МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисциплін

“МЕТОДИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ”
“ТЕОРІЯ СИСТЕМ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ”

(для бакалаврів, спеціалістів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2010

Підготовлено професором кафедри прикладної математики та програмування *І. В. Бейком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 1 від 30.08.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Бейко І. В. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисциплін "Методи побудови математичних моделей" і "Теорія систем та математичне моделювання" (для бакалаврів, спеціалістів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2010. — 28 с.

Методичні матеріали містять пояснювальну записку, зміст дисциплін, задачі математичного моделювання, а також список літератури.

Призначено для самостійної роботи студентів денної та заочної форм навчання, які вивчають дисципліни "Методи побудови математичних моделей" і "Теорію систем та математичне моделювання"

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета навчально-методичних матеріалів для самостійної роботи студентів з дисциплін ”Методи побудови математичних моделей” і “Теорія систем та математичне моделювання “ — допомогти засвоїти методи розв'язування задач побудови математичних моделей у реальних умовах неповних даних з використанням сучасного математично-комп'ютерного інструментарію. Студенти виконують самостійну роботу в бібліотеках, навчальних кабінетах, комп'ютерних класах та в домашніх умовах. Самостійна робота організується, планується і спрямовується як індивідуальна особиста творча праця з наданням індивідуальних консультацій та допомоги з боку викладачів і фахівців деканату. Самостійна робота студента — це активність на практичних заняттях, опрацювання конспектів лекцій, літературних джерел, робота в бібліотеках, зокрема, в електронних бібліотеках Інтернет, а також вивчення навчального матеріалу за підручниками і навчальними посібниками, підготовка доповідей, рефератів, написання курсових робіт; пошукова та науково-дослідна діяльність, самотестування.

Така робота здійснюється з використанням навчально-методичних матеріалів і математично-комп'ютерного інструментарію, що сприяє поглибленому опануванню навчальним матеріалом, теоретичними знаннями та навичками їх практичного застосування, зокрема, для поглиблення знань і вмінь, необхідних для кваліфікованого фахівця.

Завдання викладача — на аудиторних заняттях вміло подати базові концептуальні знання, навчити студентів самостійно їх поповнювати та поглиблювати.

Згідно з матеріалами індивідуальна робота охоплює тестові і розрахункові завдання, скеровані на поглиблення знань з дисциплін “Методи побудови математичних моделей” і “Теорії систем та математичного моделювання”.

Вивчення курсу включає оглядові лекції, анотації до кожної теми курсу, практичні завдання для індивідуальної роботи. На лекційних заняттях студенти набувають нових знань з вузлових питань навчальної дисципліни. При підготовці до практичних занять студент використовує конспекти лекцій, опрацьовує рекомендовані підручники, навчальні посібники та програмно-методичне забезпечення для комп'ютеризованого навчання, а також навчальні та довідкові матеріали, розміщені в фондах та архівах мережі Інтернет, зокрема, в інформаційно-пошукових системах yahoo, google, ipl тощо. Інформація у подібних Інтернет-пошукових системах зручно розподіляється за тематичними розділами і автоматично видається на запити за відповідними ключовими словами.

ЗМІСТ
дисциплін
"МЕТОДИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ"
"ТЕОРІЯ СИСТЕМ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ"

Тема 1. Системи, керовані системи та їх математичні моделі. Задачі системного аналізу

Структура та основні характеристики систем. Класифікація систем. Основні задачі системного аналізу. Проблеми моделювання, багатокритеріальності та проблеми з розв'язку конфліктів. Прикладні задачі системного аналізу.

Література [1; 2; 4]

Тема 2. Методи побудови математичних моделей

Приклади математичних моделей лінійних та нелінійних причинно-наслідкових залежностей. Явні і неявні, стаціонарні і динамічні, детерміновані і стохастичні моделі. Моделі з зосередженими параметрами та моделі з розподіленими параметрами. Граф-операторні моделі для прогнозування та оптимізації складних систем і процесів. Побудова математичних моделей динамічних процесів на основі законів природознавства. Методи ідентифікації параметрів математичної моделі на основі правдоподібних гіпотез і даних спостережень. Числові експерименти для відшукання значень параметрів математичної моделі. Методи побудови лінійних математичних моделей за даними спостережень. Метод найменших квадратів. Числові алгоритми методу найменших квадратів. Методи найменших квадратів для побудови лінійно-параметричних моделей за даними натурних спостережень. Оцінювання основних характеристик моделей в умовах нормально розподілених похибок вимірювань

Література [1; 2]

Тема 3. Методи найменших квадратів для побудови нелінійних моделей за даними натурних спостережень

Методи і алгоритми методів найменших квадратів для побудови нелінійних моделей за даними натурних спостережень. Методи побудови явних і неявних математичних моделей.

Література [1; 6; 7]

Тема 4. Градієнтні методи ідентифікації параметрів математичної моделі

Функціонал нев'язки моделі за даними натурних спостережень. Градієнт функціонала нев'язки та градієнтні методи побудови математичних моделей.

Література [1–3; 6–9]

Тема 5. Мінімаксні методи ідентифікації параметрів математичної моделі

Математичні моделі і методи прогнозування в умовах неповних даних. Основні типи неповних даних. Побудова мажорант для термінальних множин. Методи прогнозування нелінійних керованих процесів в умовах неповних даних. Мінімаксне оцінювання похибки математичної моделі за даними натурних спостережень. Метод мінімаксного оцінювання параметрів моделі. Алгоритм методу опорних градієнтів та теорема збіжності.

Література [2; 8; 12]

Тема 6. Керовані процеси та їх математичні моделі

Основні характеристики і структура керованих систем. Моделі керованих систем. Оптимальне керування. Методи побудови оптимальних керувань для лінійних і нелінійних керованих систем. Лінійні параметричні моделі керованих систем. Задача ідентифікації параметрів математичної моделі за даними спостережень. Методи найменших квадратів для ідентифікації параметрів математичної моделі за даними спостережень. Градієнт функціоналу нев'язки математичної моделі за даними спостережень. Ліпшицеві градієнти і збіжність градієнтного методу до ε-екстремального розв'язку. Теорема про мажорантну оцінку кількості ітерацій для побудови екстремальних параметрів динамічної моделі.

Література [2; 7; 9; 11]

Тема 7. Методи багатокритеріальної оптимізції математичних моделей

Моделі і задачі багатокритеріальної оптимізації. Множина Парето недомінантних альтернатив. Попарні порівняння і ранжування. Граф-операторні моделі складних систем. Математичні моделі для систем з розподіленими параметрами.

Побудова робочих моделей для систем з розподіленими параметрами. Задачі, методи та алгоритми дослідження лінійних систем з розподіленими параметрами. Використання методів лінійної алгебри. Числові методи дослідження нелінійних систем. Методи Монте-Карло. Числові методи відшукання розв'язків робочих моделей для нелінійних моделей. Метод Ньютона. Критерії оптимальності математичних моделей складних систем. Оцінки точності та ефективності математичних моделей. Двокритеріальна задача оптимізації математичної моделі. Граф-операторні моделі динамічних систем і метод розв'язуючих операторів для побудови оптимальних моделей у класі граф-операторних моделей.

Література [1–4; 7–13]

Тема 8. Математичні моделі матричних і диференційних ігор

Моделі матричних ігор. Розв'язування матричних ігор у мішаних стратегіях. Теорема про сідлову точку у мішаних стратегіях. Диференційні ігри. Методи побудови оптимальних стратегій для лінійних диференційних ігор.

Література [1; 2; 8–13]

Основні питання для самостійного опрацювання:

- методи найменших квадратів для побудови лінійно-параметричних моделей за даними натурних спостережень;
- методи найменших квадратів для побудови нелінійних моделей за даними натурних спостережень;
- градієнтні методи ідентифкції параметрів математичної моделі;
- мінімаксні методи ідентифікації параметрів математичної моделі;
- керовані процеси та їх математичні моделі;
- методи і алгоритми ідентифікації праметрів математичних моделей керованих систем;

- методи багатокритеріальної оптимізції для оптимізації математичних моделей.

Знання, яких потрібно набути самостійно:

- формулювання основних типів математичних моделей;
- побудова і використання алгоритмів ідентифікації параметрів лінійних та лінійно-параметричних моделей за даними натурних спостережень;
- побудова і використання алгоритмів ідентифікації параметрів нелінійних математичних моделей;
- побудова і використання градієнтних алгоритмів для моделювання динамічних процесів;
- використання мінімаксних алгоритмів для ідентифікції параметрів моделей складних систем;
- побудова і використання алгоритмів ідентифікації прамeтрів математичних моделей керованих систем;

Уміння, яких потрібно набути самостійно:

- будувати математичні моделі різних типів методами найменших квадратів;
- будувати математичні моделі різних типів методами мінімаксної оптимізації;
- оцінювати параметри математичних моделей градієнтними методами та статистичними методами максимальної вірогідності;
- будувати математичні моделі керованих процесів;
- використовувати методи багатокритеріальної оптимізції для оптимізації математичних моделей складних систем;
- будувати математичні моделі різних типів.

Індивідуальні завдання

Тип завдання: розробка методів, алгоритмів та програм для розв'язування задач побудови математичних моделей, проведення числових експериментів для ідентифікації параметрів математичних моделей; ознайомлення та опрацювання тематичної літератури; розробка алгоритмів і програм для розв'язування задач математичного моделювання лінійних та нелінійних багатомірних систем; проведення числових експериментів для оптимізації параметрів числових алгоритмів для побудови та дослідження математичних моделей; ознайомлення та опрацювання тематичної літератури.

Мета завдання: поглиблення знань студентів шляхом творчої самостійної роботи над індивідуальними завданнями у процесі вивчення методів та алгоритмів для побудови математичних моделей, а також поглиблення знань, набутих у процесі опанування новими теоретичними знаннями та навичками їх практичного використання.

Самостійна робота: опанування практичними знаннями з методів побудови математичних моделей і новими теоретичними знаннями з теорії систем; аналіз результатів, отриманих у ході індивідуально проведених теоретичних досліджень і практичних обчислювальних експериментів.

Ключові терміни: *системи, математичні моделі систем і процесів, методи побудови математичних моделей, чисельні алгоритми математичного моделювання*

ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ЛІНІЙНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Метод найменших квадратів для побудови математичної моделі причинно-наслідкової залежності між причинними факторами x та їх наслідками y оснований на використанні даних натурних спостережень $(x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_N, y_N)$, де x_i та y_i є результатом i-го вимірювання значення x та відповідного йому значення y, i=1,2,..., N. Цей метод використовується і у випадках числових значень x_i та y_i, і у випадках векторних значень

$$x_i = (x^i_1, x^i_2,..., x^i_r), y_i = (y^i_1, y^i_2,..., y^i_m).$$

У випадку числових даних x_i та y_i, i = 1,2,..., N невідомі значення параметрів p_0 і p_1 шуканої лінійної моделі

$$y = p_0 + p_1x$$

можуть бути обчислені за методом найменших квадратів як розв'язок оптимізаційної задачі мінімізації суми квадратів відхилення

$$J(p_0, p_1) = (y_1 - (p_0 + p_1x_1))^2 + (y_2 - (p_0 + p_1x_2))^2 + ...+ (y_N - (p_0 + p_1x_N))^2.$$

Завдання для самостійної роботи. Довести, що найменша сума квадратів досягається на таких значеннях параметрів:

$$p_1 = (\Sigma_{i=1..N}\, x_iy_i - NXY)/(\Sigma_{i=1..N}\, x_i^2 - NX^2),\ p_0 = Y - p_1X,$$

де

$$X = (\Sigma_{i=1..N}\, x_i)/N,\ Y = (\Sigma_{i=1..N}\, y_i)/N).$$

ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ НЕЛІНІЙНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Завдання для самостійної роботи. За даними натурних спостережень x_i та y_i, $i = 1,2,..., N$ оцінити методом найменших квадратів значення невідомого параметра p нелінійної математичної моделі

$$y = f(x, p)$$

із заданою параметричною функцією f (із заданою структурою f).

Вказівка. Шукане значення p^* обчислити як мінімізатор суми квадратів відхилення

$$J(p) = (y_1 - f(x_1, p))^2 + (y_2 - f(x_2, p))^2 + ...+ (y_N - f(x_N, p))^2,$$

тобто

$$p^* = \text{argmin}_p J(p). \qquad (3)$$

Для розв'язку задачі (3) можна скористатися алгоритмом 1.

Алгоритм 1

Початок: вибрати довільні числа $s > 0$, $L1 > 0$, $K1 > 10$, $E > 0$, $k = 1$, вибрати довільне початкове значення p^1 для шуканого p^* і покласти $p^k = p^1$.

Основний цикл: п1. $k = k + 1$; обчислити значення $J(p^{k-1})$, обчислити значення похідної $z = J'_p(p^{k-1})$ (якщо p є вектором, то z також є вектором і його i-та координата z_i дорівнює значенню похідної від функції $J(p)$ по i-тій координаті вектора p, обчисленій у точці $p = p^{k-1}$); якщо $\|z\| <= E1$, то покласти $k = k - 1$ і перейти до п.5; покласти $L = 2L$;

п.2. обчислити $w = p^{k-1} - Lz$;

п.3. якщо $J(w) >= J(p^{k-1})$, то покласти $L = L/2$; якщо $L > E2$, то повернутися до пункту п.2 інакше перейти до п.5;

п.4. покласти $p^k = w$; якщо $k < K1$, то перейти до п.1;

п.5. покласти $p^* = p^k$; кінець.

Завдання для самостійної роботи. Для випадаку векторних даних $x_i = (x^i_1, x^i_2,..., x^i_r)$ та числових даних y_i, $i=1,2,..., N$ оцінити методом найменших квадратів значення p^* для параметра p *нелінійної* математичної моделі

$$y = f(x_1, x_2,..., x_r, p).$$

Вказівка. Значення p^* мінімізує суму квадратів відхилення

$$J(p) = \sum_{i=1..N}(y_i - f(x^i_1, x^i_2,..., x^i_r, p))^2.$$

і тому шукане значення p^* є розв'язком оптимізаційної задачі

$$p^* = \arg\min J(p).$$

ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ЛІНІЙНО-ПАРАМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Завдання для самостійної роботи. Для випадку векторних даних $x_i = (x^i_1, x^i_2,..., x^i_r)$ та числових даних y_i, $i=1,2,..., N$ побудувати методом найменших квадратів *лінійно-параметричну* модель

$$y = p_0 f_0(x) + p_1 f_1(x) +...+ p_q f_q(x).$$

Вказівка. Побудова такої лінійно-параметоричної моделі зводиться до відшукання векторного параметра $p^* = (p_0, p_1, p_2,..., p_q)$, який мінімізує суму квадратів нев'язки

$$J(p) = \sum_{\iota=1..N}(y_i - f(x^i_1, x^i_2,..., x^i_r, p))^2$$

для функції $f(x^i_1, x^i_2,..., x^i_r, p) = p_0 f_0(x) + p_1 f_1(x) +...+ p_q f_q(x)$. Шуканий вектор обчислюється як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{array}{c} a_{00}p_0 + a_{01}p_1 +...+ a_{0q}p_q = b_0, \\ a_{10}p_0 + a_{11}p_1 +...+ a_{1q}p_q = b_1, \\ ..... \\ a_{q0}p_0 + a_{q1}p_1 +...+ a_{qq}p_q = b_q, \end{array}$$

де для кожного значення j та для кожного значення k числа a_{jk} та b_j обчислюються за формулами

$$a_{jk} = \sum_{i=1..N} f_j(x_i) f_k(x_i),\ b_j = \sum_{i=1..N} f_j(x_i) y_i.$$

Завдання для самостійної роботи. Для частинного випадку, коли величини x_i є векторами $x_i = (x^i_1, x^i_2,..., x^i_r)$, а y_i є числами, $i = 1,2,..., N$, оцінити параметри $p = (p_0, p_1,..., p_r)$ багатовимірна лінійна моделі

$$y = p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + ...+ p_r x_r$$

на основі даних $(x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_N, y_N)$.

Вказівка. Значення $p^* = (p_0, p_1, p_2,..., p_r)$ обчислюється як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{array}{c} a_{00}p_0 + a_{01}p_1 +...+ a_{0q}p_r = b_0, \\ a_{10}p_0 + a_{11}p_1 +...+ a_{1q}p_r = b_1, \\ ..... \\ a_{r0}p_0 + a_{r1}p_1 +...+ a_{rr}p_r = b_r, \end{array}$$

де для кожного значення j та для кожного значення k числа a_{jk} та b_j обчислюються за формулами

$$a_{jk} = \Sigma_{i=1..N} f_j(x_i) f_k(x_i),\ b_j = \Sigma_{i=1..N} f_j(x_i) y_i,\ f_0(x) = 1,\ f_j(x_i) = x^i_{j.}$$

Завдання для самостійної роботи. Для випадку векторних даних $x_i = (x^i_1, x^i_2,..., x^i_r)$, $y_i = (y^i_1, y^i_2,..., y^i_m)$, i=1,2,..., N, побудувати методом найменших квадратів *багатовимірну нелінійну* математичну модель у вигляді

$$y_1 = f_1(x_1, x_2,..., x_r, p),$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2,..., x_r, p),$$
$$......$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2,..., x_r, p).$$

Вказівка. Побудова такої моделі за допомогою методу найменших квадратів зводиться до відшукання розв'язку $p^* = \text{argmin}_p\, J(p)$ для $J(p) = \Sigma_{k=1..m} \Sigma_{i=1..N} (y^i_k - f_k\,(x^i_1, x^i_2,..., x^i_r, p))^2$.

ПОБУДОВА ЛІНІЙНО-ПАРАМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ **В УМОВАХ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНИХ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ**

Методи уточнення причинно-наслідкової залежності між значеннями причинних факторів $X = (x_1, x_2,..., x_M)$ та значеннями Y їх наслідків на основі даних, отриманих в експериментальних дослідженнях. Вважається, що результатом першого експерименту є заміряні числові значення $X_1 = (x_{11}, x_{12},..., x_{1M})$ та Y_1, результатом і-го експерименту є заміряні значення $X_i = (x_{i1}, x_{i2},..., x_{iM})$ та Y_i, а результатом останнього N-го експерименту є заміряні значення $X_N = (x_{N1}, x_{N2},..., x_{NM})$ та Y_N.

Етап 1. Підготовка числових даних $(Y_i, x_{i1}, x_{i2},..., x_{iM})$ для кожного $i = 1..\,N$.

Етап 2. Обчислення стійкої оцінки для значення параметрів $a = (a_1, a_2,..., a_M)$ математичної моделі

$$Y(a, X) = a_1x_1 + a_2x_2 +...+ a_Mx_M$$

за умови, коли заміряне у i-му експерименті числове значення Y_i є сумою $Y(a, X_i)$ та випадкової величини w_i, тобто

$$Y_i = a_1x_{i1} + a_2x_{i2} + ... + a_Mx_{iM} + w_i.$$

Вказівка. Вважаючи, що випадкова величина w_i має невідому дисперсію σ^2 і нульове математичне сподівання, обчислити стійку оцінку для шуканого невідомого вектора a як розв'язок $a^1 = (a_1,..., a_M)$ системи нелінійних рівнянь

$$F((Y(X_1) - Y_1)/s)x_{1j} + F((Y(X_2) - Y_2)/s)x(2,j) +...+ F((Y(X_N) - Y(N))/s)x(N,j) = 0, j = 1.. M,$$

$$s = Median(|y_i - Y_i|/0{,}6745),$$

$$Y(X_i) = a_1x_{i1} + a_2x_{i2} + ... + a_Mx_{iM}, i = 1.. N.$$

Останнє рівняння зручно записати у матричній формі $Y = XA$. Функцію $F(x)$ вибрати або як функцію Андрюса, або як функцію Губера, або як функцію Гампеля (див. лабраторну роботу N4.2).

У класичній математичній статистиці розв'язується спрощена задача, а саме вважається, що випадкові величини w_i і w_j є незалежними при $i \neq j$, нормально розподіленими із нульовим математичним сподіванням та постійною дисперсією σ^2, а також вважається, що w_i є незалежними від $x(i,j)$, тобто $\mathrm{cov}(w_i, x(i,j)) = 0$.

У даному випадку оптимальна оцінка A для вектора a є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\Sigma_i (a_i \Sigma_k x(k,i)x(k,j)) = \Sigma_k y(k)x(k,j), j = 1,..., M.$$

Матриця A має нормальний розподіл $N(A,\sigma^2(X^*X)^{-1})$ і тому при усіх значеннях α, $0<=\alpha<=1$ виконується рівняння

$$P\{-t_{\alpha/2} < (A_i - a_i)/\sigma_{ai} < t_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$$

для t-розподілу Ст'юдента із $N - 2$ ступенями вільності та для отриманої із регресії оцінки σ_{ai} значення дисперсії a_i. Це означає, що з ймовірністю $(1 - \alpha)$ шукане значення a_i належить інтервалу довіри

$$A_i - \sigma_{ai} t_{\alpha/2} < a_i < A_i + \sigma_{ai} t_{\alpha/2}.$$

Наявність суттєвих відхилень між векторами a^1 і A засвідчує про наявність серед отриманих даних вибірки $(y_i, x(i,*))$ викидів, тобто таких значень, які мають надмірно великі похибки і які з цієї причини доцільно відфільтрувати.

ПОБУДОВА ПАРАМЕТРИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ПРОЦЕСІВ

Позначимо через $p(t)$ значення вектора причинних факторів у момент часу t, а через $x(t)$ — значення вектора факторів-наслідків у момент часу t. Математична модель, яка описує залежність між $x(t)$ та $p(t)$, часто має вигляд системи диференціальних рівнянь

$$dx^i(t)/dt = f^{\,i}(x^1(t),..., x^n(t), p^1(t),..., p^m(t), t)\ \forall\, i,\ i = 1,..., m.$$

У скороченій векторній формі дану модель записують у вигляді

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = f(x(t), p(t), t, p).$$

Загалом математична модель включає вектор $z(t)$, який відображає вплив навколишнього середовища, і вектор параметрів моделі p, тобто модель має більш узагальнений вигляд

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = f(x(t), p(t), z(t), t, p).$$

Оптимальне значення p^{opt} вектора невідомих параметрів p обчислюють на основі даних, які отримують у натурних експериментах і натурних спостереженнях. Натурний експеримент проводять на деякому вибраному інтервалі часу $t \in [t_0, T]$ із вибраним керуванням $p^{\exp}(t)$. У ході натурного експерименту замірюють отримані значення $x^{\exp}(t)$ (експерементально отриману траекторію) і замірюють значення $z^{\exp}(t)$ (стан навколишнього середовища) на інтервалі $[t_0, T]$.

У методах послідовних наближень невідомий вектор p^{opt} відшукують як границю такої послідовності параметрів $p^1, p^2, p^3,..., p^{k+1}$, для якої при усіх значеннях k виконується нерівність

$$\varphi(p^{k+1}) < \varphi(p^k),$$

де $\varphi(p^k)$ — оцінка відхилення траекторії $x(t, p^k)$ (обчисленої за допомогою математичної моделі при значенні параметра $p = p^{k)}$ від траєкторії $x^{\exp}(t)$ (отриманої в спостереженнях):

$$\varphi(p) = \int_{t_0}^{T} \| x(t, p) - x^{\exp}(t) \|^2 dt.$$

Для побудови послідовності p^k, яка мінімізує нев'язку $\varphi(p^k)$, використовують ітераційний процес

$$p^{k+1} = p^k + \delta p$$

на основі обчислення таких значень δp, які забезпечують виконання нерівності

$$\varphi(p^{k+1}) < \varphi(p^k).$$

Оскільки

$$\varphi(p^k+\delta p) = \int_{t_0}^{T} \| x(t, p^k+\delta p) -- x^{exp}(t)\|^2 dt,$$

то на основі представлення

$$x(t, p^k+\delta p) = x(t, p^k) + \delta x(t)$$

отримаємо

$$\varphi(p^k+\delta p) = \int_{t_0}^{T} (x(t, p^k) + \delta x(t) - x^{exp}(t), x(t, p^k) + \delta x(t) - x^{exp}(t))dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \{\| x(t, p^k) - x^{exp}(t)\|^2 + 2(x(t, p^k) - x^{exp}(t), \delta x(t)) + \| \delta x(t) \|^2\}dt =$$

$$= \varphi(p^k) + 2 \int_{t_0}^{T} (x(t, p^k) - x^{exp}(t), \delta x(t))dt + \int_{t_0}^{T} \| \delta x(t) \|^2 dt.$$

$$\dot{x}(t, p^k) + \delta \dot{x}(t) = f(x(t, p^k+\delta p), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k+\delta p) =$$

$$= f(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k) + \partial_x f(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k)\, \delta x +$$
$$\partial_p f(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k)\, \delta p + O(\|\delta p\|^2) +$$
$$+ O(\| \delta x\|^2).$$

Тому маємо

$$\delta \dot{x}(t) = \partial_x f(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k)\delta x +$$
$$+ \partial_p f(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), p^k)\delta p + O(\|\delta p\|^2 + O(\| \delta x\|^2).$$

або у матрично-векторних позначеннях:

$$A(t) = \partial_x f(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k),$$
$$B(t) = \partial_p f(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k),$$

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j},$$

отримуємо

$$\varphi(p^k+\delta p) = \int_{t_0}^{T} \{(x(t, p^k) - x^{exp}(t),\delta x(t)) +$$

$$+ (y(t), A(t)\delta x(t) + B(t)\delta p - \delta \dot{x}(t) + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta x\|^2))\}dt.$$

Для будь-якої диференційованої обмеженої функції y(t) із тотожності

$$(y(T), \delta x(T)) - (y(t_0), \delta x(t_0)) = \int_{t_0}^{T} (\dot{y}(t), \delta x(t)) + (y(t), \delta \dot{x}(t))dt$$

випливає

$$\int_{t_0}^{T} (y(t), \delta \dot{x}(t))dt = (y(T), \delta x(T)) - (y(t_0), \delta x(t_0)) - \int_{t_0}^{T} (\dot{y}(t), \delta x(t))dt.$$

Тому для функції y (t), яка задовольняє ще й умову y(T) = 0, є справедливим рівняння

$$\varphi(p^k+\delta p) = \int_{t_0}^{T} \{(x(t, p^k) - x^{exp}(t) + A^* \dot{y}(t), \delta x(t))dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} (y(t), B\delta p)dt + (y(t_0), \delta x(t_0)).$$

А для функції y (t), яка задовольняє ще й умову

$$\dot{y}(t) = -A^* y(t) - (x(t, p^k) - x^{exp}(t)),$$

є справедливим рівняння

$$\varphi(p^k+\delta p) = \int_{t_0}^{T} (y(t), B\delta p)dt + (y(t_0), \delta x(t_0)) + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta x\|^2) =$$

$$= \varphi(p^k) + 2\int_{t_0}^{T} (y(t), B\delta p)dt + (y(t_0), \delta x(t_0)) + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta x\|^2) =$$

$$= \phi(p^k) + (2\int_{t_0}^{T} B^* y(t)dt, \delta p) + (y(t_0), \delta x(t_0)) + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta x\|^2).$$

Оскільки із обмеженості матриць Якобі A(t) і B(t) випливає асимптотична рівність $\delta x(t) = O(\|\delta p\|)$, то маємо

$$\varphi(p^k+\delta p) = \varphi(p^k) + 2\left(\int_{t_0}^{T} B^* y(t)dt, \delta p\right) + (y(t_0), \delta x(t_0)) + O(\|\delta p\|^2).$$

Враховуючи, що вектор ξ (якщо такий існує), який для усіх значень δp із околу точки p^k задовольняє асимптотичне рівняння

$$\varphi(p^k+\delta p) = \varphi(p^k) + (\xi, \delta p) + o(\|\delta p\|)$$

є градієнтом $\nabla\varphi(p)$ функції $\varphi(p)$ в точці $p = p^k$, то із отриманого вище рівняння випливає справедливість такої леми.

Лема 1. *Якщо вектор-функція f є неперервно-диференційованою по x і по p із обмеженими матрицями Якобі* A(t), B(t), *для яких існує розв'язок задачі Коші*

$$\dot{y}(t) = -A^* y(t) - (x(t, p^k) - x^{exp}(t)), \; y(T) = 0,$$

то градієнтом $\nabla\varphi(p)$ *нев'язки* $\varphi(p)$ *у точці* $p = p^k$ *при* $\delta x(t_0) = 0$ *є вектор*

$$\nabla\varphi(p) = z = 2\int_{t_0}^{T} (B^* y(t))dt.$$

Тому доцільно вибирати $\delta p = -\lambda z$ і обчислювати значення p^{k+1} за формулою

$$p^{k+1} = p^k - \lambda \int_{t_0}^{T} B^* y(t)dt$$

при деякому достатньо малому значенні кроку λ, який у наступному А-алгоритмі визначаємо умовою

$$\varphi(p^{k+1}) \le \varphi(p^k) - s\lambda^2.$$

А-алгоритм

Початок: Вибираємо початкове значення $p = p^1$. Покладаємо k=1.

1. Покладаємо $\lambda_k = 1$. Розв'язуємо задачу Коші:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), p^{exp}, z^{exp}, t, p^k)$$

$$x(t_0) = x^0$$

і знаходимо траєкторію $x(t, p^k)$ на інтервалі часу $t \in (t_0, T)$.

2. Для обчислення градієнта $\nabla\varphi(p)$ у точці $p = p^k$ розв'язуємо задачу Коші:

$$\dot{y}(t) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k)\right]^* y(t)dt + x^{exp}(t) - x(t, p^k),$$

$$y(T) = 0.$$

і обчислюємо вектор

$$w = \int_{t_0}^{T} \frac{\partial f}{\partial p}(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k)]^* y(t)dt.$$

3. Якщо виконується нерівність

$$\|\nabla\varphi(p)\| \le \varepsilon,$$

то подальші обчислення призупиняємо (таке значення p^k називають ε-екстремальним). Якщо ж значення p^k не є ε-екстремальним, то обчислюємо p^{k+1} за ітераційною формулою

$$p^{k+1} = p^k - \lambda_k w.$$

4. Якщо виконується нерівність

$$\varphi(p^{k+1}) \le \varphi(p^k) - s\lambda_k^{2,}$$

то покладаємо k=k+1 і повертаємося до кроку 1. Інакше значення λ_k зменшуємо у два рази і повертаємося до кроку 3.

Лема 2. *Якщо функція f задовольняє умовам леми 1 і градієнт $\nabla\varphi(p)$ задовільняє умові Ліпшиця*

$$\|\nabla\varphi(p^k) - \nabla\varphi(p^{k+1})\| \le L\|p^k - p^{k+1}\|,$$

то на кожному кроці А-алгоритму виконується нерівність

$$\varphi(p^{k+1}) \le \varphi(p^k) - \lambda_k\|\varphi(p^k)\|^2 + L\lambda_k^2\|\nabla\varphi(p^k)\|^2.$$

Доведення. В умовах леми 1 маємо

$$\varphi(p^{k+1}) = \varphi(p^k) + \int_0^1 \varphi'_\lambda\,(p^k + \lambda(p^{k+1} - p^k))d\lambda =$$

$$= \varphi(p^k) + \int_0^1 (\nabla\varphi(p^k + \lambda(p^{k+1} - p^k)), p^{k+1} - p^k)d\lambda =$$

$$= \varphi(p^k) + \int_0^1 (\nabla\varphi(p^k), p^{k+1} - p^k)d\lambda + \int_0^1 (\nabla\varphi(p^k + \lambda(p^{k+1} - p^k)) -$$

$$- \nabla \varphi(p^{k)}, p^{k+1} - p^k) d\lambda,$$

тобто

$$\varphi(p^{k+1)} - \varphi(p^{k)} - (\nabla\varphi(p^{k)}, p^{k+1} - p^k) =$$

$$= \int_0^1 (\nabla\varphi(p^k + \lambda(p^{k+1} - p^k)) - \nabla\varphi(p^{k)}, p^{k+1} - p^k) d\lambda \le$$

$$\le \int_0^1 \|\nabla\varphi(p^k + \lambda(p^{k+1} - p^k)) - \nabla\varphi(p^{k)}\| \|p^{k+1} - p^k\| d\lambda \le$$

$$\le \int_0^1 L\|p^{k+1} - p^k\|^2 d\lambda = L\|p^{k+1} - p^k\|^2 = L\lambda_k^2\|w\|^{2.}$$

З останньої нерівності випливає нерівність

$$|\varphi(p^{k+1}) + \varphi(p^k) - (\nabla\varphi(p^k), p^{k+1} - p^k)| =$$

$$= |\varphi(p^{k+1}) - \varphi(p^k) + \lambda_k(\nabla\varphi(p^{k)}, \nabla\varphi(p^{k)})| \le L\, \lambda_k^2\|w\|^2.$$

Тобто маємо нерівність

$$\varphi(p^{k+1}) \le \varphi(p^k) - \lambda_k\|\nabla\varphi(p^k)\|^2 + L\lambda_k^2\|\nabla\varphi(p^k)\|^2,$$

яка виконується за будь-якого значення числа λ_k і лема 2 доведена.

З іншого боку, на кожному кроці А-алгоритму маємо нерівність

$$\varphi(p^{k+1}) \le \varphi(p^k) - s\, \lambda_k^2.$$

Це означає, що величина λ_k є більшою за величину $R_k = \min\{1/2, \bar{\lambda}/2\}$, де $\bar{\lambda}$ є розв'язком рівняння

$$\varphi(p^k) - s\,\lambda^2 = \varphi(p^k) - \lambda\|\nabla\varphi(p^k)\|^2 + L\lambda^2\|\nabla\varphi(p^k)\|^{2,}$$

тобто

$$\bar{\lambda} = \frac{\|\nabla\varphi(p^k)\|^2}{s + L\|\nabla\varphi(p^k)\|^2}.$$

Це видно із того, що поділом λ навпіл ми гарантовано попадемо у інтервал на промінь $\lambda \ge \dfrac{\bar{\lambda}}{2}$.

Тому на кожному кроці виконується нерівність

$$\varphi(p^{k+1}) < \varphi(p^k) - s(R_k)^2 = \varphi(p^k) - \frac{s}{4}\min\{1, \frac{\|\nabla\varphi(p^k)\|^4}{(s+L\|\nabla\varphi(p^k)\|^2)^2}\}.$$

Тобто величина $\|\nabla\varphi(p^k)\|$ прямує до 0 із зростанням k. А це означає, що для кожного числа $\varepsilon \geq 0$ знайдеться таке значення k, при якому виконається нерівність

$$\|\nabla\varphi(p^k)\| \leq \varepsilon.$$

Тобто А-алгоритм забезпечує обчислення ε-екстремального значення параметра p^k для будь-якого значення ε. Цим доведено теорему 1.

Теорема 1. *Якщо функція f задовольняє умовам леми 1 і леми 2, то А-алгоритм забезпечує обчислення ε-екстремального значення параметра p^k для будь-якого значення ε.*

Теорема 2. *Для $\forall\ \varepsilon \geq 0$ ε-оптимальний розв'язок буде обчислено не пізніше, ніж за N кроків, де*

$$N = [\frac{4\varphi(p^1)(s+M^2)^2}{s\,\varepsilon^4}] + 1,\ M = max_k \|\nabla\varphi(p^k)\|.$$

Доведення. Припустимо супротивне, тобто для $\forall$ k = 1,2,... $\|\nabla\varphi(p^k)\| \geq \varepsilon$. Тоді для усіх k виконується нерівність

$$\|\varphi(p^{k+1}) - \varphi(p^k)\| \leq \frac{s}{4}\frac{\varepsilon^4}{(s+LM^2)^2}.$$

Тобто

$$\varphi(p^k) \leq \varphi(p^1) - k\frac{s}{4}\frac{\varepsilon^4}{(s+LM^2)^2}$$

Знайдемо мінімальне k, для якого виконується нерівність

$$\varphi(p^1) - k\frac{s}{4}\frac{\varepsilon^4}{(s+LM^2)^2} \leq 0.$$

Таким значення очевидно є

$$N = k = [\frac{4\varphi(p^1)(s+M^2)^2}{s\,\varepsilon^4}] + 1.$$

Тому при зробленому припущенні $\|\nabla\varphi(p^k)\| \geq \varepsilon$ ми отримали б за N кроків нерівність $\varphi(p^N) < 0$, яка суперечить визначенню функції φ.

Теорема 2 доведена.

Алгоритм обчислення p — екстремальної моделі

1. Вибираємо $\forall\ p = p^1$;

Розв'язуємо задачу Коші:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), p^{exp}, z^{exp}, t, p^1)$$

$$x(t_0) = x^0$$

визначаємо $x(t, p^1)$, $t \in (t_0, T)$

Обчислюємо $\varphi(p^1) = \int_{t_0}^{T} \| x(t, p^1) - x^{exp}(t)\|^2 dt$

$k = 1$;

$\lambda_1 = 1$;

2. Основний цикл:

при відомих p^k, $\varphi(p^k)$, λ_k обчислюємо:

а) обчислюємо $\nabla\varphi(p^k) = 2\int_{t_0}^{T} [\frac{\partial f}{\partial p}(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k)]^* y(t)dt$,

для цього розв'язуємо ще одну задачу Коші для допоміжної вектор-функції y(t):

$$y(T) = 0$$

$$\dot{y}(t) = -[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, p^k), p^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k)]^* y(t)dt + x^{exp}(t) - x(t, p^k)$$

(методом Рунге-Кута)

б) обчислюємо $p^{k+1} = p^k - \lambda_k \nabla\varphi(p^k)$

в) перевіряємо виконання нерівності (А4):

знайдемо $x(t, p^{k+1})$, тобто розв'язуємо задачу Коші для $p^k = p^{k+1}$від $x(t, p^k)$

(аналогічно 1)

обчислюємо $\varphi(p^{k+1}) = \int_{t_0}^{T} \| x(t, p^k) - x^{exp}(t)\|^2 dt$

If $\varphi(p^{k+1}) < \varphi(p^k) - s\lambda^2$ then $k = k + 1$ goto a)

Else $\lambda_k = \dfrac{\lambda_k}{2}$ goto б)

If $\|\nabla\varphi(p^{k)})\| \le \varepsilon$, then STOP.

Завдання для самостійної роботи. За даними натурних спостережень $x(t) = X(t)$, $p(t) = P(t)$ для значень вектор-функцій $x_i(t) = (x^i_1(t), x^i_2(t),..., x^i_n(t))$, $p_i(t) = (p^i_1(t), p^i_2(t),..., p^i_r(t))$ на заданому інтервалі часу $t\in [0, T]$, $i = 1,2,..., N$, обчислити значення параметрів p параметричної динамічної моделі

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), p(t), p),$$

або як розв'язок p^1 оптимізаційної задачі

$$p^1 = \mathrm{argmin}_p \int_0^T (X'(t) - f(t, X(t), P(t), p))^2 dt;$$

або як розв'язок p^2 оптимізаційної задачі

$$p^2 = \mathrm{argmin}_p \max_{t\in[0,T]} |X'(t) - f(t, X(t), P(t), p)|;$$

або як розв'язок р^3 оптимізаційної задачі

$$p^3 = \mathrm{argmin}_p \min_a \int_0^T (X(t) - x(t, a, p))^2 dt,$$

де $x(t, a, p)$ — розв'язок задачі Коші

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), P(t), p), x(0) = a.$$

Перевірити точність усіх трьох оцінок на прикладі процесів розвитку епідемії, де залежність відсотка $x(t)$ інфікованих хворих від інтенсивності лікувально-профілактичних заходів $p(t)$ описується параметричною моделлю

$$dx(t)/dt = x(t)(100 - x(t))\, p_1/(p_2 + p(t)).$$

Завдання для самостійної роботи. Побудувати програму оцінювання параметра p для багатовимірної динамічної моделі загального вигляду

$$dx_1(t)/dt = f_1(x_1(t), x_2(t),..., x_m(t), p_1(t), p_2(t),..., p_r(t), p) + w_1(t), \quad (10)$$

$$dx_2(t)/dt = f_2(x_1(t), x_2(t),..., x_m(t), p_1(t), p_2(t),..., p_r(t), p) + w_2(t),$$

$$......$$

$$dx_m(t)/dt = f_m(x_1(t), x_2(t),..., x_m(t), p_1(t), p_2(t),..., p_r(t), p) + w_m(t),$$

яка у векторному запису має вигляд

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), p(t), p) + w(t),$$

де

$x(t) = (x_1(t), x_2(t),..., x_m(t))$ — m-вимірний стан системи;

$p(t) = (p_1(t), p_2(t),..., p_r(t))$ — r-вимірна вектор-функція керування;

$w(t) = (w_1(t), w_2(t),..., w_m(t))$ — невідома m-вимірна вектор-функція збурень;

$f(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot),..., f_m(\cdot))$ — задана структура математичної моделі.

Дані спостережень представлено таблицею чисел $t_k, j_k, X_k, k = 1.. N$,

де k — номер вимірювання (номер спостереження), t_k — момент часу, у який проведено k-те вимірювання, а j_k — координата вектора $x(t)$, значення X_k якої виміряно у момент часу $t = t(k)$, тобто $x_{jk}(t_k) = X_k$.

Вказівка. Оптимальну оцінку p^* для значення невідомого векторного параметра p обчислити як розв'язок задачі оптимізації

$$p^* = \text{argmin}_{p,\, a} \sum\nolimits_{k=1..N}(X_k - x_k(t_k, p, a))^2\},$$

де $x_k(t, p, a)$ є значення k-ої координати розв'язку $x(t)$ задачі Коші

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), p(t), p),\ x(0)=a.$$

МЕТОДИ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ ЗА КРИТЕРІЄМ МІНІМАКСУ

Наближений розв'язок p^2 задачі мінімаксної оптимізації

$$p^2 = \mathrm{argmin}_p \max_{t\in[0,T]} |X'(t) - f(t, X(t), P(t), p)|$$

можна обчислити за допомогою Алгоритму 1 як розв'язок x задачі оптимізації

$$p^2 = \mathrm{argmin}_p \max(\varphi_i(x) \mid \varphi_i(x) = |X'(t_i) - f(t_i, X(t_i), P(t_i), x)|,\ t_i = i\Delta t,\ i = 1,2,\dots, T/\Delta t).$$

Алгоритм 1

Початок. I. Вибрати початкове наближення $\boldsymbol{x}^0 \in \boldsymbol{X}$.

II. Вибрати константи $\varepsilon_0 > 0$ і $\alpha_0 > 0$.

III. Покласти $\boldsymbol{k} = 0$.

Основний цикл. IV. Знайти множину точок

$$X^k = \left\{x \,\middle|\, \left\|x - x^k\right\|_1 \le 1,\ x \in X\right\},$$

де

$$\|y\|_1 = \max_{i\in[1:n]} |y_i|.$$

V. Обчислити множину індексів

$$K_0(x^k) = \left\{i \mid \varphi_i(x^k) = \max_{i\in\Im} \varphi_i(x^k),\ i \in \Im\right\}$$

VI. Обчислити

$$\psi(x^k) = \min_{x\in X^k} \max_{i\in K_0(x^k)} \left(\nabla\varphi_i(x^k),\ x - x^k\right).$$

VII. Якщо $\boldsymbol{\psi(x^k) = 0}$, то покласти $\boldsymbol{x^* = x^k}$ і припинити обчислення, якщо $\boldsymbol{\psi(x^k) < 0}$, то перейти на крок VIII.

VIII. Покласти $\boldsymbol{j} = 0$.

IX. Покласти $\varepsilon = \varepsilon_{\boldsymbol{j}}$.

X. Обчислити множину індексів

$$K_\varepsilon(x^k) = \left\{i \mid \max_{i\in\Im} \varphi_i(x^k) - \varphi_i(x^k) \le \varepsilon,\ i \in \Im\right\}.$$

XI. Обчислити

$$\psi_\varepsilon(x^k) = \min_{x\in X^k} \max_{i\in K_\varepsilon(x^k)} \left(\nabla\varphi_i(x^k),\, x - x^k\right).$$

XII. Якщо виконується нерівність $\psi_\varepsilon\left(x^k\right) \le -\alpha_0 \varepsilon / \varepsilon_0$, то перейти на крок XIII, інакше покласти $\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j / 2,\ j = j+1$ і перейти на крок IX.

(Вихід із циклу, який визначається кроками IX — XIII, буде здійснюватися за скінченне число ітерацій при кожному $\boldsymbol{k} = 0,1,\ldots$).

XIII. Обчислити вектор $\boldsymbol{y}^k$, який задовольняє умову

$$\psi_\varepsilon\left(x^k\right) = \max_{i\in K_\varepsilon\left(x^k\right)} \left(\nabla\varphi_i\left(x^k\right), y^k - x^k\right).$$

XIV. Обчислити кроковий множник $\rho_{\boldsymbol{k}}$ з умови

$$\max_{i\in\Im} \varphi_i\left(x^k + \rho_k\left(y^k - x^k\right)\right) = \min_{\rho\in[0,1]} \max_{i\in\Im} \varphi_i\left(x^k + \rho_k\left(y^k - x^k\right)\right)$$

XV. Обчислити наближення

$$x^{k+1} = x^k + \rho\left(y^k - x^k\right)$$

XVI. Покласти $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}+1$ і перейти на крок IV.

Теорема 1.

Кожна гранична точка x^* нескінченної послідовності $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, породженої алгоритмом 1, є стаціонарною точкою функції $\max_{i\in\Im} \varphi_i\left(x\right)$ на множині X .

ГРАФ-ОПЕРАТОРНІ МОДЕЛІ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ І АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ

Задача 1. Знайти таке значення $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N) \in D \,\Delta\, D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_N$ для керованої системи

$$A_\mathrm{k}\,(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1, p_k, p_{k-1}, \ldots, p_1, z) = 0,$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N),\ x_k \in X_k,\ p_k \in P_k,\ k = 1, 2, \ldots, N,$$

зі спостереженнями

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in Z,\ Z \,\Delta\, Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_N,$$

$$z_k = C_k\,(x_k, x_k\text{-}_1, ..., p_k, p_k\text{-}_1, ..., p_1)$$
$$z_k \in Z_k,$$

які забезпечать мінімальне на D значення $B\,(x, p, z)$ (і в інших постановках задачі вимагається вибором p забезпечити включення $B\,(x, p, z) \in G\,(p, z)$ для заданої множини $G\,(p, z)$) для заданої цільової функції B і заданих

$$D, A = (A_1, ..., A_N), C = (C_1, ..., C_N).$$

Припускаємо, що X_k, P_k, Z_k є лінійними (скінченно вимірними) просторами.

Методи розв'язувальних операторів засновані на використанні розв'язку функціонального рівняння $\beta\,(p, z, A\,(x, p, z), C\,(x, p))\; B\,(x, p, z)$, що визначає функцію $\beta_{ABCD}(p, z) = \beta\,(p, z, 0, z)$.

Якщо, як це буває в реальних задачах, деяка частина $p_k^{\,2}$ значення $p_k \Delta(p_k^{\,1}, p_k^{\,2})\; p\,\Delta(p^1, p^2)$ є значенням певної функції P, тобто $p^2 = P\,(x, p, z)$, то рівняння набуває вигляду

$$\beta\,(p^1, P(x, p, z), z, A\,(x, p, z), C(x, p)) = B\,(x, p, z).$$

У ряді адаптивних алгоритмів оптимізації функцію β_{ABCD} апроксимують за її обчислюваним або експериментально визначеним за деякою обраною послідовністю (p^1, z^1), ..., (p^j, z^j), ...значенням $B(X\,(p^j, z^j), p^j, z^j)$, ($X\,(p^j, z^j)$ — множина розв'язань системи (6. 20) при $p = p^j$, $z = z^j$).

Алгоритм 1 для розв'язування задачі за допомогою функції $\beta_{\,ABCD}$ обгрунтовується твердженням.

Твердження 1. Якщо $\forall\, p \in D, z \in Z, X\,(p, z) \neq \varnothing$ існує єдиний розв'язок $\beta_{ABCD}(p, z)$, то розв'язок $p(z)$ задачі параметричної оптимізації $p(z)\ \Delta\ arg\ min\ p \in D\ \beta_{ABCD}\,(p, z)$ є шуканим розв'язком задачі 1.

Наведемо приклади ефективного обчислення функції β_{ABCD}

Задача 2. Знайти значення $p \in D$ для системи

$$A_{k,k}x_k + A_{k,k\text{-}1}x_{k\text{-}1} + ... + A_{k,1}x_1 + f_k(p) = 0$$
$$k = 1, 2, ..., N,$$

яке дає мінімальне на заданій множині D значення для функції

$B\,(x, p) = \sum_{i=1...N} (c_i, x_i) + f_{N+1}\,(p)$

при заданих матрицях $A_{k,i}$ векторах c_i і функціях f_k.

Алгоритм 2. Обчислити розв'язок $(y_N, y_{N\text{-}1}, .., y_1)\ \Delta\ (A, c)$ системи

$$c_k + \sum_{i=1...N} A_j^{*},_k y_k = 0,\ k = N, N - 1, ..., 1,$$

і потім обчислити значення $p(y,(A, c))$,

$$p\,(y(A,c)) = arg\,max_{p\in D} F\,(p, y(A,c)),$$

де

$$F(p,y) = \Sigma_{i=1...N}\,(y_i, f_i\,(p)) + f_{N+1}(p)$$

Твердження 2. Якщо $y(A, c)$ — єдиний розв'язок системи і $\forall\ p\in D$ $X(p) \neq \varnothing$, то

$$B(X\,(p), p) = F\,(p, y(A,c))$$

і значення $p\,(y(A,c))$ є шуканим розв'язком задачі 2.

Наслідок 1. Якщо

$$D = D_1 \times D_2 \times ... \times D_N,$$

$$f_i\,(p) \equiv f_i\,(p_i), f_{N+1}\,(p) \equiv \Sigma_{i=1...N} f_i\,(p_i), p_i \in D_i,$$

то значення

$$p_i\,(y(A,c))\,\Delta\,arg\,max_{p(i)\in Di}[(y(A,c), f_i\,(p_i)) + f_i\,(p_i)]$$

є розв'язком задачі 2.

Твердження 3. Якщо

$$f_i\,(p_i) = B_i p_i + d_i, f_i\,(p_i) = (h_i, p_i),$$

$$D_i = \{p_i |\, \| p_i \|_{v(i)} \le \alpha_i\}$$

$$v(i) \in \{1, 2, 3\}, \| p \|_1 \Delta\, max_j |\,(p)_j\,|,$$

$$\| p \|_2 \Delta \Sigma_j |\,(p)|_1, \| p \|_3 \Delta (\Sigma_j (p)_j^{2)\ 1/2},$$

$(p)_j$ — j-*а* компонента вектора p), то значення

$$p_i(y(A,c))\,\Delta\,s\,(B_i^* y_i(A,c) + h_i, \alpha_i, v(i))$$

є в умовах теореми 2 розв'язком задачі 2, де

$(s(a,\alpha, 1))_i = \alpha\, sign\,(a)_i,\ (s(a,\alpha, 3) = \alpha\, a/\| a \|_3,\ (s(a,\alpha, 2))_i = \alpha^i\,(a)\ sign(a)_i,\ \alpha^i\,(a)$ — розв'язок α^ι системи

$$\alpha^i \ge 0, \Sigma_i\, \alpha^i = \alpha, \forall i \notin I\,\Delta\,arg\,max_i |\,(p)_i|\,\alpha^i = 0.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *И. В. Бейко, Б. Н. Бублик, П. Н. Зінько*. Методи і алгоритми розв'язування задач оптимізації. — К.: Вища шк., 1993. — 512 с.
2. *Ю. М. Ермольев, И. И. Ляшко, В. С. Михалевич, В. И. Тюптя*. Математические методы исследования операцій. — К.: Вища шк., 1979. — 312 с.

3. *М. В. Жук, Ю. М. Щербина*. Збірник задач з методів оптимізації. — Львів, 1997.
4. *Н. З. Шор*. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. –К.: Наук. думка, 1979.
5. *Задоя О*. Методи оптимізації і дослідження операцій. — Дніпропетровськ, 2001.
6. *Кириленко В*. Методи оптимізації і дослідження операцій: Навч. посіб. — К.: Таксон, 1998. — 334 с.
7. *Методи* оптимізації і дослідження операцій: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. /Н. О. Гончарова, А. І. Ігнатюк, Н. А. Малиш та ін. — К.: МАУП, 2005. — 304 с.

Додаткова

8. *Базилевич В., Лук'янов В., Писаренко Н., Квіцинська Н*. Методи оптимізації і дослідження операцій: Опорний конспект лекцій. — К.: Четверта хвиля, 1997. — 248 с.
9. *Б. Т. Поляк*. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.
10. *Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин*. Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975.
11. *Будаговська С. та ін*. Методи оптимізації і дослідження операцій та макроекономіка. — К.: Основи, 1998. — 518 с.
12. *Макконнелл К. Р., Брю С. Л*. Аналітична економія. Принципи, проблеми і політика: Пер. з англ.; Наук. ред. пер. Т. Панчишина. — Львів: Просвіта, 1999. — Ч. 2: Методи оптимізації і дослідження операцій.
13. *Нуреев Р*. Сборник задач по микроэкономике. — М.: ИНФРА-М, 2002. — 432 с.
14. *Шндайк Р. С, Рубінфельд Д. Л*. Методи оптимізації і дослідження операцій / Пер. з англ. А. Олійника, Р. Скільського. — К.: Основи, 1996. — 646 с.
15. *Самуельсон П. А., Нордгауз В. Д*. Методи оптимізації і дослідження операцій: Пер. з англ. / За ред. С. Панчишина. — К.: Основи, 1998. — 676 с.
16. *Ястремський О., Гриценко О*. Основи мікроекономіки. — К.: Знання, 1998. — 674 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленко*
Комп’ютерне верстання *О. А. Варваріна*

Зам. № ВКЦ-4240

Формат 60×84/$_{16}$. Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний.
Наклад 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП “Видавничий дім “Персонал”
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008 р.