МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

**Методичні матеріали
щодо забезпечення самостійної роботи студентів
з дисципліни**

“МАТЕМАТИЧНА ТЕОРІЯ РИЗИКУ ТА СТРАХОВА СПРАВА”

(для спеціалістів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2010

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики *О. О. Юньковою*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики
та програмування (протокол № 10 від 19. 06. 08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Юнькова О. О. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Математична теорія ризику та страхова справа” (для спеціалістів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2010. — 35 с.

Методичні матеріали містять пояснювальну записку, тематичний план, теоретичний мінімум, задачі для самоконтролю, загальні рекомендації щодо виконання самостійної роботи, теми завдань та список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

У ході самостійної роботи студент повинен засвоїти методи дослідження та якісного аналізу математичних моделей фінансових систем.

Матеріал самостійних завдань відповідає темам дисципліни "Математична теорія ризику та страхова справа" для підготовки бакалаврів, спеціалістів, магістрів напряму "Прикладна математика". Зміст поєднує теоретичні питання методики математичного моделювання та основи його практичного застосування у дослідженні реальних процесів прикладного фінансового аналізу.

Метою курсу є ознайомлення студентів із сучасними задачами моделювання фінансових процесів в умовах ринкової економіки.

Курс "Математична теорія ризику та страхова справа" вивчається студентами спеціальності прикладна математика на 4 курсі в 5-му семестрі, коли вони засвоїли базові дисципліни спеціальності, а саме "Математичний аналіз", "Теорія ймовірності", "Математичне програмування" та ін.

Задачами вивчення дисципліни є:

- теоретичне та практичне ознайомлення студентів з основами сучасного фінансового аналізу;
- ознайомлення студентів із класичними підходами до розв'язання задач прикладного портфельного аналізу;
- ознайомлення студентів із динамічними математичними моделями, які можуть бути застосовані при побудові оптимальних з точки зору ризику та прибутковості портфелів однорідної та змішаної структур.

Автор сподівається, що методичні рекомендації будуть корисними студентам та фахівцям економічних і математичних спеціальностей, а також усім, хто цікавиться проблемами застосування методів математичного моделювання у сучасному прикладному фінансовому аналізі.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МІНІМУМ. ОСНОВИ МОДЕЛЮВННЯ ПРИКЛАДНИХ ФІНАНСОВИХ ПРОЦЕСІВ

Метою самостійної роботи є отримання студентами знань і навичок з постановки та розв'язання задач сучасного портфельного аналізу.

У ході роботи необхідно розглянути такі питання:

1. Визначення процесу і цілі його моделювання
2. Визначення основних числових характеристик процесу та зв'язків між ними.
3. Класифікація типів змінних, які описують числові характеристики:

а) визначення вхідних (керуючих, визначених, оцінюваних, прогнозованих та невизначених) впливів на процес;

б) визначення вихідних змінних (значення цільових функцій управління).

4. Визначення методів дослідження моделі.
5. Вибір класу рівнянь для аналізу і моделювання.
6. Визначення зв'язків між диференціальними, інтегральними і різницевими рівняннями, які описують динаміку.
7. Вибір та реалізація методів представлення динаміки числових характеристик системою математичних рівнянь.
8. Реалізація цілі досліджень математичних моделей реальних процесів.
9. Порівняння аналітичних, чисельних та інших якісних методів дослідження процесу.
10. Використання апарату методів якісного дослідження моделей реальних прикладних фінансових процесів.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулювати математично та розв'язати аналітично за допомогою методу множників Лагранжа задачу про побудову оптимального портфеля цінних паперів однорідної та змішаної структури:
   - портфеля акцій;
   - портфеля акцій та облігацій.
2. Побудувати у класі звичайних диференціальних рівнянь математичну модель динаміки формування ціни акції.
3. Побудувати у класі стохастичних диференціальних рівнянь математичну модель формування вартості портфеля цінних паперів.
4. Розглянути процедури формування та диверсифікації портфеля цінних паперів як задачі оптимального керування з можливістю

застосування для їх розв'язання принципу максимуму та методу динамічного моделювання.

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Самостійна робота полягає у побудові та дослідженні математичних моделей сучасного прикладного фінансового аналізу.

За результатами самостійної роботи студент складає і захищає звіт, в якому розкриваються такі завдання:

- постановка задачі;
- огляд методів моделювання реального процесу для обраних класів математичних моделей;
- обґрунтування та опис математичної моделі процесу, який досліджується;
- опис програмного продукту для чисельного дослідження моделі;
- основні результати, які отримані в ході розв'язування поставленої задачі, а також зроблено основні висновки та наведено список використаної літератури.

Перелік умовних позначень

B — ринкова ціна облігації.

B(0, T) — ринкова ціна облігації на протязі періоду володіння.

Bt — ціна на облігації на момент t.

ck — розмір купонної виплати, k є [0, T].

D(Y) — дюрація облігації із прибутковістю Y.

Dexp — дюрація облігації вибраного інвестором типу.

F — номінал облігації.

I — макроекономічний показник, який характеризує об'єм грошових інвестицій (попит на гроші з боку активів) [1].

L — кількість типів облігацій.

N — кількість цінних паперів.

r — відсоткова ставка на фондовому ринку.

rexp — бажаний рівень прибутковості портфеля.

ri — очікувана прибутковість i — ого цінного паперу.

rI — прибутковість на ринковий індекс I.

rp — очікувана прибутковість портфеля.

rs — очікувана прибутковість портфеля акцій.

$r(0, T)$ — ставка-спот (відсоткова ставка позики чи займу, що надаються в момент 0 на період [0; T]).
S_t — ціна на акції на момент t.
T — термін погашення облігації (роки).
T_{exp}– термін погашення облігації вибраного інвестором типу.
u_i — точка перетину вертикальної вісі та кривої байдужості.
U(C)=log(C) — функція корисності інвестора.
w_t — незалежний вінеровський випадковий процес.
W — загальний капітал для інвестування.
X_i — частка початкової вартості портфеля, що інвестована в
і — ий цінний папір.
X — вартість портфеля інвестора.
Y — прибутковість облігації.
Y(t, T) — прибутковість облігації у момент $t<=T$.
Z_{ijt} — кількість облігацій типу j з терміном погашення t, яку придбав інвестор i.
α_{iI} — коефіцієнт зміщення ринкової моделі У. Шарпа.
β_{iI} — коефіцієнт нахилу ринкової моделі У. Шарпа.
β — кількість облігацій у портфелі інвестора.
γ — кількість акцій у портфелі інвестора.
ε_{iI} — випадкова похибка ринкової моделі У. Шарпа.
λ — ціна ризику утримання портфеля.
λ_i — множник функції Лагранжа.
μ — очікувана прибутковість акції.
ρ_{ij} — коефіцієнт кореляції між прибутковістю цінного паперу *i* та прибутковістю цінного паперу *j*.
ρ — відсоткова ставка на акції.
$\sigma_{\varepsilon I}$ — дисперсія випадкової похибки на ринковий індекс.
$\sigma_{\varepsilon p}$ — середній власний ризик портфеля.
σ_i — дисперсія і-го цінного паперу.
σ_{iI} — коваріація між прибутковістю акції *i* та прибутковістю на ринковий індекс.
σ_I — дисперсія прибутковості на ринковий індекс.
σ_{ij} — коваріація між цінними паперами *i* та *j*.
σ_p — стандартне відхилення портфеля цінних паперів.
τ — індекс толерантності до ризику.

1. Задача Марковиця з оптимізації портфеля акцій

Сучасна “теорія портфеля” (СТП) грунтується на праці

Г. Марковиця "Portfolio selection"(1952). Відтоді в рамках цієї проблеми було сформульовано нові постановки задач і отримано нові результати, які знайшли застосування і для розв'язання задач математичного моделювання макро- та мікроекономічних процесів. Предметом СТП є побудова процедур оптимізації ринкового ризику, очікуваних прибутків, побудова інструментів для оцінки актуальності диверсифікації портфеля, тенденції зміни ринкової вартості цінних паперів, ризикованості інвестування. Інвестиційний менеджмент, маючи в основі СТП, розглядає задачі оптимізації діяльності інвестора на фондовому ринку.

У ролі інвестора можуть бути:

- інвестиційні фонди;
- банки;
- інвестиційні фірми;
- інші суб'єкти;

Фондовий ринок представлено обігом різних фінансових інструментів, головними серед яких є акції та облігації.

Важливим для суб'єктів фінансово-інвестиційної діяльності є питання про побудову портфеля цінних паперів, який був би найефективнішим: давав би бажаний прибуток і дозволяв би уникнути можливості втрати вкладеного (інвестованого) капіталу.

Портфель цінних паперів формується з цінних паперів, представлених на фондовому ринку. Крім теорії Г. Марковиця, існує чимало інших теорій в рамках СТП, які є спробами найефективнішого розв'язання задач інвестиційного менеджменту.

1.1. Основні види цінних паперів. Їх загальна характеристика

- *Акція*. Це цінний папір, частка майна певного акціонерного товариства (відкритого чи закритого типу). Випускається з метою акумулювання капіталу для подальшої фінансової діяльності. При цьому власник акції (акціонер) отримує право як на участь в управлінні компанією, так і на отримання дивідендів [5].

- *Облігація*. Це борговий цінний папір, що випускається державою або фірмою з метою акумулювання капіталу, реструктурування боргів. На відміну від акцій облігації випускаються на певний строк, з закінченням якого, вони вилучаються із обігу шляхом погашення [5].

Основними характеристиками облігації є:

- термін погашення;

- номінал облігації (або вартість погашення);
- купон (виплати до погашення);

“Якістю” облігації є її прибутковість до моменту погашення (прибутковість). Це один із найважливіших факторів оцінки облігації. Загальний прибуток або поточний прибуток визначається, як купон, поділений на ринкову ціну та помножений на 100. На прибутковість облігації впливають:

- кредитний та ринковий ризик;
- зміни в ставках реінвестування;
- податковий статус інвестора;

Купон — це номінальна ставка процента, що виплачується відносно номінальної вартості. Якщо облігація немає купона, вона називається безкупонною.

Номінальна вартість — це ціна, що вказана на сертифікаті цінного паперу.

Як правило, умовно вважається, що порівняно із акцією (ризиковим цінним папером) облігація є безризиковою.

Варто також зауважити, що інвестиційний портфель (або портфель цінних паперів) може мати різну структуру:

- портфель акцій;
- портфель облігацій;
- портфель змішаної структури (акції та облігації).

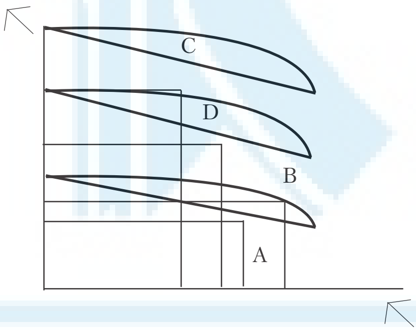
Головною концепцією, яка перша приходить на думку при згадці про портфель цінних паперів, побудований виключно із акцій, є концепція Г. Марковиця [4].

Відповідно до неї поведінка учасників фінансового ринку визначається не тільки очікуваним максимальним доходом на свої інвестиції. Досвід функціонування фінансового ринку в США показує, що всі цінні папери, як з високим, так і з низьким доходом, продаються й купуються. Справа в тому, що покупці враховують не тільки величину доходу, а й ступінь його невизначеності, тобто ризик, і кожен інвестор прагне диверсифікувати свій портфель цінних паперів. Згідно з розробленою Г. Марковицем теорією вибору раціонального портфеля інвестор має підібрати такий “набір” цінних паперів, який знижував би ризик втрати доходу або одержання надто малого доходу. Розрахунок ризику, що передбачається, здійснюється за відповідною моделлю. Ризик дорівнює величині відхилення очікуваного доходу випадкової величини (тобто дивіденду) від її середнього рівня.

Далі здійснюються відповідні розрахунки, мета яких полягає в зіставленні дивіденду і ризику, на основі чого корпорації (чи інші юридичні або фізичні особи) формують свої портфелі із різних видів цінних паперів. Такі портфелі було названо ефективними. Ефективність портфеля означає, що за даної структури цінних паперів інвестор одержить очікуваний доход за мінімального ризику. Необхідно зауважити, що Г. Марковиць доводить свої теоретичні викладки до практичних розробок. У західній літературі підкреслюється: нині неможливо уявити собі адміністрацію корпорації, яка не використовувала б моделі Г. Марковиця.

1.2. Криві байдужості

Метод, який буде використовуватись для вибору найбільш бажаного портфеля, пов'язано із так званими кривими байдужості (indifference curves) [2]. Ці криві відображають відношення інвестора до ризику та прибутковості і, таким чином, можуть бути зображені на графіку, де на горизонтальній вісі відкладено ризик, мірою якого є стандартне відхилення, а на вертикальній — винагорода, мірою якої є очікувана прибутковість (див. мал.1).



Малюнок 1.

Криві байдужості мають такі властивості:

- Всі портфелі, що знаходяться на певній заданій кривій байдужості, є рівноцінними для інвестора.

- Кожна крива лінія на малюнку відображає одну криву байдужості інвестора і являє собою всі комбінації портфелів, які забезпечують заданий рівень бажань інвестора.
- Криві байдужості не можуть перетинатись.
- Інвестор буде вважати портфель, який знаходиться на кривій байдужості, розташованій вище та лівіше, більш бажаним, ніж портфель, який знаходиться на кривій байдужості, яка розташована нижче та правіше.
- Інвестор має нескінченну кількість кривих байдужості.

1.3. Ненасиченість

При використанні підходу Г. Марковиця робиться зауваження щодо ненасиченості інвестора. Тобто інвестор прагнутиме до високого рівня кінцевого прибутку. Більший прибуток, який він зможе отримати у кінці періоду інвестування, дасть можливість витратити більше грошей на споживання або на подальше інвестування [2].

1.4. Уникання ризику та очікувана прибутковість

Робиться припущення про те, що інвестор прагне уникнути ризику (risk — averse). Тобто інвестор обирає портфель з меншим стандартним відхиленням.

Ці два положення (ненасиченість та уникання ризику) є причиною опуклості та додатнього нахилу кривої байдужості. Але, роблячи зауваження про уникання ризику всіма інвесторами, не можна припустити, що ступінь уникання ризику однаковий для всіх інвесторів. Різні інвестори мають різні графіки кривих байдужості.

Виходячи з підходу Г. Марковиця щодо інвестицій, інвестор повинен оцінити усі портфелі, з точки зору їх очікуваної прибутковості та стандартного відхилення, які тільки можна побудувати із акцій, які на момент інвестування представлені на фондовому ринку, використовуючи криві байдужості. У випадку, коли інвестор намагається уникнути ризику, інвестувати потрібно в портфель, що знаходиться на кривій байдужості, яка розташована ”вище та лівіше” від усіх інших.

При інвестуванні інвестор має звернути особливу увагу на кінцеву (у кінці періоду інвестування) вартість цінного паперу. Це означає, що, приймаючи рішення, який портфель акцій купувати, використовуючи початкову вартість цінних паперів, інвестор має звернути особливу увагу на те, який ефект різні портфелі мають на кінцеву вартість. Цей ефект може бути виражений через очікувану прибутковість та стандартне відхилення кожного портфеля. Оскільки кожен портфель є набором різноманітних цінних паперів, очевидним є те, що очікувана прибутковість та стандартне відхилення портфеля повинні залежати від очікуваної прибутковості та стандартного відхилення кожної акції, яка входить в портфель. Значний вплив має також частина капіталу інвестування, яку було інвестовано саме в цей цінний папір.

Формула розрахунку очікуваної прибутковості портфеля, що складається з N цінних паперів, виглядає таким чином:

$$\overline{r}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i * \overline{r}_i = X_1 * \overline{r}_1 + X_2 * \overline{r}_2 + \ldots + X_N * \overline{r}_N.$$

Інвестор може інвестувати усі гроші тільки в акцію з максимальною очікуваною прибутковістю, але диверсифікація портфеля може значно знизити ризик (вимірюється стандартним відхиленням) [2].

1.5. Стандартне відхилення

Корисна міра ризику повинна враховувати ймовірність можливих “поганих” результатів та їх величину. Замість того щоб вимірювати ймовірності різноманітних результатів, міра ризику повинна оцінювати ступінь можливого відхилення дійсного результату від очікуваного. Стандартне відхилення — це і є міра, яка дозволяє це зробити, оскільки вона є оцінкою ймовірного відхилення фактичної прибутковості від очікуваної. Найкращим є той випадок, коли розподіл ймовірностей (probability distribution) прибутковості портфеля може бути апроксимований до кривої, що має форму дзвону і назву — нормальний розподіл (normal distribution) [7].

Інвестиційний ризик портфеля визначають як мінливість прибутковості, яка вимірюється за допомогою стандартного відхилення (дисперсії) розподілу прибутковості портфеля.

1.6. Коваріація

Коваріація — це міра взаємодії двох випадкових змінних. За змінні можна брати прибутковості двох цінних паперів, які впливають один на одного. Додатнє значення коваріації показує, що прибутковості цінних паперів мають тенденцію змінюватися в один бік. Тобто очікувана прибутковість одного цінного паперу має змінюватися так само, як і очікувана прибутковість іншого цінного паперу. Від'ємне значення коваріації означає, що прибутковості мають тенденцію компенсувати одна одну. У випадку, коли коваріація дорівнює нулю, виявляється, що зв'язок між прибутковостями цінних паперів або дуже слабкий, або взагалі відсутній [7].

1.7. Коваріаційна матриця

Розглянемо коваріаційну матрицю (variance-covariance matrix) N цінних паперів [7]:

$$\begin{array}{cccc} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} & \sigma_{N1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} & \sigma_{N2} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & \sigma_{N3} \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_{N4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{1N} & \sigma_{2N} & \sigma_{3N} & \sigma_{NN} \end{array}$$

Сформулюємо основні властивості коваріаційної матриці:

- Матриця є квадратною.
- Дисперсії цінних паперів знаходяться на головній діагоналі матриці (дисперсія цінного паперу — це коваріація його самого із собою, тобто це стандартне відхилення цього цінного паперу піднесене у квадрат).
- Матриця є симетричною. Ця властивість має просте пояснення: коваріація між двома цінними паперами не залежить від порядку, в якому ці два папери розглядаються.

1.8. Кореляція

Дуже близьким поняттям до коваріації є кореляція. Коваріація двох випадкових величин — це коефіцієнт кореляції між ними, який множать на добуток їх стандартних відхилень. Тобто [7]:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j .$$

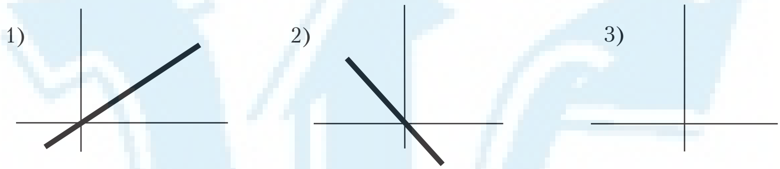
Коефіцієнт кореляції знаходиться між -1 та +1.

1) ρ_{ij} = +1. Повністю додатня кореляція (якщо маємо два цінних папери, то, якщо один з них має відносно високу прибутковість, інший теж матиме відносно високу прибутковість, і навпаки.)
2) ρ_{ij} = -1. Від'ємна кореляція (прибутковості двох цінних паперів змінюються у протилежних напрямках одна по відношенню до

іншої. Якщо один цінний папір має відносно високу прибутковість, то інший — відносно низьку.)

3) $\rho_{ij} = 0$. Особливий випадок: точкова діаграма прибутковості двох цінних паперів показує розкид точок, який не може бути хоча б приблизно представлений як довільна пряма. Робиться висновок про некорельованість прибутковостей цінних паперів.

Наведемо малюнки, які відповідають розглянутим випадкам (див.мал. 2):



Малюнок 2.

горизонтальна вісь — прибутковість цінного паперу А; вертикальна — для В.

Висновок:

У загальному випадку стандартне відхилення портфеля обраховується за формулою [2]:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i * X_j * \sigma_j}.$$

1.9. Побудова кривої байдужості інвестора

Визначення кривої байдужості інвестора є досить складною проблемою. На практиці її частіше отримують у наближеній формі, шляхом *оцінки рівня толерантності ризику* (τ — risk tolerance), що визначається як найбільший ризик, на який здатен інвестор для збільшення очікуваної прибутковості.

З метою визначення цієї оцінки інвестору пропонують набір значень ризику та очікуваної прибутковості для різних варіантів гіпотетичних портфелів.

Частка		Очікувана прибутковість	Стандартне відхилення	Відповідний рівень толерантності ризику (τ)
Акції	Векселі			
0 %	100 %	7,50 %	0 %	0
10 %	90 %	7,95 %	1,50 %	10
20 %	80 %	8,40 %	3 %	20
30 %	70 %	8,85 %	4,50 %	30
40 %	60 %	9,30 %	6 %	40
50 %	50 %	9,75 %	7,50 %	50
60 %	40 %	10,20 %	9 %	60
70 %	30 %	10,65 %	10,50 %	70
80 %	20 %	11,10 %	12 %	80
90 %	10 %	11,55 %	13,50 %	90
100 %	0 %	12 %	15 %	100

Інвестору пропонують вибрати найбажаніший для себе портфель у термінах очікуваної прибутковості та стандартного відхилення та найбажанішу комбінацію, тобто його просять розташувати одну з кривих байдужості на графіку. Звичайно, краще було б визначити усі криві байдужості, але на практиці ставлять скромнішу мету — отримати уявлення про форму кривих байдужості для таких показників співвідношення ризику та очікуваної прибутковості. В принципі, вибір певного співвідношення характеризує нахил кривої байдужості. Частіше робиться припущення, що інвестор має постійний рівень толерантності ризику по відношенню до альтернативних портфелів, які розташовані поблизу від початкової обраної точки [2].

Рівняння кривої байдужості [2]:

$$\bar{r}_p = u_i + \frac{1}{\tau} * \sigma_p^2.$$

Слід звернути увагу на те, що дві криві байдужості інвестора відрізняються одна від іншої тільки на величину значення перетину вертикальної осі. Це справджується в силу того, що криві байдужості паралельні і мають однаковий нахил (1÷τ).

Формула для оцінки рівня толерантності ризику[2]:

$$\tau = \frac{2*\left[(\overline{r}_{\exp} - r)*\sigma_S^2\right]}{(\overline{r}_S - r)^2}.$$

Після того, як криві байдужості інвестора оцінено, можна перейти до основної задачі — пошуку ефективного портфеля.

1.10. Теорема про ефективну множину

Як було зазначено раніше, із набору N цінних паперів можна сформувати нескінченну кількість портфелів. Кінець кінцем інвестор може вкласти довільний процент (від 0 % до 100 %) в один цінний папір, а решту — в інші. Чи необхідно інвестору проводити оцінку всіх портфелів, які можуть бути сформовані із заданого набору цінних паперів? Інвестор повинен розглянути лише підмножину можливих портфелів. Це пояснюється в теоремі про ефективну множину [2].

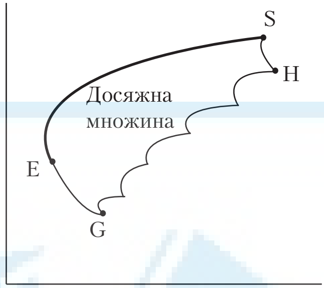
ТЕОРЕМА:

“Інвестор має вибрати свій оптимальний портфель із множини портфелів, кожен із яких:

- *Забезпечує максимальну очікувану прибутковість для певного рівня ризику.*
- *Забезпечує мінімальний ризик для певного значення очікуваної прибутковості.*

Набір портфелів, який задовольняє цим двом умовам, називається ефективною множиною (efficient set), або ефективною границею.”

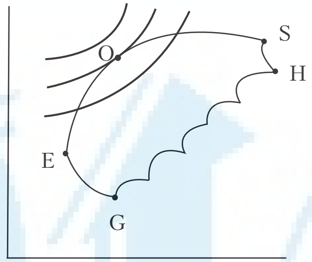
Досяжна множина (feasible set) — множина можливостей, з яких може бути виділена ефективна множина. Досяжна множина являє собою всі портфелі, які можуть бути сформовані із групи N цінних паперів. Ці портфелі знаходяться або на границі, або всередині досяжної множини. Загалом ця множина має форму парасольки. Залежно від цінних паперів, що використовуються, вона може бути більш зміщена праворуч, ліворуч, вище, нижче, крім того, вона може бути ширшою або вужчою. За винятком вироджених випадків малюнок повинен бути подібним до наведеного (див. мал. 3).



Малюнок 3.

1.11. Теорема про ефективну множину у застосуванні до досяжної множини

Можна визначити місцезнаходження ефективної множини, застосувавши теорему про ефективну множину до досяжної множини. Спочатку треба виділити множину портфелів, яка задовольняє першій умові теореми. Якщо розглянути малюнок, неважко побачити, що не існує менш ризикованого портфеля, ніж портфель E. Це пояснюється так. Якщо провести через E вертикальну пряму, то немає жодної точки, яка належала б досяжній множині та знаходилась ліворуч від тієї прямої. При цьому не існує більш ризикованого портфеля, ніж портфель H. Якщо провести через H вертикальну лінію, жодна точка досяжної множини не буде знаходитись правіше цієї лінії. Таким чином, множиною портфелів, яка забезпечує максимальну очікувану прибутковість при змінних рівнях ризику, є частина верхньої границі досяжної множини, розташованої між точками E та H. Розглянемо іншу умову. Неважко виявити, що не існує портфеля, який забезпечував би вищу очікувану прибутковість, ніж портфель S, тому що жодна точка досяжної множини не розташована вище за горизонтальної прямої, що проходить через S. Аналогічно, не існує портфеля, який забезпечував би меншу очікувану прибутковість, ніж портфель G, тому що жодна точка із досяжної множини не знаходиться нижче за горизонтальної прямої, що проходить через точку G. Таким чином, множина портфелів, які забезпечують мінімальний ризик при змінному рівні очікуваної прибутковості, є частина лівої границі досяжної множини, розташована між точками S та G. Вкажемо також, що нас задовольняють тільки ті портфелі, які знаходяться на верхній і лівій границі досяжної множини між точками E та S. Природньо, що ці портфелі і складають ефективну множину, та із цієї множини ефективних портфелів (efficient portfolios) інвестор має вибрати оптимальний для себе. Всі інші досяжні портфелі є неефективними (inefficient portfolios), тому їх можна ігнорувати [2]. (див. мал. 4).



Малюнок 4.

2. Задача про побудову оптимального портфеля — як задача математичного моделювання

Яким же чином інвестор обирає оптимальний портфель (optimal portfolio) [2]? Як це показано на малюнку, інвестор повинен намалювати свої криві байдужості на одному малюнку із ефективною множиною, а потім почати обирати портфель, який розташований на кривій байдужості вище та лівіше за інших. Цьому портфелю буде відповідати точка, в якій крива байдужості торкається ефективної множини.

З урахуванням того, що криві байдужості для інвестора, який уникає ризику, опуклі і мають додатній нахил, можна показати, що ефективна множина, загалом, увігнута і теж має додатній нахил, тобто відрізок, який з'єднує дві довільні точки ефективної множини, розташований нижче цієї множини. Ця властивість є дуже важливою, оскільки існує тільки одна точка доторкання ефективної множини та кривих байдужості.

2.1. Знаходження портфеля акцій із заданим рівнем прибутковості за найменшого ризику

Нехай на фондовому ринку представлено N типів акцій. Мета інвестора: досягти заданого рівня прибутку, інвестуючи капітал в акції за найменшого ризику [8]. У загальному вигляді відповідна задача інвестування може бути записана у вигляді:

$$\delta_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i * X_j * \sigma_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i * r_i - r_{\exp} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1,$$

$$X_i \geq 0, i = \overline{1,N}.$$

Перше обмеження даної задачі фіксує бажаний рівень майбутнього доходу, друге – нормує вагові коефіцієнти портфеля, третє характеризує вкладання всього капіталу в акції. Згідно з такою постановкою задача умовної оптимізації може бути зведена до задачі безумовної оптимізації за допомогою функції Лагранжа. Цільова функція Лагранжа для задачі мінімізації ризику при фіксованому рівні доходу може бути записана:

$$L = \sum_i \sum_j X_i * X_j * \sigma_{ij} + \lambda_1 * (\sum_i X_i * r_i - r_{\exp}) + \lambda_2 * (\sum_i X_i - 1).$$

Портфель, що мінімізує ризик, може бути знайдено, якщо покласти:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0, k = 1,2.$$

Ця умова першого порядку визначає систему рівнянь, лінійних за ваговими коефіцієнтами портфеля та множниками Лагранжа.

У матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \vdots & \sigma_{1N} & E_1 & 1 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N1} & \vdots & \sigma_{NN} & E_N & 1 \\ E_1 & \vdots & E_N & 0 & 0 \\ 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ \text{-----} \\ X_N \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{-----} \\ 0 \\ Er_{\exp} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо позначити матрицю “ризик-прибутковість” через V, а вектор (X, λ) через A, вектор у правій частині через W, то можна записати систему алгебраїчних рівнянь, яка, при відповідних допущеннях стосовно матриці V, дозволить знайти портфель з акцій, який реалізує бажаний доход (при мінімальній дисперсії).

2.2. Чисельний приклад

Розглянемо три типи акцій та інформацію про них відому [8]:

	Очікувана прибутковість	Варіація прибутковості	Коваріація	(i, j)
Акція 1	0.03	0.25	- 0.05	(1,2)
Акція 2	0.07	0.45	0.45	(2,3)
Акція 3	0.15	0.90	0.2	(1,3)

Функція Лагранжа:

$$L = X_1^2 * \sigma_{11} + X_2^2 * \sigma_{22} + X_3^2 * \sigma_{33} + 2 * X_1 * X_2 * \sigma_{12} +$$
$$+2 * X_1 * X_3 * \sigma_{13} + 2 * X_2 * X_3 * \sigma_{23} +$$
$$\lambda_1 * (X_1 * E_1 + X_2 * E_2 + X_3 * E_3 - \bar{E} r_{\exp}) + \lambda_2 * (X_1 + X_2 + X_3 - 1).$$

Умови першого порядку:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 2 * X_1 * \sigma_{11} + 2 * X_2 * \sigma_{12} + 2 * X_3 * \sigma_{13} + \lambda_1 * E_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 2 * X_2 * \sigma_{22} + 2 * X_1 * \sigma_{12} + 2 * X_3 * \sigma_{23} + \lambda_1 * E_2 + \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_3} = 2 * X_3 * \sigma_{33} + 2 * X_1 * \sigma_{13} + 2 * X_2 * \sigma_{23} + \lambda_1 * E_3 + \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = X_1 * E_1 + X_2 * E_2 + X_3 * E_3 - \bar{E} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = X_1 + X_2 + X_3 - 1 = 0.$$

Матрична форма:

$$\begin{pmatrix} 2*\sigma_{11} & 2*\sigma_{12} & 2*\sigma_{32} & E_1 & 1 \\ 2*\sigma_{21} & 2*\sigma_{22} & 2*\sigma_{23} & E_2 & 1 \\ 2*\sigma_{31} & 2*\sigma_{32} & 2*\sigma_{33} & E_3 & 1 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{E} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно з умовами задачі:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}03 & 1 \\ -0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}07 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}8 & 0{,}15 & 1 \\ 0{,}03 & 0{,}07 & 0{,}15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = V; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{E} \\ 1 \end{pmatrix} = W;$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}4301 & -0{,}6452 & 0{,}2151 & -5{,}1075 & 0{,}7876 \\ -0{,}6452 & 0{,}9678 & -0{,}3225 & -4{,}8387 & 0{,}6935 \\ 0{,}2151 & -0{,}3226 & 0{,}1075 & 9{,}9462 & -0{,}4812 \\ -5{,}108 & -4{,}8387 & 9{,}9462 & -79{,}973 & 0{,}4906 \\ 0{,}7876 & 0{,}6935 & -0{,}4811 & 0{,}4906 & -0{,}1468 \end{pmatrix} = V^{-1}.$$

Загальний розв'язок задачі мінімізації дисперсії портфеля, як функції E для акцій 1, 2, 3:

Акція 1 X1= -5,10753 * E + 0,787634;
Акція 2 X2= -4,83871 * E + 0,693548;
Акція 3 X3= 9,946237 * E – 0,48118.

Наприклад, якщо інвестор прагне отримати очікувану прибутковість 0,1 (тобто 10 %), підставляючи E=0,1, отримаємо:

Акція 1 X1 = 0,276882,
Акція 2 X2 = 0,209677,
Акція 3 X3 = 0,513441.

2.3. Багатокрокова процедура пошуку оптимального портфеля

З метою уникнення вироджених випадків [4] іноді доречніше, грунтуючись на теоремі Г. Марковиця "про ефективну множину", застосовувати багатовимірну оптимізацію для знаходження оптимального портфеля:

$$\max_{r_i}\{\sum_{i=1}^{N} X_i * r_i - \frac{1}{\tau} * \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i * X_j * \sigma_{ij} \right)\},$$

$$X_i \geq o,$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1.$$

Процедура оптимізації на кожному кроці алгоритму передбачає пошук та оцінку градієнта цільової функції у точках, які належать досяжній множині. Умовою виходу із процедури оптимізації є досягнення точки із ефективної множини (оптимальний портфель). У разі необхідності може бути застосована процедура нормування ваг цінних паперів портфеля.

3. Портфель облігацій

Візьмемо до уваги тільки звичайні облігації. Вони будуть погашені у майбутньому за встановленою ціною в конкретний час, а до того — будуть сплачуватись відсотки за фіксованою ставкою. Ринкова ціна облігації з терміном погашення Т років описується формулою [8]:

$$B(0,T)=\sum_{k=1}^{T}\frac{c_k}{(1+Y)^k}+\frac{F}{(1+Y)^T}.$$

Купони виплачуються у відсотках від номіналу облігації: $c_k = r*F$;

Якщо маємо облігацію із дисконтом (нульовий купон), тоді прибутковість задовольняє співвідношенню [8]:

$$B(0,T)=\frac{1}{(1+Y)^T}.$$

Для $\forall t<T$ виконується: $B(t, T)<1$; $B(T, T)=1$.

Якщо на фондовому ринку діє відсоткова ставка-спот, тоді $B(0, T)$ дорівнює:

$$B(0,T)=\frac{1}{(1+r(0,T))^T}.$$

Видно, що $Y(0, T)\equiv r(0, T)$.

У зв'язку з цим прибутковість є початковою структурою відсоткових ставок [8].

Загалом при ставці-спот $r(t, T)$ на період $[t, T]$ маємо:

$$B(t,T)=\frac{1}{(1+r(t,T))^{T-t}},\quad \forall t\le T.$$

Отже, з рівнянь (4.2) та (4.4) маємо: $Y(t, T)\equiv r(t, T)$, $\forall t<=T$.

Відсотковий ризик зростає при зменшенні ціни облігації, та навпаки, зменшується при зростанні ціни. Облігації з різними строками погашення по різному реагують на зміну відсоткових ставок. Якщо відсоткова ставка зростає, прибуток від інвестицій купонів зростає, то ринкова ціна облігації спадає, та навпаки, якщо відсоткова ставка спадає, то вартість облігації зростає [5].

Проблематику, що пов'язана із розрахунком означених вище характеристик, при всіх t<=T, називають тимчасовою структурою відсоткових ставок.

Можливість оцінки прибутковості портфеля цінних паперів, який побудований виключно із облігацій, дає дюраційний аналіз.

3.1. Дюраційний аналіз

Якщо ринкову ціну облігації B(0, T)>0 розглядати як функцію прибутковості: Y=Y(0, T), то при диференціюванні отримаємо:

$$\frac{dB(0,Y)}{dY} = -\sum_{k=1}^{T} \frac{k*c_k}{(1+Y)^{k+1}} = \frac{1}{(1+Y)} * \sum_{k=1}^{T} \frac{k*c_k}{(1+Y)^k},$$

якщо покласти:

$$D(Y) = B(0,Y)^{-1} * \sum_{k=1}^{T} \frac{k*c_k}{(1+Y)^k},$$

тоді з (3.5) отримаємо:

$$\frac{dB(0,T)}{dY} = -D(Y) * \frac{B(0,T)}{1+Y},$$

D(Y) — це дюрація. Дюрація показує, наскільки змінюється відносна ринкова ціна облігації при зміні початкової прибутковості. Запишемо вираз для дюрації облігації у вигляді:

$$D(Y) = \sum_{k=1}^{T} k * w_k,$$

$$w_k = \frac{c_k * (1+Y)^{-k}}{\sum_{i=1}^{T} c_i * (1+Y)^{-i}}.$$

Нехай ця облігація з купонами c_k, k є [1; T] буде портфелем облігацій із нульовим купоном і строками погашення 1,2,..., T; тоді дюрація — це зважений середній час погашення. Тому дюраційний аналіз дозволяє розглядати портфель облігацій як одну облігацію з вказаним терміном погашення.

Як висновок: дюрація характеризує чутливість ціни облігації, і, в ширшому розумінні, чутливість потоку платежів до зміни прибутковості. Використовуючи дюраційний аналіз, можна керувати ризиком з утримання портфеля облігацій, що повя'заний із зміною відсоткової ставки.

3.2. Задача ефективної диверсифікації портфеля облігацій

Використовуючи основні положення теорії дюраційного аналізу, можна розглянути задачу ефективної диверсифікації портфеля облігацій: мінімізувати систематичний ризик портфеля облігацій шляхом диверсифікації для одержання встановленого рівня прибутку[8].

При цьому використаємо той факт, що диверсифікація призводить до усереднення систематичного (ринкового) ризику та суттєво зменшує несистематичний (власний) ризик [2]. Введемо допоміжні позначення:

D, c, Y — дюрація, розмір купона та прибутковість диверсифікованого портфеля облігацій відповідно.

Враховуючи сказане, можна показати, що дюрація диверсифікованого портфеля для даного випадку має вигляд:

$$D_{\exp} = D = \sum_{k=1}^{T_{\exp}} \frac{k*(1+Y)^{-k}}{\sum_{i=1}^{T_{\exp}} c_i*(1+Y)^{-i}},$$

тобто маємо можливість побудувати потрібний розмір дюрації та строк погашення для диверсифікованого портфеля. Для визначених:

c_i, і є $[1; T_{\exp}]$ та Y, підбираються такі облігації, виставлених на фондовому ринку, що будуть входити до складу шуканого портфеля і відповідати заданим характеристикам.

4. Задача про стійкість відсоткової ставки

Актуальною є задача, яка в межах математичної теорії практичної стійкості може бути сформульована так: в яких межах повинна змінюватись відсоткова ставка, щоб ринкова ціна облігації не перевищувала заданого інвестором рівня. Сформульована вище задача може бути формалізована у вигляді:

$$\frac{dB(0,T)}{\partial r(0,T)} = -\sum_{k=1}^{T} \frac{k * c_k}{(1+Y)^{k+1}},$$

$$B(0,T) \le B_{\exp},$$

$$dr(0,T) = \frac{1}{\partial I},$$

$$Y(0,T) = r(0,T),$$

$$B(T,T) = 1,$$

$$B(t,T) < 1, \forall t < T.$$

Для розв'язання такої задачі можна використовувати математичні методи практичної стійкості, які грунтуються на першому та другому методах Ляпунова [10].

4.1. Задача оцінки попиту на облігації

Відомо, що відсоткові ставки визначаються рівнем попиту та пропозиції на активи, що приносять прибуток [1]. Пропозиція, звичайно, формується урядом, корпораціями чи особами, які прагнуть позичити гроші. Попит формується особами, які бажають зберегти частину свого прибутку для споживання у майбутньому. Спираючись на це, можна сформулювати задачу оцінки попиту на певні типи безкупонних облігацій, який може виникнути на фондовому ринку, якщо функція корисності інвестора — логарифмічна [8].

Переваги інвесторів можна обчислити за формулою:

$$V = U(C_0) + \sum_{t=1}^{T} \beta^t * U(C_t),$$

$$0 < \beta < 1.$$

У випадку, коли кожен тип облігації погашається за період, що відповідає номеру типу, інвестор має наступні бюджетні обмеження

$$C_o = W - \sum_{j=1}^{L} z_{ij} * B_j,$$

$$C_1 = \sum_{j=1}^{L} z_{i1j} * F_j,$$

$$C_2 = \sum_{j=1}^{L} z_{i2j} * F_j,$$

....

$$C_T = \sum_{j=1}^{L} z_{iTj} * F_j.$$

Задача інвестора при цьому полягає в максимізації функції корисності ($V \to max$) при бюджетних обмеженнях, причому, підставляючи обмеження безпосередньо у цільову функцію, можемо звести задачу умовної максимізації до задачі безумовної максимізації. Умови першого порядку для функції V по z_{itj} є необхідними і достатніми умовами максимуму. Перетворюючи ці рівняння до виду системи лінійних по z рівнянь, отримаємо загальний "розмір" попиту. В матричному вигляді:

$$A*z_i=C;$$

$$C = \begin{pmatrix} \beta * W \\ \beta^2 * W \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta^T * W \end{pmatrix}.$$

4.2. Чисельний приклад

Нехай інвестор бажає інвестувати свій капітал у три види безкупонних облігацій із строком погашення в періодах 1, 2, 3 відповідно. Такий інвестор має такі бюджетні обмеження:

1. $C_0 = W - z_{i1} * B_1 - z_{i2} * B_2 - z_{i3} * B_3,$
2. $C_1 = z_{i1} * F_1,$
3. $C_2 = z_{i2} * F_2,$
4. $C_3 = z_{i3} * F_3.$

Функція корисності має вигляд:

$$V = U(C_0) + \beta * U(C_1) + \beta^2 * U(C_2) + \beta^3 * U(C_3).$$

Умови першого порядку є необхідними та достатніми умовами існування максимуму [11,12]:

$$\frac{\partial V}{\partial z_{i1}} = -B_1 * (\frac{1}{W - z_{i1} * B_1 - z_{i2} * B_2 - z_{i3} * B_3}) + \frac{\beta * F_1}{z_{i1} * F_1} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_{i2}} = -B_2 * (\frac{1}{W - z_{i1} * B_1 - z_{i2} * B_2 - z_{i3} * B_3}) + \frac{\beta^2 * F_2}{z_{i2} * F_2} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_{i3}} = -B_3 * (\frac{1}{W - z_{i1} * B_1 - z_{i2} * B_2 - z_{i3} * B_3}) + \frac{\beta^3 * F_3}{z_{i3} * F_3} = 0.$$

Перетворюючі ці рівняння, отримуємо рівняння попиту у вигляді системи лінійних по z рівнянь:

$$(1+\beta) * B_1 * z_{i1} + \beta * B_2 * z_{i2} + \beta * B_3 * z_{i3} = \beta * W,$$

$$\beta^2 * B_1 * z_{i1} + (1+\beta^2) * B_2 * z_{i2} + \beta^2 * B_3 * z_{i3} = \beta^2 * W,$$

$$\beta^3 * B_1 * z_{i1} + \beta^3 * B_2 * z_{i2} + (1+\beta^3) * B_3 * z_{i3} = \beta^3 * W.$$

Розв’язок: z_i*=A^{-1}*C.

5. Портфель цінних паперів змішаної структури

Така структура портфеля цінних паперів є найбільш універсальною і тому викликає найбільший інтерес у інвестора. Розгляд розділу слід почати із класичної теорії У. Шарпа [2].

5.1. Теорія У. Шарпа

У 60-х роках теорію раціонального портфеля Г. Марковиця розробляє У. Шарп. Він вводить нову дуже важливу умову: на фінансовому ринку обертається один із видів цінних паперів, який без ризику дає інвестору доход наперед відомого рівня. Такими цінними паперами є державні облігації, доход за якими фіксований і гарантований доходами державного бюджету. Інвестор є захищеним від ризику, він заздалегідь знає, що одержить той відсоток річних, який зазначений на облігації. На думку У. Шарпа, можна моделювати тільки один вид ефективного портфеля — “портфель ринку”. Тому ціни одних акцій зростатимуть, інших — падатимуть, що вплине на рівень очікуваного доходу і співвідношення між доходом і ризиком. Така поведінка інвесторів на ринку триватиме доти, доки всі вони не досягнуть оптимальної структури своїх портфелів. Водночас на фінансовому ринку визначається залежність між доходністю і ризиком на кожну окрему акцію, що входить до портфеля [2].

Нехай прибутковість звичайної акції за певний період часу (наприклад, місяць) пов'язана з прибутковістю за той же період акції на ринковий індекс (ставка-спот). В цьому випадку з ростом ринкового індексу, ймовірно, буде зростати і ціна акції, а з падінням ринкового індексу, ймовірно, буде падати і ціна акції. Один з шляхів відображення такого взаємозв'язку має назву ринкова модель (market model) [2]:

$$r_i = \alpha_{iI} + \beta_{iI} * r_I + \varepsilon_{iI}$$

Зробивши припущення, що коефіцієнт нахилу додатній, з рівняння моделі можна побачити: чим вища прибутковість на ринковий індекс, тим вищою буде прибутковість цінного паперу (середнє значення випадкової похибки дорівнює нулю).

5.2. Випадкова похибка

Випадкову похибку можна розглядати як випадкову змінну, що має розподіл ймовірностей з математичним очікуванням рівним нулю та стандартним відхиленням, що позначається: $\sigma_{\varepsilon I}$.

Випадкова похибка дозволяє зробити припущення, що за певної прибутковості на ринковий індекс дійсна прибутковість цінного паперу частіше знаходиться поза прямою, що задається рівнянням ринкової моделі [7].

5.3. Графічне представлення ринкової моделі

Графіком ринкової моделі для цінного паперу є пряма, типу
$y = k*x + b$; де $k = \beta_{iI}$; $b = b_{iI}$

5.4. "β"-коефіцієнт

Нахил в ринковій моделі цінного паперу вимірює чутливість його прибутковості до прибутковості на ринковий індекс. Якщо графік ринкової моделі (пряма), має додатній нахил, то це показує, що чим вища прибутковість на ринковий індекс, тим вища прибутковість цього цінного паперу. Якщо розглянути два різних цінних папери, які матимуть графіки з різним ступенем нахилу, це буде означати, що вони мають різну чутливість до прибутковості індексу ринку. Коефіцієнт нахилу ринкової моделі називають "β"-коефіцієнтом, розраховують за формулою [2]:

$$\beta_{iI} = \frac{\sigma_{iI}}{\sigma_I^2}.$$

Акція, що має прибутковість, яка є дзеркальним відображенням прибутковості на індекс, буде мати "β"-коефіцієнт рівний 1. Йому відповідає ринкова модель вигляду:

$$r_i = r_I + \varepsilon_{iI}.$$

Акції, що мають "β"-коефіцієнт більший за одиницю, володіють більшою мінливістю, ніж ринковий індекс, мають назву "агресивні" акції (aggressive stocks). І навпаки, акції, що мають "β"-коефіцієнт менший за 1, володіють меншою мінливістю, ніж ринковий індекс, і мають назву "оборонні" акції (defensive stocks) [5].

5.5. Диверсифікація

Виходячи з ринкової моделі, загальний ризик цінного паперу вимірюється його дисперсією і складається з двох частин [2]:

I. Ринковий (систематичний) ризик (market risk).

II. Власний (несистематичний) ризик (unique risk).

Систематичний ризик цінних паперів є частиною загального ризику, який залежить від загального стану економіки. Він стосується всіх учасників господарського процесу, тобто всіх корпорацій. Систематичний ризик зумовлений динамікою інвестицій, оборотом зовнішньої торгівлі, змінами податкової політики та інших факторів, що не залежать від корпорації. Він спричинений функціонуванням економічної системи і впливає на неї. Від цього ризику неможливо позбавитися шляхом диверсифікації цінних паперів, тобто підбору оптимального портфеля. Систематичний ризик у літературі інколи називають ринковим ризиком, він вимірюється β-коефіцієнтом.

Несистематичний ризик цінних паперів є ризиком для певного інвестора. Тому його можна подолати шляхом правильної політики в галузі інвестицій у цінні папери. Формування "ефективного портфеля” цінних паперів знизить ризик, оскільки якщо один вид цінних паперів не дасть прибутку, то інший вид забезпечить високий прибуток. Диверсифікація цінних паперів дає змогу знизити невизначеність в одержанні доходу. Таким чином:

$$\sigma_i^2 = \beta_{iI}^2 * \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon I}^2.$$

Першим доданком тут є ринковий ризик цінного паперу. Другий доданок — власний ризик цінного паперу, мірою якого є дисперсія випадкової похибки.

5.6. Загальний ризик портфеля

Загальний ризик портфеля у випадку, коли прибутковість кожного ризикованого цінного паперу пов’язана з прибутковістю ринкового індексу, що визначається моделлю ринку:

$$\sigma_p^2 = \beta_{pI}^2 * \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2,$$

45:

$$\beta_{pI}^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i * \beta_{iI} \right)^2,$$

$$\sigma_{\varepsilon p}^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 * \sigma_{\varepsilon i}^2.$$

Загальний ризик портфеля, що вимірюється дисперсією його прибутковості, розраховується за формулою:

$$r_p = \alpha_{pI} + \beta_{pI} * r_I + \varepsilon_{pI},$$

де

$$\alpha_{pI} = \sum_{i=1}^{N} X_i * \alpha_{iI},$$

$$\beta_{pI} = \sum_{i=1}^{N} X_i * \beta_{iI},$$

$$\varepsilon_{pI} = \sum_{i=1}^{N} X_i * \varepsilon_{iI}.$$

Остання формула заснована на припущенні, що випадкові відхилення прибутковостей цінних паперів не є корельованими [7].

Перше рівняння показує, що загальний ризик портфеля складається з двох компонент, аналогічних компонентам загального ризику окремих цінних паперів. Ці компоненти також мають назву ринкового ризику (перший доданок рівняння) та власного ризику (другий доданок).

Диверсифікація (diversification) може привести до зниження загального ризику портфеля. Це відбувається внаслідок скорочення власного ризику портфеля, тоді як ринковий ризик залишається приблизно таким само.

5.7. Ринковий ризик

Загалом, чим більше диверсифікований портфель (чим більша кількість цінних паперів в нього входить), тим менша кожна частка окремого цінного паперу. При цьому значення “β“ портфеля не змінюється суттєвим чином, за винятком випадків, коли спеціально включають до складу портфеля цінні папери з відносно низьким або високим значенням “β“. Так як “β“ портфеля є середнім значенням “β“ цінних паперів, що входять до складу портфеля, то немає підстав вважати, що збільшення диверсифікації портфеля викличе зміну “β“ портфеля і, таким чином, ринкового ризику портфеля в будь-який бік. Таким чином, можна стверджувати, що диверсифікація призводить до усереднення ринкового ризику.

Цей висновок має важливе значення, оскільки у випадку поганого або доброго економічного прогнозу більшість цінних паперів впадуть або збільшаться у ціні. Незважаючи на рівень диверсифікації портфеля, завжди можна очікувати, що такі ринкові явища будуть впливати на прибутковість портфеля.

5.8. Власний ризик портфеля

Інша ситуація виникає, коли розглядається власний ризик портфеля. В портфелі деякі цінні папери можуть зростати в ціні в результаті появи неочікуваних “добрих” новин, що стосуються фірм, які випустили цінні папери (наприклад, придбання патенту). Інші цінні папери впадуть у ціні внаслідок появи “поганих” новин з відповідної фірми (наприклад, аварія). У майбутньому можна стверджувати, що кількість фірм, про які стануть відомі добрі новини, приблизно буде дорівнювати кількості фірм, про які з‘являться погані новини. Це приведе до невеликої очікуваної чистої взаємодії на прибутковість добре диверсифікованого портфеля. Це означає, що чим більше диверсифікується портфель, тим меншим стає власний ризик, і відповідно, загальний ризик портфеля. Така величина може бути точно обрахована, якщо ввести припущення про некорельованість випадкових відхилень прибутковостей. Розглянемо ситуацію: припустимо, що у всі цінні папери інвестована однакова кількість грошей, тоді частка Xi складе (1/N), а рівень власного ризику портфеля буде дорівнювати:

$$\sigma^2_{\varepsilon p} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{N} \right]^2 * \sigma^2_{\varepsilon i},$$

або

$$\sigma^2_{\varepsilon p} = \frac{1}{N} * \left[\frac{\sigma^2_{\varepsilon 1} + \sigma^2_{\varepsilon 2} + \ldots + \sigma^2_{\varepsilon N}}{N} \right].$$

Значення, що знаходиться у квадратних дужках останнього рівняння, є середнім власним ризиком цінних паперів, що складають портфель. Диверсифікація суттєво зменшує власний ризик.

5.9. Задача оцінки “ціни ризику” утримання портфеля цінних паперів

На основі моделі У. Шарпа може поставити таке завдання: дослідити зміни “ціни ризику” при зміні очікуваної прибутковості на акції, що входять до складу портфеля [8]. Для розв’язання задачі використовують те, що прибутковість акції і ціна ризику можуть бути обчислені:

$$r_i = Y + \beta_i * \left(r_p - Y \right), i = \overline{1, N},$$

$$\beta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma^2_p},$$

$$\lambda = \frac{r_p - Y}{\sigma_p}.$$

6. Задача про побудову неперервної математичної моделі фінансового ринку

Проблема оптимальності портфеля із змішаною структурою найповніше може бути розглянута у вигляді неперервної моделі фінансового ринку.

$$dB_t = r * B_t * dt;$$

$$dS_t = \mu(S_t) * dt + \rho * dW_t,$$

$$X_{t^*} = \beta * B_{t^*} + \gamma * S_{t^*},$$

$$X_{t^*} \to \max.$$

Застосування математичних методів чисельного моделювання дає можливість розв'язувати так сформульовані задачі пошуку оптимального портфеля.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Завдання 1. Модель Марковиця. Ефективна та допустима множина цінних паперів

1. Використовуючи математичні методи та методи чисельного моделювання на основі офіційної інформації із сайта pfts. com. ua, побудувати допустиму та ефективну множину портфеля акцій.
2. Використовуючи математичні методи та методи чисельного моделювання на основі офіційної інформації із сайта pfts. com. ua, побудувати допустиму та ефективну множину портфеля акцій та облігацій

Завдання 2. Аналіз складових динамічної моделі формування ціни акції

1. Використовуючи математичні методи апроксимації функцій, побудувати графічне уявлення функції інфляції та індексу фондового ринку.
2. Дослідити характер випадкового процесу, що присутній у правій частині динамічної моделі формування ціни акції.

Завдання 3. Дослідження та аналіз динамічної моделі формування портфеля акцій

1. Сформулювати математично принципи, які можуть лягти в основу динамічної моделі формування портфеля цінних паперів.
2. Побудувати чисельну процедуру для розв'язання задачі про диверсифікацію портфеля акцій.

Завдання 4. Методи оцінювання ризику у фінансовому аналізі

1. Здійснити порівняльний аналіз сучасних методів оцінювання ризику у портфельному аналізі.
2. Застосування методів VAR та CVAR при оцінюванні ризику портфеля цінних паперів однорідної та змішаної структури.

Завдання 5. Методи теорії керування у портфельному аналізі

1. Застосування принципу максимуму при розв'язанні задач портфельного інвестування.
2. Застосування методу динамічного моделювання при розв'язанні задач портфельного інвестування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Кемпбелл Р. Макконел, Стенли Л. Брю.* Экономикс: принципы, проблемы и политика: Пер. с англ. 11-го изд. — К.: Хагар-Демос, 1993. — 785 с.
2. *Шарп У. и др.* Инвестиции — М.: ИНФРА-М, 1997. — 1024 с.
3. *И. В. Бейко, Б. Н. Бублик, П. Н. Зинько* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. — К.: Вища шк., 1983. — 513 с.
4. *Harry M. Markowitz*, Portfolio Selection. — Journal of Finance, 7. — No. 1 (March 1952). — P.77–91.
5. "*Управление* инвестициями" (под эгидой Британского фонда Ноу-Хау) подготовлено компанией Кадоган Файненшенал (Лондон). — К., 1996. — 160 с.
6. *Zoutendijk G.* Nonlinear programming, computational methods. Integer and Nonlinear Programming / Ed. J. Abadie. — Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1970. — P.120.
7. *Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В.* Теория вероятностей: Учебник. — К.: Вища шк., 1990. — 328 с.: ил.

8. *Бондарев Б. В., Шурко И. Л.* Финансовая математика: Учеб. пособие. — Донецк: Кассиопея, 1998. — 164 с.
9. *Damien Lamberton, Bernard Lapeyre*. Introduction to stochastic calculus applied to finance. — Chapman&Hall., GB,1997. — 185 p.
10. *Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г.* Структурно-параметрическая оптимизация. – К.: Вища шк., 1987. — 280 с.
11. *Попов Ю. Д.* Линейное и нелинейное программирование: Учеб. пособие. — К., 1998. — 189 с.
12. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — 4-е изд. — Минск, 1974. — 767 с.

Додаткова

13. *Бейко И. В., Бейко М. Ф.* Численные методы решения задач оптимального управления. — К., 1970.
14. *Гальперин В. М., Игнатьев С. М., Моргунов В. И.* Микроэкономика: В 2 ч. — М.: Эконом. шк., 1998. — 503 с.
15. *Гаращенко Ф. Г., Панталиенко Л. А.* Анализ и оценка параметрических систем на основе методов практической устойчивости. // Пробл. упр. и информатики. — 1996. — № 1/2. — С.145–161.
16. *Будак Б. М. Васильев Ф. П.* Приближенные методы решения задач оптимального управления: В 2 ч.— М.,— 1969.
17. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980. — 520 с.
18. *Бублик Б. Н. Кириченко Н. Ф.* Основы теории управления. — К. Вища шк., 1975. — 328 с.
19. *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966. — 176 с.
20. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленко*
Комп'ютерне верстання *І. О. Музика*

Зам. № ВКЦ-4239

Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк трафаретний ротаційний.
Тираж 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП "Видавничий дім "Персонал"
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008 р.