібно знайти.

Знаходимо спочатку коефіцієнти B_k і C_k. Для цього використаємо однорідні граничні умови (3), які повинен задовольняти розв’язок (6):

$$\begin{aligned} &X_k(0)T_k(t) = 0,\\ &X_k(\pi)T_k(t) = 0, \quad \forall t > 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Оскільки функція $T_k(t)$ ***не*** дорівнює тотожно нулю, то із (12) випливає, що

$$\begin{aligned} &X_k(0) = 0,\\ &X_k(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким чином, функції $X_k(x)$ є розв’язками задачі Штурма–Ліувілля

$$X_k''(x) + \mu_k^2 X_k(x) = 0,\ x \in [0,\pi], \tag{14}$$

$$X_k(0) = 0, \tag{15}$$

$$X_k(\pi) = 0. \tag{16}$$

Отже, потрібно знайти функції $X_k(x)$ і постійні μ_k, за яких ці функції є розв’язками задачі Штурма–Ліувілля.

Підставивши вираз (11*б*) в першу умову (15), отримаємо: $C_k = 0, \forall k$. Тобто функція $X_k(x)$ має вигляд

$$X_k(x) = B_k \sin \quad _k x\,, \tag{17}$$

а із другої умови (16) отримуємо рівняння для знаходження сталої μ_k

$$B_k \sin \mu_k \pi = 0.$$

Оскільки $B_k \neq 0$, то

$$\sin \mu_k \pi = 0, \forall k. \tag{18}$$

Звідси маємо

$$\mu_k \pi = \pi k, \;\; \Rightarrow \;\; \mu_k = k, \tag{19}$$

де k — ціле число.

Таким чином, з точністю до постійних сталих B_k, розв'язками (або *власними функціями*) задачі Штурма–Ліувілля (13) — (15) є повна система ортогональних функцій

$$\left\{ X_k(x) = B_k \sin \mu_k x, \quad \mu_k = k, \;\; k \in \mathrm{N} \right\}, \tag{20}$$

де N – множина натуральних чисел.

Враховуючи загальний вигляд розв'язку (6) та знайдені вирази (11*a*) і (20) для функцій $T_k(t)$ і $X_k(x)$, запишемо вираз для розв'язку $u(x, t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k e^{-a^2 k^2 t} \sin kx\,, \tag{21}$$

де $D_k = A_k B_k, \;\; k \in \mathrm{N}$. Константу D_k підберемо таким чином, щоб задовольнити початкові умови (2) задачі

$$u(x,0) = x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin nx\,. \tag{22}$$

Однак формула (22) — це розклад функції x^2 в ряд Фур'є за власними функціями $\{\sin kx\}$ задачі Штурма–Ліувілля. Коефіцієнти Фур'є D_n отримуємо, використовуючи скалярний добуток функцій у просторі $L^2_{[0;\,\pi]}$, — помножимо обидві частини другої рівності (22) на власну функцію $\sin kx$ і потім проінтегруємо по інтервалу $[0; \pi]$:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin kx \, dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin nx \, \sin kx \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^{\pi} \sin nx \, \sin kx \, dx, \tag{23}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Причому згідно із ортогональністю системи власних функцій $X_k(x)$ всі члени ряду (23), крім n–го члена, будуть дорівнювати нулю. А для n–го члена (при $k = n$) отримаємо рівність

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = D_n \int_0^{\pi} \sin^2 nx\, dx, \quad (n = 1,2,3,\ldots). \tag{24}$$

Звідси отримуємо

$$D_n = \frac{\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx}{\int_0^{\pi} \sin^2 nx\, dx}, \quad (n = 1,2,3,\ldots), \tag{25}$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\left((x^2 \cos nx)\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \cos nx\, dx \right) = -\frac{1}{n}$$

$$\left((-1)^n - 2\int_0^{\pi} x \cos nx\, dx \right) = -\frac{1}{n}\left((-1)^n + \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\right), (n = 1,2,3,\ldots);$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2nx\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Тоді запишемо остаточний вираз для D_n:

$$D_n = -\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n + \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\right), \; (n = 1,2,3,\ldots). \tag{26}$$

Таким чином, розв'язок крайової задачі (1) – (3) з ненульовими початковими умовами та нульовими граничними умовами має вигляд

$$u(x,t) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^n + \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\right) e^{-a^2k^2t} \sin kx\,. \tag{27}$$

2. Неоднорідне рівняння теплопровідності з нульовою початковою умовою та нульовими граничними умовами

Розглядається крайова задача: знайти розв'язок $u(x, t)$ неоднорідного рівняння теплопровідності

$$u_t - a^2 u_{xx} = x + t, \qquad 0 \le x \le \pi, \qquad t > 0 \tag{28}$$

з нульовою початковою умовою

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi \tag{29}$$

та однорідними граничними умовами 1-го роду (умовами Діріхле)

$$u(0,t)=0,$$
$$u(l,t)=0,\quad t>0. \tag{30}$$

Як і в попередній задачі, розв'язок шукаємо також у вигляді (6)

$$u(x,t)=\sum_k X_k(x)T_k(t)\,, \tag{31}$$

де функція $X_k(x)$ є розв'язком відповідної задачі Штурма — Ліувілля

$$X_k''(x)+\mu_k^2 X_k(x)=0,\ x\in[0,\pi], \tag{32}$$
$$X_k(0)=0, \tag{33}$$
$$X_k(\pi)=0, \tag{34}$$

а функція $T_k(t)$ є розв'язком відповідного диференціального рівняння, яке в даному випадку отримаємо нижче. Позначимо через $f(x, t)$ праву частину $x+t$ рівняння теплопровідності (28) і розкладемо її в ряд Фур'є за системою власних функцій $\{X_k(x)=\sin kx,\ k=1,2,3,...\}$ задачі Штурма — Ліувілля (32) — (34):

$$f(x,t)=x+t=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin kx\,, \tag{35}$$

де $f_k(t)$ – коефіцієнти Фур'є розкладу функції $f(x, t)$. Вирази для $f_k(t)$ отримуємо, використовуючи скалярний добуток функцій в просторі $L^2_{[0;\,\pi]}$ та ортогональність системи власних функцій $\{X_k(x)=\sin kx,\ k=1,2,3,...\}$

$$\int_0^\pi f(x,t)X_n(x)dx=\int_0^\pi (x+t)\sin nx\,dx=\int_0^\pi \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x)X_n(x)dx=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\int_0^\pi \sin kx\sin nx\,dx,\quad (n=1,2,3,...). \tag{36}$$

Всі члени ряду (36), крім n-го члена ($n = k$), дорівнюють нулю і для визначення коефіцієнта $f_n(t)$ отримаємо рівність

$$\int_0^\pi f(x,t)X_n(x)dx=\int_0^\pi (x+t)\sin nx\,dx=f_n(t)\int_0^\pi \sin^2 nx\,dx,$$
$$(n=1,2,3,...). \tag{37}$$

Звідси знаходимо вираз для $f_n(t)$:

$$f_n(t)=\frac{\int\limits_0^{\pi}(x+t)\sin nx\,dx}{\int\limits_0^{\pi}\sin^2 nx\,dx}=\frac{2}{\pi n}\Big((-1)^{n+1}(t+\pi)+t\Big),\quad (n=1,2,3,...). \quad (38)$$

Далі, підставивши в рівняння (28) вираз для розв'язку (31) та розклад в ряд Фур'є (35) функції $f(x, t)$, одержимо

$$\sum_k X_k(x)T_k'(t)-a^2\sum_k X_k''(x)T_k(t)=\sum_k X_k(x)f_k(t). \quad (39)$$

Виразимо із рівняння (32) другу похідну $X_k''(x)$ через $X_k(x)$ і підставимо в (39):

$$\sum_k X_k(x)T_k'(t)+a^2\sum_k \mu_k^2 X_k(x)T_k(t)=\sum_k X_k(x)f_k(t), \quad (40)$$

а потім прирівняємо в лівій і правій частинах отриманої рівності (40) коефіцієнти при функціях $X_k(x)$ з однаковими індексами k. В результаті отримаємо рівняння:

$$T_k'(t)+a^2\mu_k^2 T_k(t)=f_k(t),\qquad k=1,2,3,... . \quad (41)$$

Розв'язок $T_k(t)$ рівняння (41) шукаємо методом варіації довільної постійної, тобто якщо $T_k(t)=A_k e^{-a^2\mu_k^2 t}$ – розв'язок однорідного рівняння (41), де A_k — постійна величина, то розв'язок рівняння (41) шукаємо у вигляді

$$T_k(t)=A_k(t)e^{-a^2\mu_k^2 t}, \quad (42)$$

де прийнято, що множник $A_k(t)$ є функцією від t. Тоді, підставивши (42) в (41), отримаємо рівняння для знаходження функції $A_k(t)$:

$$A_k'(t)e^{-a^2\mu_k^2 t}=f_k(t), \quad (43)$$

звідки

$$A_k(t)=\int\limits_0^t f_k(\tau)e^{a^2\mu_k^2\tau}d\tau. \quad (44)$$

Підставивши вираз (44) в (42), дістанемо остаточний вигляд для $T_k(t)$

$$T_k(t)=\int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)}d\tau,$$

або (з урахуванням конкретного виразу (38) для $f_k(t)$):

$$T_k(t) = \frac{2(-1)^{k+1}}{a^2k^3}(1-e^{-a^2k^2t}) + \frac{2}{\pi a^2k^3}\left((-1)^{k+1}+1\right)$$
$$\left(t - \frac{1}{a^2k^2}(1-e^{-a^2k^2t})\right). \qquad (45)$$

Отже, розв'язок крайової задачі (28) — (30) для неоднорідного рівняння теплопровідності з нульовими початковими та граничними умовами має вигляд

$$u(x,t) = \frac{2}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}(1-e^{-a^2k^2t}) + \frac{1}{\pi k^3}\left((-1)^{k+1}+1\right)\left(t-\frac{1}{a^2k^2}(1-e^{-a^2k^2t})\right)\right)$$
$$\sin kx. \qquad (46)$$

3. Неоднорідне рівняння теплопровідності з ненульовою початковою умовою та нульовими граничними умовами

Знайти температурне поле тонкого теплоізольованого циліндричного стержня довжиною L, в якому діють внутрішні теплові джерела, потужність f яких залежить тільки від просторової координати і часу. В початковий момент часу в стержні задано розподіл температури залежно від точки простору. Отже, потрібно розв'язати задачу теплопровідності, знайти розв'язок $u(x, t)$ неоднорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \qquad (1)$$

з початковою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (2)$$

та однорідними граничними умовами

$$u_x(0,t) = 0, \qquad (3)$$
$$u_x(L,t) = 0 \qquad (4)$$

Розв'язок $u(x, t)$ задачі (1) — (4) представимо у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = U(x, t) + V(x, t), \quad (5)$$

де шукані функції $U(x, t)$ і $V(x, t)$ є розв'язками відповідно таких задач:

1) неоднорідного рівняння теплопровідності

$$U_t - a^2 U_{xx} = f(x,t),$$

з нульовими початковою

$$U(x,0) = 0,$$

та граничними умовами

$$U_x(0,t)=0,$$
$$U_x(L,t)=0\ ;$$

2) однорідного рівняння теплопровідності

$$V_t=a^2V_{xx},\qquad 0<x<L,\quad t>0$$

з ненульовими початковою

$$V(x,0)=\varphi(x),\qquad 0\le x\le L$$

та нульовими граничними умовами

$$V_x(0,t)=0,$$
$$V_x(L,t)=0,\quad t>0\ .$$

Розв'язки $U(x,t)$ і $V(x,t)$, відповідно, задач 1) і 2) знаходяться методом відокремлення змінних, як показано вище. Тоді згідно із принципом суперпозиції розв'язків лінійних задач сума (5) розв'язків $U(x,t)$ і $V(x,t)$ буде розв'язком задачі (1) – (4).

4. Мішана задача теплопровідності

У мішаній задачі теплопровідності потрібно знайти розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\qquad 0<x<L,\quad t>0 \tag{1}$$

з ненульовою початковою

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{2}$$

та ненульовими граничними умовами

$$u(0,t)=\varphi_1(t), \tag{3}$$
$$u_x(L,t)+\alpha u(L,t)=\varphi_2(t), \tag{4}$$

де $f(x,t),\varphi(t),\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ – задані функції своїх аргументів, $\alpha>0$.

Для розв'язання методом відокремлення змінних мішаної задачі (1) – (4) ненульові граничні умови (3), (4) зводять до відповідних нульових відносно нової шуканої функкції $W(x,t)$ за допомогою лінійної (або квадратичної) заміни по просторовій координаті x

$$u(x,t)=W(x,t)+c_1(t)+c_2(t)x\ . \tag{5}$$

Для знаходження функцій $c_1(t)$ і $c_2(t)$ підставимо вираз (5) в граничні умови (3) і (4)

$$W(0,t)+c_1(t)=\varphi_1(t)\ , \tag{6}$$
$$W_x(L,t)+\alpha W(L,t)+c_2(t)+\alpha(c_1(t)+c_2(t)L)=\varphi_2(t)\ . \tag{7}$$

Прийнявши в (6) і (7) для функції $W(x,t)$ нульові граничні умови

$$W(0,t)=0\ , \tag{8}$$
$$W_x(L,t)+\alpha W(L,t)=0\ , \tag{9}$$

отримаємо систему двох лінійних рівнянь відносно функцій $c_1(t)$ і $c_2(t)$:

$$c_1(t) = \varphi_1(t), \tag{10}$$

$$\alpha c_1(t) + (1+\alpha L)c_2(t) = \varphi_2(t). \tag{11}$$

Отримані звідси для $c_1(t)$ і $c_2(t)$ вирази

$$c_1(t) = \varphi_1(t),\ c_2(t) = \frac{\varphi_2(t) - \alpha\varphi_1(t)}{1+\alpha L}$$

підставимо в (5):

$$u(x,t) = W(x,t) + \varphi_1(t) + \frac{\varphi_2(t) - \alpha\varphi_1(t)}{1+\alpha L}x. \tag{12}$$

Підставивши вираз (12) в рівняння теплопровідності (1) та в початкову умову (2) і врахувавши умови (8), (9), дістанемо відносно нової функції $W(x,t)$ таку задачу теплопровідності з внутрішніми джерелами тепла з ненульовими початковими та нульовими граничними умовами:

$$W_t - a^2 W_{xx} = f_1(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{13}$$

$$W(x,0) = \varphi(x) - \varphi_1(0) + \frac{\alpha\varphi_1(0) - \varphi_2(0)}{1+\alpha L}x, \tag{14}$$

$$W(0,t) = 0, \tag{15}$$

$$W_x(L,t) + \alpha W(L,t) = 0. \tag{16}$$

Тут

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \varphi_1'(t) + \frac{\alpha\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)}{1+\alpha L}x.$$

Знаходження розв'язку задачі (13) — (16) вже описано в попередньому пункті.

Тема 6. Циліндричні функції. Розв'язок крайових задач у циліндричній системі координат методом відокремлення змінних

Циліндричні функції. Означення та класифікація циліндричних функцій. Співвідношення між циліндричними функціями Бесселя, Ноймана і Ганкеля. Диференціальне рівняння для циліндричних функцій (рівняння Бесселя), розв'язок цього рівняння. Поведінка циліндричних функцій для випадків, коли аргумент прямує до нуля або до нескінченності. Ортогональність і повнота циліндричних функцій на відрізку.

Оператор Лапласа в циліндричній системі координат. Розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності для довгого циліндра методом відокремлення змінних. Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі.

Література [5]

Тема 7. Сферичні функції. Розв'язок крайових задач у сферичній системі координат методом відокремлення змінних

Означення сферичних функцій. Диференціальне рівняння для сферичних функцій (рівняння Лежандра). Ортогональність і повнота системи сферичних функцій на сфері одиничного радіуса. Загальний вигляд розв'язку для рівняння Лапласа в сферичних координатах. Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі методом відокремлення змінних. Розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для кулі.

Література [5–8]

Тема 8. Рівняння Лапласа та Пуассона. Розв'язок задачі Діріхле

Оператор Лапласа. Рівняння еліптичного типу. Рівняння Лапласа. Рівняння Пуассона. Оператор Лапласа в прямокутній декартовій системі координат. Оператор Лапласа в циліндричній та сферичній системах координат. Фізичні задачі, які приводять до рівнянь Лапласа та рівняння Пуассона. Задача Діріхле для оператора Лапласа. Фундаментальний розв'язок для рівняння Лапласа. Функція Гріна задачі Діріхле. Розв'язок задачі Діріхле за допомогою функції Гріна.

Література [16–18]

Зразки розв'язання задач

Задача. Знайти обмежений розв'язок u рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \qquad (1)$$

в крузі радіуса R, якщо на границі круга задано значення шуканої функції

$$u\big|_R = f(\varphi)\,, \qquad (2)$$

де φ — кругова координата, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Розв'язання. Задачу зручно розв'язувати в полярній системі координат, в якій рівняння (1) і (2) відносно шуканої функції $u(r,\varphi)$ мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0,\ 0<r<R \tag{3}$$

$$u(R,\varphi)=f(\varphi),\ 0\le\varphi\le 2\pi . \tag{4}$$

Обмежений розв'язок задачі (3), (4) знаходимо методом відокремлення змінних. Шукаємо всі частинні роз'язки рівняння (3) у вигляді

$$u_k(r,\varphi)=R_k(r)\Phi_k(\varphi), \tag{5}$$

де k — деякий індекс. Підставимо (5) в (3):

$$R_k''(r)\Phi_k(\varphi)+\frac{1}{r}R_k'(r)\Phi_k(\varphi)+\frac{1}{r^2}R_k(r)\Phi_k''(\varphi)=0 . \tag{6}$$

Помножимо обидві частини рівняння (6) на r^2 і поділимо на $R_k(r)\Phi_k(\varphi)$. В результаті отримаємо

$$\frac{r^2R_k''+rR_k'}{R_k}+\frac{\Phi_k''}{\Phi_k}=0$$

або після відокремлення змінних

$$\frac{r^2R_k''+rR_k'}{R_k}=-\frac{\Phi_k''}{\Phi_k}=-\lambda_k^2 . \tag{7}$$

Звідси дістанемо два рівняння

$$\Phi_k''-\lambda_k^2\Phi_k=0, \tag{8}$$

$$r^2R_k''+rR'+\lambda_k^2R_k=0 . \tag{9}$$

Рівняння (8) має загальний розв'язок

$$\Phi_k(\varphi)=A_ke^{\lambda_k\varphi}+B_ke^{-\lambda_k\varphi}, \tag{10}$$

причому функція $\Phi_k(\varphi)$ повинна бути періодичною з періодом 2π:

$$\Phi_k(\varphi)=\Phi_k(\varphi+2\pi),\quad 0\le\varphi<+\infty \tag{11}$$

або мати період, кратний числу 2π. Остання умова буде виконуватись лише тоді, коли число λ_k є чисто уявним, тобто

$$\lambda_k=ik,\ (k\in Z-\text{множина цілих чисел}). \tag{12}$$

Звідси випливає, що

$$\lambda_k^2=-k^2,\ k\in Z . \tag{13}$$

Тоді функція $\Phi_k(\varphi)$ матиме вигляд

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi, \ \ k \in Z \,, \qquad (14)$$

а рівняння (9) запишемо так:

$$r\frac{\partial}{\partial r}(rR_k') - k^2 R_k = 0 \,. \qquad (15)$$

Тепер визначимо функцію $R_k(r)$.

При k = 0 маємо

$$r\frac{\partial}{\partial r}(rR_k') = 0 \,.$$

Звідси:

$$rR_0' = C_0, \ \ R_0' = \frac{C_0}{r}, \ \ R_0(r) = C_0 \ln r + C_1 \,, \qquad (16)$$

де C_0, C_1 — деякі сталі. При r = 0 розв'язок має бути обмеженим, тому

$$C_0 = 0 \ \text{ і } \ R_0(r) = 1 \,. \qquad (17)$$

При k ≠ 0 рівняння (15) перепишемо у вигляді

$$r^2 R_k'' + rR' - k^2 R_k = 0 \qquad (18)$$

і частинні розв'язки рівняння (18) шукаємо у вигляді степеневої функції відносно r:

$$R_k(r) = r^{\alpha} \,. \qquad (19)$$

Підставивши (19) у (18), отримаємо:

$$r^2 \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - k^2 r^{\alpha} = 0$$

або

$$\alpha(\alpha-1) r^{\alpha} + \alpha r^{\alpha} - k^2 r^{\alpha} = 0 \,.$$

Після ділення обох частин останнього рівняння на r^{α} отримаємо

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - k^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha^2 - k^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha^2 = k^2 \ \Leftrightarrow \ \alpha = \pm k \,. \qquad (20)$$

Тому згідно із (19) два лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (18) матимуть вигляд:

$$R_{k_1}(r) = r^{k}, \ \ R_{k_2}(r) = r^{-k} \,. \qquad (21)$$

Розв'язок $R_{k_2}(r) = r^{-k}$ дає особливість у точці r = 0, тому в результаті загальний розв'язок рівняння (18) має вигляд

$$R_k(r) = R_{k_1}(r) = r^{k}, (k \in N \text{ — множина натуральных чисел}). \qquad (22)$$

Тоді з урахуванням (17) загальний розв'язок рівняння (15) можемо записати за формулою

$$R_k(r) = r^{k}, \ \ (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \,. \qquad (23)$$

Тоді частинний розв'язок (5) матиме вигляд

$$u_k(r,\varphi)=r^k(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi),\quad (k=0,1,2,3,\ldots),$$

а згідно із принципом суперпозиції для лінійного однорідного рівняння (яким є рівняння (3)) загальний розв'язок $u(r,\varphi)$ рівняння (3) має вигляд суми ряду:

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}r^k(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi). \qquad (24)$$

Тепер визначимо коефіцієнти A_k і B_k. Для цього використаємо граничну умову (4):

$$u(R,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}R^k(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi)=f(\varphi),$$

тобто

$$\sum_{k=0}^{\infty}R^k(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi)=f(\varphi). \qquad (25)$$

Для визначення коефіцієнтів A_k і B_k помножимо скалярно в просторі $L_2[-\pi;\pi]$ обидві частини рівності (25) відповідно на $\cos k\varphi$ і $\sin k\varphi$. В результаті отримаємо:

$$A_k=\frac{1}{R^k}\cdot\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos(k\varphi)d\varphi}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(k\varphi)d\varphi},\quad B_k=\frac{1}{R^k}\cdot\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin(k\varphi)d\varphi}{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(k\varphi)d\varphi}$$

або з урахуванням значення інтегралів

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(k\varphi)d\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(k\varphi)d\varphi=\pi:$$

$$A_k=\frac{1}{\pi R^k}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos(k\varphi)d\varphi,\quad B_k=\frac{1}{\pi R^k}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin(k\varphi)d\varphi. \qquad (26)$$

Підставивши (26) в формулу (24) отримаємо остаточний вираз для розв'язку

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)(\cos k\tau\cdot\cos k\varphi+\sin k\tau\sin k\varphi)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\cos k(\varphi-\tau)d\tau.$$

Тема 9. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння

Сфери застосування для хвильового рівняння. Постановка задачі Коші для хвильового рівняння. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння. Формули Д'Аламбера та Пуассона. Задачі про малі поперечні коливання довгої струни. Пряма біжуча хвиля, зворотня біжуча хвиля. Задача про малі коливання мембрани.

Література [5–8]

Тема 10. Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії

Сфери застосування для рівняння дифузії. Постановка задачі Коші для рівняння дифузії. Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії. Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії.

Література [1; 4; 6]

Тема 11. Застосування нелінійних диференціальних рівнянь при моделюванні процесів живої та неживої природи

Роль нелінійних диференціальних рівнянь при моделюванні процесів живої та неживої природи. Основні методи побудови точних розв'язків для нелінійних рівнянь: метод оберненої задачі розсіювання, метод симетрій Лі. Ілюстрація методу оберненої задачі розсіювання на прикладі нелінійного рівняння Шрьодінгера. Рівняння Фішера. Рівняння типу реакції — дифузії.

Література [10–16]

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тема 1. Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними

1. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП) m-го порядку відносно n-змінних?
2. Який оператор називається диференціальним оператором з частинними похідними m-го порядку?
3. Яка функція називається *регулярним (класичним) розв'язком* диференціального рівняння з частинними похідними m-го порядку відносно n-змінних?

4. Яке рівняння називається *лінійним* диференціальним рівнянням з частинними похідними n-го порядку?
5. Яке рівняння називається *квазілінійним* диференціальним рівнянням з частинними похідними n-го порядку?
6. Яке рівняння називається *нелінійним* диференціальним рівнянням з частинними похідними n-го порядку?
7. Яке *лінійне* диференціальне рівняння з частинними похідними m-го порядку відносно n-змінних називається *однорідним*, а яке — *неоднорідним*?
8. Принцип суперпозиції розв'язків для однорідного диференціального рівняння з частинними похідними.

Тема 2. Класифікація та канонічний вид лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку

1. Яка форма називається *характеристичною формою* лінійного диференціального рівняння з частинними похідними n-го порядку?
2. Яка форма називається *характеристичною формою* лінійного диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку?
3. Яка форма називається *канонічною формою* лінійного диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку?
4. Класифікація лінійних ДРЧП 2-го порядку.
5. Які рівняння називаються рівняннями еліптичного типу, гіперболічного типу, параболічного типу?
6. Яке рівняння називається рівнянням характеристик (характеристичним рівнянням)?

Тема 3. Постановки крайових задач математичної фізики

1. Записати загальну схему постановки крайових (межових) задач математичної фізики.
2. Записати схему постановки крайовоих задач теплопровідності.
3. Що таке крайові (межові) умови?
4. Які умови називаються початковими умовами?
5. Які умови називаються граничними умовами?
6. Як визначається кількість межових умов?
7. Що таке узгодженість початкових та граничних умов?

8. Навести приклад граничної умови Діріхле для рівняння теплопровідності.
9. Навести приклад граничної умови Ноймана.
10. Що таке змішані граничні умови?
11. Навести приклад змішаної граничної умови для рівняння теплопровідності.
12. Які умови називають однорідними?
13. Яке рівняння теплопровідності називають неоднорідним?
14. Навести приклад фізичної інтерпретації неоднорідного рівняння теплопровідності.
15. Яка задача теплопровідності називається стаціонарною?
16. Записати схему постановки крайових задач для хвильового рівняння.
17. Записати схему постановки крайової задачі про малі поперечні коливання довгої струни.
18. Записати схему постановки крайової задачі про малі поперечні коливання короткої струни.
19. Навести приклад фізичної інтерпретації неоднорідного хвильового рівняння.
20. Сформулювати межову задачу про стаціонарний розподіл температури в тонкій пластині.

Тема 4. Загальна схема методу відокремлення змінних

1. Що означає виконати відокремлення змінних у рівнянні відносно функції від двох змінних?
2. Для розв'язання яких задач — лінійних чи нелінійних — застосовується метод відокремлення змінних?
3. Сформулювати задачу Штурма-Ліувілля.
4. Які властивості власних функцій та власних значень задачі Штурма-Ліувілля?
5. Записати загальну схему методу відокремлення змінних при розв'язанні нестаціонарної лінійної задачі теплопровідності, де шукана функція залежить від однієї просторової координати.
6. Записати загальну схему методу відокремлення змінних при розв'язанні лінійних задач теплопровідності.

Тема 5. Розв’язання крайових задач для рівняння дифузії (теплопровідності) та хвильового рівняння методом відокремлення змінних

1. Сформулювати мішану задачу теплопровідності (дифузії).
2. Записати схему розв’язання мішаної задачі теплопровідності методом відокремлення змінних.
3. Сформулювати мішану задачу для хвильового рівняння.
4. Записати схему розв’язання мішаної задачі теплопровідності методом відокремлення змінних.
5. Записати приклад розв’язання методом відокремлення змінних нестаціонарної задачі теплопровідності в двовимірній просторовій області.
6. Привести приклад розв’язання методом відокремлення змінних задачі для хвильового рівняння в двовимірній просторовій області.

Тема 6. Циліндричні функції. Розв’язок крайових задач у циліндричній системі координат методом відокремлення змінних

1. Записати диференціальне рівняння для циліндричних функцій.
2. Дати означення циліндричних функцій.
3. Описати поведінку функцій Бесселя та Ноймана, коли їх аргумент прямує до нуля або до нескінченності.
4. Довести властивість ортогональності циліндричних функцій для задачі теплопровідності в крузі радіусом 1, на границі якого задана нульова гранична умова Ноймана.

Тема 7. Сферичні функції. Розв’язок крайових задач у сферичній системі координат методом відокремлення змінних

1. Записати диференціальне рівняння для сферичних функцій.
2. Дати означення сферичних функцій.
3. Довести властивість ортогональності сферичних функцій для задачі теплопровідності в кулі радіусом 1, на поверхні якої задана нульова гранична умова Діріхле.

Тема 8. Рівняння Лапласа та Пуассона. Розв'язок задачі Діріхле

1. Яке рівняння називається рівнянням Лапласа?
2. Яке рівняння називається рівнянням Пуассона?
3. Навести приклад фізичної інтерпретації рівняння Лапласа.
4. Навести приклад фізичної інтерпретації рівняння Пуассона.
5. Записати рівняння Лапласа в циліндричній системі координат.
6. Записати рівняння Пуассона в сферичній системі координат.
7. Сформулювати задачу Діріхле для рівняння Лапласа.
8. Записати схему розв'язання методом відокремлення змінних задачі для рівняння Лапласа в прямокутній області із ненульовими граничними умовами.
9. Записати схему розв'язання методом відокремлення змінних задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області із ненульовими граничними умовами.
10. Записати схему розв'язання методом відокремлення змінних задачі для рівняння Лапласа в крузі із граничною умовою Діріхле.

Тема 9. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння

1. Сформулювати задачу Коші для хвильового рівняння для нескінченної просторової області.
2. Сформулювати задачу Коші для хвильового рівняння для півпростору.
3. Записати формулу Д'Аламбера.
4. Записати розв'язок задачі Коші про вільні поперечні коливання довгої струни, збуреної в початковий момент часу локальним переміщенням.

Тема 10. Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії

1. Сформулювати задачу Коші для рівняння теплопровідності (дифузії) в просторі.
2. Записати розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії в (n+1) — вимірному просторі.

Тема 11. Застосування нелінійних диференціальних рівнянь при моделюванні процесів живої та неживої природи

1. Два основних методи для побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.
2. На чому базується метод оберненої задачі розсіяння для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.
3. Рівняння Бюргерса та його зв'язок з рівнянням дифузії.
4. Записати рівняння Фішера.
5. Який фізико-хімічний процес описує рівняння Фішера?
6. Нелінійне рівняння Шрьодінгера.
7. Який має вигляд односолітонний розв'язок нелінійного рівняння Шрьодінгера?
8. Записати загальний вигляд рівняння реакції-дифузії.
9. Як знайти стаціонарні точки рівняння реакції-дифузії?

ЗАДАЧІ І ПРИКЛАДИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тема 1. Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними

1. Встановити, які із наведених рівнянь є лінійними (однорідними чи неоднорідними), а які є нелінійними (квазілінійними):

а) $xu_{xy} + xyu_{yy} + 2u_x + u = 0$;

б) $u_x u_{xy} + 3xuu_{yy} + 2u_x - u = 0$;

в) $2u_{xy} + xu_{yy} + uu_x - u = 0$;

г) $\dfrac{\partial}{\partial y}(xu_y + u_x) + 4u_x u_{xy} + u_x - u = 0$;

д) $a(x,y,u)u_{xx} + 4xu_{yy} - u_y + 5x\cos y = 0$.

2. Визначити тип таких рівнянь:

а) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} - 2u_x + y^4 u = 0$;

б) $5u_{xx} - 4u_{xy} + 6u_{yy} + uu_x = 0$;

в) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u = 0$;

г) $xu_{xx} + 5u_{xy} - 2u_{yy} - 12uu_x + u = 0$;

д) $uu_{xx} + xyu_{yy} + 3u_y + 2u = 0$;

е) $(\sin^2 x)u_{xx} + 2(\sin x)u_{xy} + (\cos y)u_{yy} - 3uu_x + u = 0$;

є) $2u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 2u_{yz} + 3u_{zz} - u_x + u = 0$;

ж) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + 2u_y = 0$;

з) $2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 3u_x - u = 0$;

и) $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x = 0$;

і) $- -2u_{xx} + 3u_{xy} + 5u_{yy} + u_{xz} + 3u_{yz} + 2u_{zz} - u_x + u_z + u = 0$.

Тема 2. Класифікація та канонічний вид лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку

Звести до канонічного вигляду диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку:

1. $u_{xx} + 4u_{xy} - u_{yy} + u_y - u = 0$;
2. $4_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} - 2u_x + u = 0$;
3. $2u_{xx} + 4u_{xy} + 2_{yy} + u_x - u_y = 0$;
4. $u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - u_y + u = 0$;
5. $xu_{xx} - u_{yy} + 2u_y = u$;
6. $e^x u_{xx} - xu_{xy} + u_x + u = 0$
7. $xu_{xy} - (chx)u_{yy} + u_x + 1 - xy = 0$
8. $x^2 u_{xx} - u_{yy} + 3u_x + u - x + \ln y = 0$
9. $u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + 3u_y - u = 0$;
10. $(\sin^2 x)u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} + u_{yy} + u_x + u = 0$.

Тема 3. Постановки крайових задач математичної фізики

1. Сформулювати крайову задачу про малі вільні коливання круглої мембрани із жорстко закріпленим краєм, для якої в початковий момент часу задано ненульові переміщення і швидкості її точок.
2. Поставити крайову задачу про вимушені поперечні коливання тонкої однорідної струни під дією масових сил з інтенсивністю f; кінці струни закріплені жорстко, а в початковий момент часу задано ненульові зміщення та швидкості її точок.

3. Поставити крайову задачу про вільні поперечні коливання тонкої однорідної струни, кінці якої закріплені пружно, а в початковий момент часу задано ненульові зміщення та нульові швидкості її точок.
4. Поставити крайову задачу про визначення температурного поля теплоізольованого по бічній поверхні циліндричного стержня довжиною L, на одному кінці якого діє теплове джерело потужністю $f(t)>0$, а на другому кінці підтримується температура $g(t)$.
5. Поставити крайову задачу про визначення температурного поля прямокутного паралелепіпеда з розмірами 2a □ 2b □ 2c см, на бічній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем температури u_c; коефіцієнт конвективного телообміну α.

Тема 5. Розв'язання крайових задач для рівняння дифузії (теплопровыдності) та хвильового рівняння методом відокремлення змінних

1. Розв'язати крайову задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 \le x \le 4, \qquad t > 0;$$
$$u(x,0) = 1 + x^2, \ \ 0 \le x \le 4; \ u(0,t) = u_x(4,t) = 0, \ \ t > 0.$$

2. Розв'язати крайову задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx} + xt, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le 1; \ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, \ \ t > 0.$$

3. Розв'язати крайову задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 \le x \le 2, \qquad t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le 2; \ u(0,t) = \varphi_1(t); \ u(2,t) + \alpha u_x(2,t) = 0, \ \ t > 0.$$

Тема 9. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння

1. Використовуючи формулу Д'Аламбера, описати вільні коливання нескінченної струни ($-\infty < x < +\infty$) та побудувати її профіль $u(x, t)$ в різні моменти часу $t > 0$, якщо в початковий момент задано початкові умови:

1) струна збурена початковим відхиленням

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

а її початкова швидкість дорівнює нулю;

2) струна збурена початковим відхиленням

$$u(x,0)=\begin{cases} x+1, & -2\le x\le 0,\\ 1-x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & |x|>2,\end{cases}$$

а її початкова швидкість дорівнює нулю;

3) струна збурена початковим відхиленням

$$u(x,0)=\begin{cases} \cos(0{,}5\pi x), & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

а початкова швидкість струни дорівнює нулю;

4) початкова швидкість струни задана за формулою

$$u_t(x,0)=\begin{cases} 1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

а початкові переміщення струни дорівнюють нулю;

5) початкова швидкість струни задана за формулою

$$u_t(x,0)=\begin{cases} -1, & -2<x<0,\\ 1, & 0<x<2,\\ 0, & |x|\ge 2,\end{cases}$$

а початкові переміщення струни дорівнюють нулю.

2. Описати процес вимушених коливань нескінченної однорідної струни, якщо початкове переміщення і швидкість її точок дорівнюють нулю, а інтенсивність масових сил f задана за формулою $f(x,t)=tx$.
3. Показати, що функція $u(x,y,z,t)=F(x+2y+3z+16t)$ описує процес поширення хвиль і знайти швидкість хвилі.
4. Показати, що функція $u(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2-25t$ описує процес поширення хвиль і знайти швидкість хвилі.
5. Знайти розв'язок задачі Коші:

1) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0,$

$u(x,0)=\cos x,\ u_y(x,0)=1.$

2) $u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}=0,$

$u(0,y)=3,\ u_x(0,y)=y-1.$

3) $4u_{xy}+u_{yy}=0,$

$u(0,y)=\sin y,\ u_x(0,y)=0.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Вірченко Н. О.* Основні методи розв'язання задач математичної фізики. — К.: КПІ, 1997.– 370 с.
2. *Бицадзе А. Б.* Уравнения математической физики. — 2-е изд. — М.: Наука, 1982. — 336 с.
3. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979. — 392 с.
4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
5. *Білоколос Є. Д., Шека Д. Д.* Збірник задач з курсу "Рівняння математичної фізики". — К.: Київ. ун-т, 2003.—75 с.
6. *Вірченко Н. О., Ляшко І. І.* Графіки елементарних та спеціальних функцій. — К.: Наук. думка, 1996. — 582 с.

Додаткова

1. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики: В 2т. — М.: Физматгиз, 1951.
2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4т. — М.: Мир, 1982.
3. *Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П.* Методы решения задач математической физики. — М: Физматгиз. 2002. — 320 с.
4. *Білоколос Є. Д., Юрачківський А. П., Шека Д. Д.* Спеціальні функції в задачах математичної фізики. — К.: Київ. ун-т, 2000. — 92 с.
5. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Задачи математической физики: Учеб. пособие. — М.: МГУ, — 1998. — 350 с.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: 1972. — 736 с.
7. *Юрачківський А. П., Грязнова В. О.* Метод відокремлення змінних у задачах математичної фізики: Навч. посіб. для студ. природ. ф-тів. — К.: Київ. ун-т, 1988. — 142 с.
8. *Додд Р. и др.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 400 с.
9. *Черніга Р. М.* Застосування одного конструктивного методу для побудови неліївських розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь. // Укр. мат. журн. — 1997. — т.49. — С.814–827.

10. *Черніга Р. М.* Нові точні розв'язки та їхні властивості одного нелінійного рівняння математичної біології // Укр. Мат. Журн.- 2001. — т.53. — С.1409–1421.
11. *Черніга Р. М., Дутка В. А.* Дифузійна система Лотки-Вольтера: симетрії Лі, точні та числові розв'язки // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56.—С.1395–1404.
12. *Черніга Р. М.* Нелінійні еволюційні рівняння: ґалілеївська інваріантність, точні розв'язки та їхнє застосування: Автореф.... док. фіз.-мат. наук. — К.: Ін-т математики НАНУ, 2003. — 38 с.
13. *Ablowitz M. J., Segur H. J.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. — Philadelphia: SIAM, 1981. — 400 p.
14. *Cherniha R. and King J. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I. // J. Phys. A: Math. and Gen. — 2000. — V.33 — P.267–282.
15. *Cherniha R. and King J. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems. II. // J. Phys. A: Math. and Gen. — 2003. — V.36. — P. 405–425.
16. *Cherniha R. and King J. R.* Nonlinear Reaction-Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansaetze and Exact Solution // Journal Math. Anal. Appl. — 2005. — v.308. — P.11 — 35.
17. *Dixon J. M., Tuszynski J. A., Clarkson P. A.* From Nonlinearity to Coherence. — Oxford: Clarendon Press, 1997. — 600 p.
18. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — К.: Наук. думка, 1989. — 336 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленко*
Комп’ютерне верстання *О. А. Варваріна*

Зам. № ВКЦ-4245

Формат 60×84/16. Папір офсетний.

Друк трафаретний, ротаційний
Тираж 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП “Видавничий дім “Персонал”
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. ХХ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008 р.