МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

Методичні матеріали
щодо забезпечення самостійної роботи студентів
з дисциплін

“МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ” “МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ“

(для бакалаврів, спеціалістів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2010

Підготовлено професором кафедри прикладної математики та програмування *І. В. Бейком* і доцентом кафедри прикладної математики та програмування *П. М. Зіньком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 10 від 19.06.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Бейко І. В., Зінько П. М. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисциплін “Математичні методи дослідження операцій” і “Математичні методи для прийняття рішень” (для бакалаврів, спеціалістів). — К.: ДП “Вид. дім “Персонал”, 2010. — 34 с.

Методичка містить пояснювальну записку, зміст дисципліни, основні питання дослідження операцій і прийняття рішень, що виносяться для самостійної роботи, а також список літератури.

Для самостійної роботи студентів денної та заочної форм навчання.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета навчально-методичних матеріалів для самостійної роботи студентів з дисциплін ”Математичні методи дослідження операцій” і “Математичні методи прийняття рішень” — допомогти студентам опанувати методи розв’язування задач дослідження операцій і прийняття рішень з використанням сучасного математично-комп’ютерного інструментарію. Студенти виконують самостійну роботу в бібліотеках, навчальних кабінетах, комп’ютерних класах та в домашніх умовах. Самостійна робота організується, планується і спрямовується як індивідуальна особиста творча праця з наданням студенту індивідуальних консультацій та допомоги з боку викладачів і фахівців деканату.

Самостійна робота — це практичні заняття, опрацювання конспектів лекцій, літературних джерел, робота в бібліотеках, зокрема електронних.

Отже, крім вивчення навчального матеріалу за підручниками і навчальними посібниками, самостійна робота включає також і підготовку доповідей, рефератів, написання курсових робіт; здійснення пошукової і науково-дослідної роботи та самотестування з метою поглибленого опанування навчальним матеріалом, теоретичними знаннями та навичками їх практичного застосування, зокрема для поглиблення знань і вмінь, необхідних для кваліфікованого фахівця.

Завдання викладача на аудиторних заняттях — вміло подати студентам базові концептуальні знання та навчити їх самостійно здобувати нові знання з найважливіших концептуальних теоретичних основ дисципліни.

Вивчення курсу включає лекції і практичні завдання. Лекційний матеріал сприяє опануванню новими знаннями, акцентуючи увагу на вузлових питаннях навчальної дисципліни. При підготовці до практичних занять студент вдається до конспектів лекцій, опрацьовує рекомендовані підручники, навчальні посібники та програмно-методичне забезпечення для комп’ютеризованого навчання, а також навчальні та довідкові матеріали, розміщені в фондах та архівах мережі Інтернет, зокрема в інформаційно-пошукових системах yahoo, google, ipl тощо. Студенти набувають навичок знаходити в Інтернет-пошукових системах необхідну інформацію, яка зазвичай розподіляється за тематичними розділами і автоматично видається на запити за відповідними ключовими словами.

ЗМІСТ
дисциплін
“МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ” І “МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ”

Тема 1. Основні принципи і задачі дослідження операцій та прийняття рішень

Приклади задач дослідження операцій і прийняття рішень. Принципи та проблеми в задачах дослідження операцій і прийняття рішень. Проблема неповних даних і прийняття рішень за умов неповних даних. Математичні моделі прийняття рішень: множина альтернатив, множина станів природи, таблиці збитків, стратегії прийняття рішень, оцінювання очікуваних результатів.

Література [1—3; 7; 10]

Тема 2. Критерії оптимальності за умов невизначеності та ризику

Критерії оптимальності з урахуванням ризику за умов невизначеності. Критерії Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца. Обробка експертної інформації.

Література [2; 5; 7; 9; 11]

Тема 3. Основні математичні задачі дослідження операцій для прийняття оптимальних рішень

Визначення критеріїв оптимальності та відносної корисності альтернатив у задачах про прийняття рішень. Прийняття рішень за умов ризику. Кількісні оцінки ризику. Лінійні задачі в дослідженні операцій. Задача оптимального використання ресурсів при плануванні робіт. Приклади задач з прийняття рішень в управлінні виробництвом. Методи розв’язування задач лінійного програмування. Симплексний метод. Двоїсті задачі. Теореми двоїстості. Приклади ефективного розв’язання двоїстої задачі. Використання ЕОМ для розв’язування задач лінійного програмування. Засоби EXCEL та MathCad для розв’язання задач лінійного програмування.

Література [1–8;10]

Тема 4. Математичні методи цілочислового програмування

Метод відтинаючих площин (метод Гоморі) для розв'язання лінійної задачі цілочислового програмування. Метод гілок та границь. Приклади розв'язання задачі оптимального завантаження обладнання підприємств за методом гілок і границь.

Література [1—3; 6; 7; 9; 10]

Тема 5. Транспортні задачі і задачі комівояжера

Модель транспортної задачі, початковий розподіл постачання. Метод потенціалів. Задачі оптимального призначення. Задачі комівояжера. Використання методу Монте-Карло у розв'язанні задачі комівояжера. Метод намірів та реалізацій для задачі комівояжера.

Література [1; 2; 4; 5; 7]

Тема 6. Методи розв'язання нелінійних задач дослідження операцій

Метод множників Лагранжа. Задачі нелінійного програмування з обмеженнями типу нерівностей. Задачі квадратичного програмування.

Література [1—4; 7; 9; 10; 12]

Тема 7. Чисельні методи ітераційного розв'язання задач дослідження операцій

Градієнтні методи. Метод штрафних функцій. Методи змінної метрики. Методи можливих напрямів. Метод проекції градієнта Розена. Узагальнений градієнтний метод.

Література [1; 3; 4; 7; 10; 12]

Тема 8. Методи динамічного програмування

Динамічні моделі у задачах з прийняття рішень. Оптимальне управління портфелем фінансових активів. Особливості обчислювального методу динамічного програмування. Динамічне програмування для задач з декількома змінними. Задачі керування запасами. Динамічні задачі управління запасами. Задачі динамічного програмування на мережах.

Література [1; 2; 4; 7; 9; 10]

Тема 9. Методи стохастичного програмування

Одно- та двоетапні задачі стохастичного програмування. Методи проектування стохастичних квазіградієнтів. Практичні застосування методу стохастичних квазіградієнтів.

Література [3; 7; 11; 13]

Тема 10. Методи декомпозиції для розв'язування задач великої вимірності

Метод декомпозиції Данціга-Вульфа. Декомпозиція на основі розділення змінних. Метод декомпозиції на основі агрегування в задачах великої розмірності.

Література [1; 3; 7; 12]

Тема 11. Задачі дослідження операцій і прийняття рішень в системах масового обслуговування

Аналіз системи масового обслуговування. Багатоканальні системи МО з відмовами та очікуванням. Системи масового обслуговування "оператори — апаратно-програмний комплекс".

Література [2; 7—10]

Тема 12. Багатоцільові задачі прийняття рішень в ієрархічно керованих системах

Невизначеність цілей та множина Парето. Пріоритет і його числове відображення. Система керування за допомогою штрафів і премій. Класи задач прийняття багатоцільових рішень за умов невизначеності та ризику. Проблеми прийняття рішень в ігрових ситуаціях. Ігри з природою. Роль інформованості першого гравця про вибір другої сторони. Ієрархічно керовані системи. Принцип гарантованого результату. Про систему оптимальної децентралізації управління. Двохрівневі ієрархічні системи керування.

Система оптимального ціноутворення. Система територіально-галузевого керування. Керування ієрархічними системами за умов неповних даних. Оптимальне фінансування у динамічній фінансово-економічній системі.

Література [1–4; 7–10]

ОСНОВНІ ПИТАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- Критеріальний підхід до вибору альтернатив.
- Побудова нормалізованих мультикритеріїв для прийняття рішень. Суперкритерії.
- Метод головного частинного критерію.
- Метод послідовних поступок.
- Пошук альтернативи із заданими властивостями.
- Метод бажаної точки.
- Прийняття гарантованих рішень за умов невизначеності. Оптимальна в середньому альтернатива.
- Приклади задач багатокритеріальної оптимізації. Задача проектування оптимального програмного комплексу. Трьохрівнева задача керування гнучким автоматизованим виробництвом.
- Оптимізація в системах з ієрархічною структурою. Принцип гарантованого результату.
- Розв'язування задач про прийняття рішень в ієрархічно-керованих системах за умов доброзичливості. Задача розподілу ресурсів. Задача управління економічною системою за допомогою штрафів і заохочень.

Знання, які потрібно набути самостійно:

- Мультикритерії і суперкритерії для прийняття рішень.
- Метод частинних критеріїв та послідовних поступок.
- Гарантовані та оптимальні в середньому рішення за умов невизначеності.
- Задача проектування оптимального програмного комплексу.
- Задача керування гнучким автоматизованим виробництвом.
- Оптимальні управлінські рішення в системах з ієрархічною структурою. Задача оптимального розподілу ресурсів.
- Методи підвищення ефективності управління за допомогою штрафів і заохочень.

Уміння, які потрібно набути самостійно:

- Розв'язувати задачі про прийняття оптимальних рішень за умов багатокритеріальності.
- Знаходити альтернативи із заданими властивостями.
- Розв'язувати задачі про прийняття оптимальних управлінських рішень за умов невизначеності.
- Розв'язувати практичні задачі дослідження операцій та прийняття управлінських рішень за умов багатокритеріальності та

неповних даних (задачі з проектування програмних комплексів; задачі керування гнучким автоматизованим виробництвом).

- Оптимізувати управління ієрархічно керованими системами на основі оптимального договору.
- Розв'язувати практичні задачі про прийняття рішень в ієрархічно-керованих системах (задачі з розподілу ресурсів в ієрархічно керованих системах; управління за допомогою штрафів і заохочень).

Індивідуальні завдання

Тип завдання: опанування методами та алгоритмами розв'язування задач з дослідження операцій і прийняття оптимальних управлінських рішень; ознайомлення та опрацювання тематичної літератури; розробка алгоритмів і програм для розв'язування задач з дослідження операцій; проведення числових експериментів для оптимізації управлінських рішень.

Мета завдання: поглиблення теоретичних знань студентів та набуття навичок їх практичного використання шляхом творчої самостійної роботи над індивідуальними завданнями з залученням методів і алгоритмів для розв'язування задач з дослідження операцій і прийняття оптимальних управлінських рішень.

Самостійна робота: опанування знаннями про методи розв'язання задач з дослідження операцій і прийняття оптимальних управлінських рішень; аналіз отриманих результатів під час індивідуально проведених теоретичних досліджень і практичних обчислень в ході експериментів.

- **Ключові терміни:** *дослідження операцій, прийняття рішень, множина допустимих альтернатив, неповні дані, бегатокритеріальна оптимізація, ієрархічно керовані системи.*

ОСНОВНІ ПИТАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

1. Критеріальний підхід до вибору альтернатив

Прийняття рішень — це вибір однієї з-поміж багатьох допустимих альтернатив, його здійснює уповноважений керівник чи колектив. Для порівняння альтернатив і вибору серед них отимальної використовують *критерій оптимальності,* або *критерій переваг.* Суть критеріального підходу полягає в кількісному (числовому) оцінюванні корисності кожної альтернативи. При цьому порівняння альтернатив зводиться до порівняння відповідних їм чисел.

Нехай X є заданою множиною допустимих альтернатив x. Задану на множині X функцію $f(x)$, з властивістю

"якщо альтернатива x_1 переважає альтернативу x_2, то $f(x_1) > f(x_2)$ і навпаки"

називають *критерієм оптимальності* (*переваг, якості, цільовою функцією, функцією переваг, функцією корисності* тощо). За таким критерієм вибирають *оптимальну* альтернативу x^* як розв'язок задачі оптимізації (1.1):

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f(x). \tag{1.1}$$

Проте реально альтернативи оцінюють не за одним, а за багатьма критеріями. Наприклад, при проектуванні літака важливими критеріями вважають:

- *технічні критерії*: висота польоту, швидкість, вантажопідйомність, необхідна довжина злітно-посадочної смуги, тривалість польоту, вага літака і т. д.;
- *економічні критерії*: затрати на виробництво, експлуатацію і обслуговування, конкурентоздатність;
- *екологічні критерії*: рівень шуму, забруднення атмосфери;
- *ергономічні критерії*: умови роботи екіпажу, рівень комфорту пасажирів і т. д.

У загальному випадку кожна окрема альтернатива x оцінюється за допомогою вибраних m критеріїв $f_i(x),\ i = \overline{1,m}$.

2. Нормалізований мультикритерій

Спрощені процедури вибору найкращої з альтернатив засновані на введенні *нормалізованого мультикритерію* $f_i'(x),\ i = \overline{1,m}$, приведеного до однієї розмірності. Способами побудови нормалізованих мультикритеріїв є, зокрема:

а) приведення всіх критеріїв до їх безрозмірного числового значення

$$f_i'(x) = f_i(x) / \rho(f_i(x)),$$

де $\rho(\cdot)$ — функція вибраного приведення до безрозмірної величини;

б) зведення до однієї розмірності

$$f_i'(x) = f_i(x)/\alpha(i),$$

де $\alpha(i)$ – деяка вагова функція;

в) зміна напрямку (інгредієнта)

$$f_i'(x) = -f_i(x) \text{ або } f_i'(x) = 1/f_i(x);$$

г) природний

$$f_i'(x) = \frac{f_i(x) - f_{\min}(x)}{f_{\max}(x) - f_{\min}(x)},$$

де $f_{\min}(x) = \min\limits_{i \in \overline{1,m}} f_i(x)$, $f_{\max}(x) = \max\limits_{i \in \overline{1,m}} f_i(x)$;

д) порівняння

$$f_i'(x) = f_i(x)/\max_{x \in X} f_i(x);$$

е) усереднення

$$f_i'(x) = f_i(x)/\sum_{i=1}^{m} f_i(x).$$

Припустимо, що в множині X існує альтернатива $\bar{x}$, яка може набути найбільше значення серед усіх m критеріїв:

$$f_i(\bar{x}) > f_i(x),\ i = \overline{1,m}, \text{ для всіх } x \in X. \tag{1.2}$$

Тоді ця альтернатива $\bar{x}$ є найкращою і проблеми вибору не існує. На практиці такі випадки малоймовірні. Реальнішою є ситуація, коли найбільших значень критерії досягають за різних альтернатив. Розглянемо основні підходи до розв'язування багатокритеріальних задач.

3. Суперкритерій

Зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної здійснюється введенням *суперкритерію*, тобто скалярної функції векторного аргументу

$$f_0(x) = \bar{f}_0\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\right). \tag{1.3}$$

Після згортки розв'язується звичайна оптимізаційна задача:

знайти $x^* = \arg\max\limits_{x \in X} f_0(x)$ $\left(x^* = \arg\min\limits_{x \in X} f_0(x)\right)$.

Наведемо приклади найуживаніших згорток:

а) лінійна

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(i) f_i(x);$$

б) максимізаційна

$$f_0(x) = \max_{i \in \overline{1,m}} [\alpha(i) f_i(x) + \beta(i)];$$

в) мінімізаційна

$$f_0(x) = \min_{i \in \overline{1,m}} [\alpha(i) f_i(x) + \beta(i)];$$

г) мультиплікативна

$$f_0(x) = \prod_{i=1}^{m} \alpha(i) f_i(x);$$

д) Кобба — Дугласа

$$f_0(x) = \prod_{i=1}^{m} [\alpha(i) f_i(x)]^{\beta(i)},$$

де $\alpha(i)$, $\beta(i)$, $i = \overline{1,m}$ — задані функції натурального аргументу i, $i = \overline{1,m}$.

Вкажемо на недоліки, пов'язані з використанням суперкритерію:

- важко обґрунтувати використання певного типу згортки;
- існує проблема вибору параметрів згортки — функцій $\alpha(i)$, $\beta(i)$, $i = \overline{1,m}$;
- незначна зміна функції, яка визначає згортку, призводить до значних відхилень розв'язків задачі багатокритеріальної оптимізації.

4. Метод головного частинного критерію

Наведені вище недоліки згортання декількох критеріїв обумовили появу інших підходів до розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації. Один із них полягає у використанні того факту, що частинні критерії нерівнозначні між собою, через те виділяють *основний, головний критерій* $f_{i_0}(x)$, а решту критеріїв вважають *додатковими*. Головний критерій максимізують при умові, що додаткові критерії залишаються на заданих їм рівнях. Розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації знаходять як розв'язок задачі на умовний екстремум:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f_{i_0}(x) \qquad (1.4)$$

при обмеженнях

$$f_i(x) = c_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, i_0 - 1, i_0 + 1, \ldots, m. \qquad (1.5)$$

В багатьох практичних задачах обмеження (1.5) на додаткові критерії формулюються не у формі рівностей, а у формі нерівностей (наприклад, якщо додаткові критерії характеризують вартість витрат, то замість фіксації витрат розумніше задавати їх верхній рівень) і в результаті приходимо до задачі:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f_{i_0}(x) \quad (1.6)$$

при обмеженнях

$$f_i(x) \le c_i, \;\; i = 1, 2, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., m. \;\; (1.7)$$

5. Метод послідовних поступок

У методах оптимізації (1.4–1.5) і (1.6–1.7) різниця між основним і додатковим критеріями виглядає досить сильною. В методі *послідовних поступок* (який наводиться нижче) ця різниця дещо пом'якшується. Припускається, що критерії пронумеровані у порядку їх важливості, так що $f_1(x)$ – найважливіший з критеріїв, а $f_m(x)$ – найменш важливий. На першому кроці розв'язується задача мінімізації критерію $f_1(x)$:

$$x_1^* = \arg\max_{x \in X} f_1(x).$$

Нехай $f_1^{\max} = f_1(x_1^*)$. З практичних міркувань та прийнятої точності визначається поступка $\Delta_1 > 0$ (тобто величина, на яку зменшується досягнуте значення $f_1^{\max}$ найбільш важливого критерію, щоб за рахунок поступки постаратися, наскільки це можливо, збільшити значення наступного за важливістю критерію $f_2(x)$) і розв'язується задача оптимізації:

$$x_2^* = \arg\max_{x \in X} f_2(x)$$

при обмеженнях

$$f_1(x) \ge f_1^{\max} - \Delta_1.$$

Визначається $f_2^{\max} = f_2(x_2^*)$ і поступка $\Delta_2 > 0$.

На k -му кроці розв'язується задача:

$$x_k^* = \arg\max_{x \in X} f_k(x)$$

при обмеженнях

$$\begin{gathered} f_1(x) \ge f_1^{\max} - \Delta_1, \\ f_2(x) \ge f_2^{\max} - \Delta_2, \\ \dots \\ f_{k-1}(x) \ge f_{k-1}^{\max} - \Delta_{k-1}. \end{gathered}$$

Якщо значення x_m^* задовільне, то його приймають за розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації, інакше переходять на перший крок, змінюючи (збільшуючи) Δ_1 і т. д.

6. Пошук альтернативи із заданими властивостями

Третій підхід багатокритеріального вибору відноситься до того випадку, коли завчасно можуть бути вказані бажані значення частинних критеріїв (або їх границі), і задача полягає в тому, щоб знайти альтернативу, яка задовольняє цим вимогам, або встановити, що такої альтернативи у множині X не існує і вказати альтернативу, яка підходить до поставленої цілі ближче за все.

Бажані значення критеріїв $\bar{f}_i,\ i=\overline{1,m}$ задають або точно, або у вигляді верхніх чи нижніх границь. Значення $\bar{f}_i,\ i=\overline{1,m}$ називають *рівнями вимог*, а точку їх перетину x^* в m-вимірному просторі критеріїв *ціллю* (*опорною точкою,* чи *ідеальною точкою*). Так як рівні вимог задаються без точного знання структури множини X, то цільова точка може лежати як всередині, так і поза множиною X (досяжна чи недосяжна ціль). Оптимізаційна задача полягає в побудові послідовності альтернатив $x^k,\ k=0,1,\ldots$, яка в границі наближалася б до x^*. Для цього вводиться числова міра близькості між альтернативою x і ціллю x^*, тобто між векторами $f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_m(x)\right)$ і $\bar{f}=(\bar{f}_1,\bar{f}_2,\ldots,\bar{f}_m)$. У роботі [9] використовується така функція відстані

$$d_k(x)=\bar{d}_k\left(f(x),\bar{f}\right)=\left[\sum_{i=1}^{m} w_i\left|f_i(x)-\bar{f}_i\right|^k\right]^{1/k},$$

де параметр $k\in \mathrm{N}$, $w_i,\ i=\overline{1,m}$ — вагові коефіцієнти.

В роботі [48] використовується така функція відстані

$$d(x)=\bar{d}\left(f(x),\bar{f}\right)=\min_{i\in\overline{1,m}}\alpha_i\left(f_i(x)-\bar{f}_i\right)+\alpha_{m+1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(f_i(x)-\bar{f}_i\right),$$

причому робиться припущення про невід'ємність різниці $f_i(x)-\bar{f}_i,\ i=\overline{1,m};$ $\alpha_i,\ i=\overline{1,m}$ — коефіцієнти, які приводять доданки до однакової розмірності і одночасно враховують різну важливість критеріїв; коефіцієнт α_{m+1} виражає відношення до того, що важливіше — зменшити близькість до цілі будь-якого із частинних критеріїв чи сумарну близькість всіх критеріїв до цільових значень.

У випадку, коли частина бажаних значень критеріїв є обмеженнями частинних критеріїв знизу

$$f_i(x) \geq \bar{f}_i,\ i = 1,2,..,m',$$

інша частина є обмеженням зверху

$$f_i(x) \leq \bar{f}_i,\ i = m'+1,..,m'',$$

а решту обмежень виконують як рівності

$$f_i(x) = \bar{f}_i,\ i = m''+1,..,m,$$

то функцію відстані можна вибирати в такому вигляді

$$d(x) = \bar{d}\left(f_i(x), \bar{f}\right) = \min_{i \in \overline{1,m}} F\left(f_i(x), \bar{f}_i\right) + \alpha_{m+1} \sum_{i=1}^{m} F\left(f_i(x), \bar{f}_i\right),$$

де

$$F\left(f_i(x), \bar{f}_i\right) = \begin{cases} \alpha_i\left(f_i(x) - \bar{f}_i\right), & \text{якщо } > 1 \leq i \leq m', \\ \alpha_i\left(\bar{f}_i - f_i(x)\right), & \text{якщо } > m'+1 \leq i \leq m'', \\ \alpha_i \min\left\{f_i(x) - \bar{f}_i, \bar{f}_i - f_i(x)\right\}, & \\ & \text{якщо } > m''+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

7. Метод бажаної точки

Для кожного критерію $\bar{f}_i(x),\ i = \overline{1,m}$ розраховується найбільше і найменше його значення на множині альтернатив X:

$$f_i^{\max} = \max_{x \in X} f_i(x)\ ;\ f_i^{\min} = \min_{x \in X} f_i(x),\ i = \overline{1,m}.$$

Далі переходять до нових (нормованих, безрозмірних) критеріїв $w_i(x),\quad i = \overline{1,m}$:

$$w_i(x) = \frac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}},\quad i = \overline{1,m}.$$

На k –му кроці алгоритму на основі аналізу вибираються бажані значення критеріїв:

$$h_i^k \in [f_i^{\min}, f_i^{\max}],\quad i = \overline{1,m}$$

і на цій основі розраховуються значення

$$w_i^k = \frac{f_i^{\max} - h_i^k}{f_i^{\max} - f_i^{\min}},\quad i = \overline{1,m}.$$

Потім обчислюють вагові коефіцієнти нових критеріїв

$$\alpha_i^k = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{m} w_j^k}{\sum_{j=1}^{m} \prod_{l=1, l\neq j}^{m} w_l^k}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Ефективна альтернатива x^k знаходиться як розв'язок однокритеріальної задачі

$$x^k = \arg\max_{x \in X} \min_{\underline{i=1,m}} \alpha_i^k w_i(x).$$

У знайденій точці x^k обчислюється значення всіх критеріїв

$$\left(f_1(x^k), f_2(x^k), ..., f_m(x^k)\right).$$

Якщо цей вектор значень критеріїв задовольняє особу, яка приймає рішення, то x^k – шукана альтернатива; інакше здійснюється перехід на $(k+1)$-й крок, тобто на основі аналізу вибираються нові бажані значення критеріїв h_i^{k+1}, $i = \overline{1,m}$ і т. д.

8. Прийняття рішень за умов невизначеності

Будемо вважати, що задана функція $\varphi(x,y)$, яка визначена на декартовому добутку множин X та Y, де X — множина альтернатив, а Y — множина неконтрольованих факторів (збурень). Функція (критерій) $\varphi(x,y)$ характеризує якість альтернативи $x \in X$ при певному значенні неконтрольованих факторів $y \in Y$. Вважаємо, що критерій $\varphi(x,y)$ виражений в позитивному інгредієнті й характеризує позитивну якість стратегії x (наприклад прибуток, дохід, інтегральний рівень життя тощо), тому задача прийняття рішень полягає у виборі альтернативи x, яка буде робити в деякому розумінні критерій "більшим" при різних $y \in Y$.

Якщо неконтрольовані фактори фіксовані, тобто множина Y складається із одного елемента y^0, $Y = \{y^0\}$ (такі одноелементні множини називають синглетонами), то пошук найкращої альтернативи це звичайна оптимізаційна задача знаходження вектора $x^* \in X$, для якого критерій $\varphi(x^*, y^0)$ приймає максимальне можливе значення.

Якщо неконтрольованих факторів багато, тоді можливий варіант, коли найкраща альтернатива для одного неконтрольованого фактора буде найгіршою для іншого неконтрольованого фактора. В такому випадку найчастіше використовуються такі дві оцінки ефективності альтернатив: *гарантовані* $\Phi(x)$ та *середні* $S(x)$.

Гарантована оцінка $\Phi(x)$ ефективності альтернатив орієнтована на найгіршу дію неконтрольованих факторів

$$\Phi(x) = \min_{y \in Y} \varphi(x,y)\,. \qquad (1.8)$$

У тому випадку, коли критерій $\varphi(x,y)$ виражений у негативному інгредієнті (характеризує, наприклад, штрафи, витрати, забруднення тощо), то гарантована оцінка теж орієнтована на найгіршу дію неконтрольованих факторів і має вигляд

$$\Phi(x) = \max_{y \in Y} \varphi(x,y)\,. \qquad (1.9)$$

Оптимальну гарантовану альтернативу $\bar{x}^*$ можна обчислити, розв'язуючи максимінну задачу

$$\Phi(\bar{x}^*) = \max_{x \in X} \Phi(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \varphi(x,y)$$

у випадку (1.8), і розв'язуючи мінімаксну задачу

$$\Phi(\bar{x}^*) = \min_{x \in X} \Phi(x) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} \varphi(x,y)$$

у випадку (1.9).

Для знаходження середньої оцінки ефективності $S(x)$ усереднюють значення критерію ефективності $\varphi(x,y)$ по всіх значеннях неконтрольованих факторів y, $y \in Y$. Спочатку припустимо, що множина неконтрольованих факторів Y складається із скінченого набору

$$Y = \{y^i, \quad i = \overline{1,m}\}\,. \qquad (1.10)$$

Тоді середня оцінка визначається формулою

$$S(x) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \varphi(x, y^i), \qquad (1.11)$$

де ρ_i, $i = \overline{1,m}$ — вагові коефіцієнти (в основному їх вибирають із таких умов:

$$\rho_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,m}\ ;\ \sum_{i=1}^{m} \rho_i = 1\ ).$$

Якщо множина неконтрольованих факторів злічена (тобто в рівності (1.10) $m \to \infty$), тоді вагові коефіцієнти ρ_i, $i = 1,2,...$ вибираються таким чином, щоб ряд (1.11) збігався.

Розглянемо третій випадок, коли множина неконтрольованих факторів Y є проміжком дійсної осі (скінченим чи нескінченим). Тоді середня оцінка ефективності $S(x)$ визначається таким співвідношенням

$$S(x) = \int_Y \rho(y) \varphi(x,y)\, dy\,, \qquad (1.12)$$

де вагова функція $\rho(y)$ задовольняє умовам:

$$\rho(y) \geq 0, \; y \in Y; \; \int\limits_Y \rho(y)dy = 1 .$$

Оптимальною у середньому називається альтернатива x^*, яка задовольняє умову

$$S(x^*) = \max_{x \in X} S(x) .$$

Зрештою відзначимо, що оптимальні альтернативи у середньому використовують і тоді, коли неконтрольовані фактори є випадковою величиною чи випадковим вектором. Критерій ефективності є випадковою величиною $\varphi(x,y)$, а за осереднену оцінку альтернативи x приймають математичне сподівання

$$E_y \varphi(x,y) = S(x) .$$

При цьому $S(x)$ задається:

формулою (1.11) при умові, що неконтрольований випадковий фактор y набуває значення y^i з імовірністю ρ_i;

формулою (1.12), коли неконтрольований фактор y є випадковою величиною із щільністю розподілу $\rho(y)$ на проміжку Y .

9. Приклади постановок задач багатокритеріальної оптимізації

9.1. Задача проектування оптимального програмного комплексу

При проектуванні програмного комплексу (ПК) необхідно забезпечити виконання декількох вимог: зменшити вартість ПК, збільшити точність задавання вхідних даних, скоротити об'єм оперативної пам'яті, зменшити час роботи ПК, зменшити завантаження каналів зв'язку між ЕОМ і зовнішніми запам'ятовуючими пристроями і т. д. Припускається, що ПК повинен реалізувати множину операцій $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Під операцією розуміється, наприклад, розв'язування лінійних чи нелінійних алгебраїчних рівнянь, систем лінійних чи нелінійних диференціальних рівнянь, знаходження екстремумів функцій певного типу, сортування інформації, пошук інформації і т. д.

Кожна із операцій $a_i \in a$ може бути реалізована будь-якою програмою із заданої множини $P_i = \left(p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{ik_i}\right)$, $i = \overline{1,n}$. Кожна програма p_{ij} характеризується своїми ознаками, які впливають на вимоги до ПК. Програмний комплекс являє собою набір програм $P = \left(p_{1j_1}, p_{2j_2}, ..., p_{nj_n}\right)$, де $p_{ij_i} \in P_i$, $i = \overline{1,n}$.

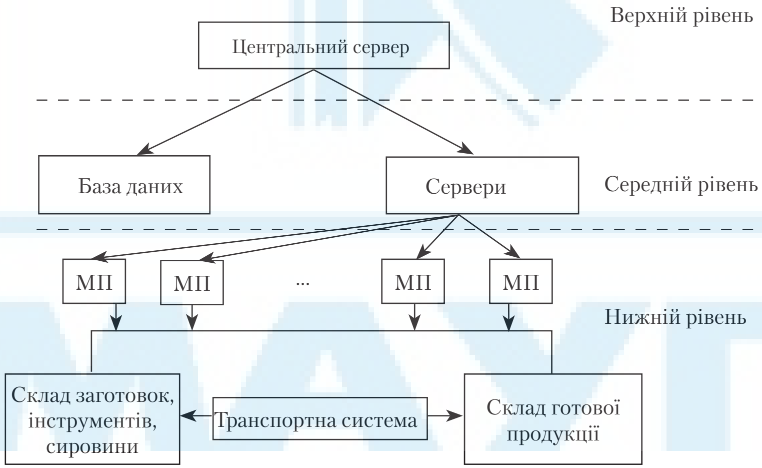
Для оцінки якості програмного комплексу $P=\left(p_{1j_1},p_{2j_2},\dots,p_{nj_n}\right)$ вводиться векторний критерій $\varphi(P)=\left(\varphi_1(P),\varphi_2(P),\dots,\varphi_m(P)\right)$. Відображення $\varphi: P\to R^m$ задає правило, за яким кожному набору із n програм відповідає векторна оцінка виконання вимог до ПК. Таким чином, задача проектування оптимального програмного комплексу є багатокритеріальною оптимізаційною задачею.

9.2. Трирівнева задача керування гнучким автоматизованим виробництвом

Гнучке автоматизоване виробництво (ГАВ) — це система, що складається з підсистем:

- автоматизовані технологічні модулі (станки, лінії, ділянки);
- автоматизований транспорт;
- автоматизовані склади.

Керування роботою цих підсистем і здійснення зв'язків між ними забезпечує підсистема керування ГАВ (ПК ГАВ). З її допомогою здійснюється запуск, керування і контроль за роботою технологічного обладнання, синхронізація виконуваних робіт, оптимізація завантаження обладнання, формування графіка робіт транспортних засобів, автоматизованих складів і т. д. Найпоширеною ПК ГАВ є трирівнева система керування:



Верхній рівень розв'язує задачі організаційно-економічного характеру й приймає довгострокові рішення: проводить розрахунок позмінних завдань на кожному станку, завдань з технологічної підготовки ділянки; обліковує запас заготовок, інструменту і сировини на складі; накопичує інформацію для різних служб цеху.

Середній рівень здійснює контроль за роботою мікропроцесорних систем (МП); приймає оперативні рішення відповідно до надходжень від підсистем нижнього рівня інформації; виробляє керуючі дії на ці підсистеми.

Нижній рівень забезпечує за допомогою мікропроцесорних систем безпосереднє управління технологічним процесом.

Аналіз і управління роботою ГАВ потребує розв'язування значної кількості оптимізаційних багатокритеріальних задач, задач мережного планування, транспортних задач, задач розміщення і т. д.

10. Задачі з прийняття рішень в управлінні системами з ієрархічною структурою

Системами з ієрархічною структурою називають сукупність підсистем, що мають послідовне вертикальне розташування з встановленим пріоритетом дій і прийняття рішень, причому результати дій підсистем верхнього рівня залежать від дій підсистем нижчих рівнів. На діяльність підсистем будь-якого рівня (крім верхнього) безпосередньо справляють вплив підсистеми, розміщені на вищих рівнях. Успіх дії системи в цілому і кожного рівня залежить від поведінки всіх елементів системи. Поняття пріоритету дій вказує на те, що вплив підсистем верхнього рівня передує діям нищих рівнів. Тому успішність роботи підсистем вищих рівнів залежить не тільки від власних дій, а й від реакцій підсистем нижніх рівнів на цей вплив.

Підсистему найвищого рівня називають центром, а підсистеми більш низьких рівнів — елементами. В системах керування елементам надано право виробляти певні керуючі дії, приймати рішення. Тому поряд з ієрархією системи говорять про ієрархічну структуру керування, яка в складній системі являє собою сукупність рівнів керування, що йдуть один за одним в порядку певного пріоритету. Між елементами різних рівнів ієрархії існують як вертикальні, так і горизонтальні зв'язки.

Поява ієрархічної структури в системах керування і прийняття рішень обумовлена наявністю великого обсягу інформації про керовані процеси в системі, неможливістю його обробки і прийняття рішень одним центром керування, а також існуючою в реальних системах децентралізацією процесу прийняття рішень, коли елементи, які підпорядковуються центру, виробляють керуючі дії, керуючись вказівками центру і з врахуванням власних інтересів.

Розглянемо математичну модель *дворівневої ієрархічної системи керування*. Нехай центру Q_0 підпорядковані елементи системи управління $Q_1, Q_2, ..., Q_m$, які надалі будемо називати підсистемами. Центр Q_0 виробляє керуючу дію $u = \left(u^1, ..., u^m\right)$ і повідомляє її підсистемам нижчого рівня $Q_1, Q_2, ..., Q_m$, які в свою чергу вибирають власні керування $v^1\left(u^1\right), v^2\left(u^2\right), ..., v^m\left(u^m\right)$ із деяких множин допустимих керувань, відповідно, $V^1\left(u^1\right), V^2\left(u^2\right), ..., V^m\left(u^m\right)$, що залежать від вибору керування центром Q_0. Позначимо через U множину допустимих керувань центра Q_0. Керування $u \in U$ будемо називати *допустимим*, якщо для будь-якого $i = \overline{1,m}$ всі множини $V_i\left(u^i\right)$, $i = \overline{1,m}$ не являються порожніми.

Якщо для будь-якого $u \in U$ всі множини $V_i\left(u^i\right)$, $i = \overline{1,m}$ складаються із єдиних керувань, то в цьому випадку центр володіє повною інформацією про реакцію підсистем нижчого рівня на своє керування.

Нехай $\varphi_0\left(u, v\right)$ – критерій оптимальності центра Q_0 (тут $u = \left(u^1, u^2, ..., u^m\right)$, $v = \left(v^1, v^2, ..., v^m\right)$), а $\varphi_i\left(u^i, v^i\right)$, $i = \overline{1,m}$ – критерії оптимальності підсистем $Q_1, Q_2, ..., Q_m$. Центр і підсистеми, вибираючи свої керування, намагаються максимізувати свої критерії. У випадку, коли всі множини $V_i\left(u^i\right)$, $i = \overline{1,m}$ складаються із одного елемента, тобто $V_i\left(u^i\right) = \left\{v_i\left(u^i\right)\right\}$, то центр вибирає своє керування з умови

$$\varphi_0\left(u^*, v\left(u^*\right)\right) = \max_{u \in U} \varphi_0\left(u, v\left(u\right)\right) \quad (1.13)$$

(тут $v\left(u^*\right) = \left(v^1\left(u^{1*}\right), \ldots, v^m\left(u^{m*}\right)\right)$),

а значення критеріїв підсистем будуть такими

$$\varphi_1\left(u^{1*}, v^1\left(u^{1*}\right)\right), \ \varphi_2\left(u^{2*}, v^2\left(u^{2*}\right)\right), ..., \ \varphi_m\left(u^{m*}, v^m\left(u^{m*}\right)\right).$$

Отже, в тривіальному випадку центр, вибираючи оптимальне керування u^* (з погляду центру) однозначно визначає значення критеріїв центру і всіх підсистем.

У загальному випадку природно припускати, що вибір центром Q_0 допустимого керування $u \in U$ визначає не єдине керування кожної підсистеми, тобто кожна із множин $V_i\left(u^i\right)$, $i=\overline{1,m}$ складаються більше ніж із одного елемента. Визначимо множину $G_i\left(u^i\right)$ оптимальних реакцій i-ої підсистеми на керування $u \in U$ центру таким чином:

$$G_i\left(u^i\right)=\left\{v^i \in V_i\left(u^i\right) \mid \varphi_i\left(u^i,v^i\right) \geq \varphi_i\left(u^i,\bar{v}^i\right)\right.$$

$$\left.\forall\, \bar{v}^i \in V_i\left(u^i\right)\right\},\quad i=\overline{1,m}.$$

Якщо множини $G_i\left(u^i\right)$, $i=\overline{1,m}$ не є одноелементними, то центр Q_0, приймаючи певне рішення (вибираючи керування $u \in U$), знаходиться в умовах невизначеності. Роблячи певні припущення про характер реакцій підсистем $Q_1,Q_2,...,Q_m$ на керування u центру Q_0, приходимо до різних постановок задач оптимізації в дворівневих ієрархічних системах.

11. Принцип гарантованого результату

Будемо припускати, що у відповідь на керування $u \in U$ центру Q_0 підсистеми $Q_1,Q_2,...,Q_m$ вибирають управління v^i, $i=\overline{1,m}$, які задовольняють нерівність

$$\varphi_0\left(u,v\right) \leq \varphi_0\left(u,\bar{v}\right)\quad \forall \bar{v}^i \in G_i\left(u^i\right),\ i=\overline{1,m},\quad (1.14)$$

тобто підсистеми $Q_1,Q_2,...,Q_m$ діють найгіршим чином для центру Q_0. Тоді для центру найкращим буде вибір керування $\bar{u} \in U$, яке задовольняє таким співвідношенням

$$\varphi_0\left(\bar{u},\bar{v}\right)=\min_{v \in G\left(\bar{u}\right)} \varphi_0\left(\bar{u},v\right) \geq \min_{v \in G(u)} \varphi_0\left(u,v\right)\quad \forall u \in U, \qquad (1.15)$$

де $G\left(u\right)=\prod_{i=1}^{m} G_i\left(u^i\right).$

Вибір центром Q_0 керування $\bar{u} \in U$ згідно з умовами (1.14)–(1.15) називають *принципом гарантованого результату*.

12. Прийняття рішень в умовах доброзичливості

Якщо припустити, що, проявляючи доброзичливість до центру, підсистеми $Q_1,Q_2,...,Q_m$ у відповідь на керування $u \in U$ центру вибирають найкращі для нього керування $\hat{v}\left(u^i\right)$, $i=\overline{1,m}$, тобто

$$\varphi_0\left(u,\hat{v}\left(u\right)\right)=\max_{v \in G(u)} \varphi_0\left(u,v\right). \qquad (1.16)$$

Тоді природно вважати, що центр Q_0 буде вибирати своє керування $\hat{u}$ з умови

$$\varphi_0\left(\hat{u},\hat{v}\left(\hat{u}\right)\right)=\max_{u\in U}\varphi_0\left(u,\hat{v}\left(u\right)\right)=\max_{u\in U}\max_{v\in G(u)}\varphi_0\left(u,v\right)\cdot \tag{1.17}$$

Оскільки для будь-якого $u \in U$ виконується нерівність

$$\max_{v\in G(u)}\varphi_0\left(u,v\right)\geq \min_{v\in G(u)}\varphi_0\left(u,v\right),$$

то справджується також і наступна нерівність

$$\max_{u\in U}\max_{v\in G(u)}\varphi_0\left(u,v\right)\geq \max_{u\in U}\min_{v\in G(u)}\varphi_0\left(u,v\right),$$

яка стверджує, що діючи за умов доброзичливості центр отримує більше значення критерію, ніж за умов гарантованого результату.

13. Приклади ієрархічних систем керування

13.1. Приклад 1 (Розподіл ресурсів [5, стор. 131])

Адміністративний центр Q_0 розподіляє обмежений об'єм ресурсів між підлеглими йому підрозділами $Q_1,Q_2,...,Q_m$, які використовують цей ресурс для виробництва продукції з урахуванням власних критеріїв.

Нехай центр виділяє для i-го підрозділу набір ресурсів із l найменувань, який позначено вектором $u^i=\left(u_1^i,u_2^i,...,u_l^i\right)$, тобто центр вибирає систему із m векторів

$$u=\left(u^1,u^2,...,u^m\right),$$

які задовольняють умовам

$$u^i\geq 0,\ \ i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m}u^i\leq b,$$

де b – вектор максимально можливих обсягів ресурсів центру. Кожен із підрозділів Q_i, знаючи вибір центру Q_0, визначає вектор $v^i=\left(v_1^i,v_2^i,...,v_n^i\right)$, який задовольняє нерівностям

$$v^iA_i\leq u^i+g^i,\ \ v^i\geq 0,\ \ g^i\geq 0,\ A_i\geq 0. \tag{1.18}$$

тут v^i інтерпретується як виробнича програма підрозділу Q_i по n видах виготовлюваної продукції; A_i — виробнича (технологічна) матриця підрозділу Q_i; g^i — вектор власних ресурсів підрозділу Q_i. Критерій центру Q_0 визначимо таким чином:

$$\varphi_0(u,v) = \varphi_0\left(u^1,...,u^m,v^1\left(u^1\right),...,v^m\left(u^m\right)\right) = \sum_{i=1}^{m}\left\langle a^i, v^i\left(u^i\right)\right\rangle,$$

де $u = \left(u^1,u^2,...,u^m\right)$ — керування центру Q_0; $v^i\left(u^i\right)$ — виробнича програма підрозділу Q_i, яка задовольняє нерівностям (1.18); $a^i = \left(a_1^i,...,a_n^i\right) \geq 0$ — вектор корисності центру Q_0 від продукції, яка випускається підрозділом Q_i; $\left\langle a^i, v^i\left(u^i\right)\right\rangle$ — скалярний добуток векторів a^i та $v^i\left(u^i\right)$.

Критерій i-го виробничого підрозділу Q_i визначимо так:

$$\varphi_i\left(u^i, v^i\left(u^i\right)\right) = \left\langle c^i, v^i\left(u^i\right)\right\rangle, \quad i = \overline{1,m},$$

де $c^i = \left(c_1^i, c_2^i,...,c_n^i\right) \geq 0$ — вектор корисності підрозділу Q_i від своєї продукції. І центр, і кожен i-й підрозділ намагаються максимізувати свій критерій.

Пропонується така процедура прийняття рішення. Нехай $v_*^i\left(u^i\right)$, $i = \overline{1,m}$ — розв'язок задачі параметричного програмування (параметром вважається вектор u^i):

$$v_*^i\left(u^i\right) = \arg\max_{v^i \in G_i\left(u^i\right)} \left\langle c^i, v^i\right\rangle, \tag{1.19}$$

де $G_i\left(u^i\right) = \left\{v^i \mid v^i \geq 0, v^i A_i \leq u^i + g^i, u^i \geq 0, g^i \geq 0\right\}$,

а $u_* = \left(u_*^1, u_*^2,...,u_*^m\right)$ — розв'язок задачі

$$u_* = \arg\max_{u \in U} \sum_{i=1}^{m} \left\langle a^i, v_*^i\left(u^i\right)\right\rangle, \tag{1.20}$$

де $U = \left\{u \middle| u^i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} u^i \leq b\right\}$.

Неважко переконатися в справедливості таких нерівностей:

$$\varphi_0\left(u_*, v^*\left(u_*\right)\right) \geq \varphi_0\left(u, v^*\left(u\right)\right), \quad u \in U, \tag{1.21}$$

$$\varphi_i\left(u_*^i, v_*^i\left(u_*^i\right)\right) \geq \varphi_i\left(u_*^i, v^i\right), \quad v^i \in V^i\left(u_*^i\right), \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.22}$$

Нерівності (1.21, 1.22) вказують на те, що ні центру Q_0, ні підрозділам Q_i, $i = \overline{1,m}$ не вигідно відступати від ситуації

$$\left(u_*^1,...,u_*^m, v_*^1\left(u_*^1\right),...,v_*^m\left(u_*^m\right)\right).$$

Така ситуація в теорії ігор називається *рівновагою за Нешем.*

У цьому прикладі центр впливає тільки на множину допустимих керувань підлеглих підрозділів і не впливає на їх критерії.

13.2. Приклад 2 (Задача нормування шкідливих викидів [5, стор. 133])

Рівень шкідливих викидів у певному регіоні описується скалярною функцією

$$q(v) = q\left(v^1,...,v^m\right) = \sum_{i=1}^{m} a^i v^i, \ \ 0 \le v^i \le b^i, \ \ i = \overline{1,m},$$

де a^i, $i = \overline{1,m}$ — вагові коефіцієнти; v^i, $i = \overline{1,m}$ — обсяг викидів шкідливих речовин i-м підприємством. Залежність між обсягами шкідливих викидів і затратами i-го підприємства на переробку не скинутих відходів задається функцією:

$$h_i\left(v^i\right) = c^i\left(b^i - v^i\right), \ \ c_i > 0, \ i = \overline{1,m}.$$

Якщо рівень забруднень в регіоні перевищує величину $q_{\max}$, то на підприємства накладаються штрафи $s^i > 0, \ i = \overline{1,m}$. Кожне підприємство намагається мінімізувати свій критерій

$$\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1,...,v^m\right) = \begin{cases} c^i\left(b^i - v^i\right), & \text{якщо} \quad \sum_{i=1}^{m} a^i v^i \le q_{\max}, \\ c^i\left(b^i - v^i\right) + s^i, & \text{якщо} \quad \sum_{i=1}^{m} a^i v^i > q_{\max}. \end{cases} \tag{1.23}$$

Адміністративному центру доручено здійснювати контроль за рівнем забруднень шляхом встановлення обмежень шкідливих викидів підприємств і накладанням штрафів за забруднення, тобто встановлювати значення величин $b^1,...,b^m, s^1,...,s^m$. Центр намагається максимізувати свій критерій

$$\varphi_0\left(v^1,...,v^m\right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \sum_{i=1}^{m} a^i v^i \le q_{\max}, \\ 0, & \text{якщо} \quad \sum_{i=1}^{m} a^i v^i > q_{\max} \end{cases} \tag{1.24}$$

шляхом вибору величин $b^1,...,b^m, s^1,...,s^m$. Нехай обсяги викидів $v = \left(v^1,...,v^m\right)$ такі, що виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{m} a^i v^i = Q. \tag{1.25}$$

Тоді з (1.23, 1.24) впливає

$$\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^m\right) = c^i\left(b^i - v^i\right), \ \ i = \overline{1,m},$$

$$\varphi_0\left(v^1, ..., v^m\right) = 1. \qquad (1.26)$$

Дослідимо, за яких значень b^i, s^i вказана точка є точкою мінімуму функції $\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^m\right)$ щодо аргументу v^i. Для цього фіксуємо значення викидів $v^1, ..., v^{i-1}, v^{i+1}, ..., v^m$ та покладемо $v^i = b^i$. Тоді отримуємо

$$\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^{i-1}, b^i, v^{i+1}, ..., v^m\right) = s^i, \ \ i = \overline{1,m}.$$

Із формули (1.23) із врахуванням (1.25, 1.26) для $\overline{v}^i \in \left(v^i, b^i\right)$ і $\tilde{v}^i \in \left[0, v^i\right]$ випливають такі нерівності

$$\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^{i-1}, \overline{v^i}, v^{i+1}, ..., v^m\right) >$$

$$> \varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^{i-1}, b^i, v^{i+1}, ..., v^m\right),$$

$$\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^{i-1}, v^i, v^{i+1}, ..., v^m\right) <$$

$$< \varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^{i-1}, \tilde{v}^i, v^{i+1}, ..., v^m\right).$$

Отже, для того, щоб вектор $\left(v^1, ..., v^m\right)$ був точкою мінімуму для кожного із аргументів, достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$c^i\left(b^i - v^i\right) < s^i.$$

Розв'язком задачі про нормування шкідливих викидів є будь-який вектор $\left(b^1, ..., b^m, s^1, ..., s^m, v^i, ..., v^m\right)$, який задовольняє умовам

$$\sum_{i=1}^{m} a^i v^i = q_{\max},$$

$$c^i\left(b^i - v^i\right) < s^i, \ b^i > 0, \ \ s^i > 0, \ \ i = \overline{1,m}.$$

В цьому прикладі центр впливає як на область допустимих розв'язків підсистем (підприємств), так і на їхні критерії (функції затрат).

13.3. Приклад 3 (Задача управління економічною системою за допомогою штрафів і доплат (заохочень)). [11].

Припускаємо, що i-те $(i=\overline{1,m})$ підприємство виробляє продукцію v^i, яка задається виробничою функцією Кобба-Дугласа:

$$v^i = \alpha_i x_i^{k_i} L_i^{1-k_i},\ \ k_i \in [0,1],\ i=\overline{1,m}\,, \qquad (1.27)$$

де x_i — об'єм фондів, L_i — кількість робочої сили, α_i, k_i – деякі характеристики i-го підприємства. Для спрощення викладок надалі вважається, що $k_i = 1\!\!\diagup_2$, $i=\overline{1,m}$. Цільову функцію (критерій) i-го підприємства задамо в такому вигляді:

$$\varphi_i(L_i) = c_i\alpha_i x_i^{1\!\!\diagup_2} L_i^{1\!\!\diagup_2} - \omega_i L_i + s_i(v^i),\ \ i=\overline{1,m}, \qquad (1.28)$$

де c_i — ціна продукту i-го підприємства, ω_i — середня ставка заробітної плати i-го підприємства, $s_i(v^i)$ — додаткова доплата (або штраф), яка виплачується центром i-му підприємству (який i-те підприємство платить центру) залежно від обсягів випуску продукції. Будемо вважати величини x_i, $i=\overline{1,m}$. фіксованими, тому (1.28) можна записати так:

$$\varphi_i(L_i) = \bar{\alpha}_i L_i^{1\!\!\diagup_2} - \omega_i L_i + s_i(v^i),\ \ i=\overline{1,m}, \qquad (1.29)$$

де $\bar{\alpha}_i = c_i\alpha_i x_i^{1\!\!\diagup_2}$.

Підприємства, вибираючи керування, максимізують свій критерій. Центр зацікавлений, щоби підприємства, приймаючи рішення, знали заохочення чи штрафи, тобто вигляд функції $s_i(v^i)$. Для знаходження точки максимуму функції (1.29) при кожному i знайдемо її похідну й прирівняємо до нуля:

$$\frac{\partial\varphi_i(L_i)}{\partial L_i} = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_i L_i^{-1\!\!\diagup_2} - \omega_i + \frac{ds_i}{dv^i}\cdot\frac{dv^i}{dL_i} = 0,\ \ i=\overline{1,m}. \qquad (1.30)$$

З рівняння (1.30) можна визначити значення L_i^*, на якому досягається максимум функції $\varphi_i(L_i)$. Зрозуміло, що L_i^* залежить від вигляду функції доплат (штрафів) $s_i(v^i)$, тобто L_i^* є функціоналом від $s_i(v^i)$: $L_i^* = L_i^*[s_i(v^i)]$. У відповідності із формулою (1.27) оптимальний обсяг продукції i-го підприємства також буде функціоналом від функції $s_i(v^i): v^{i*} = v^{i*}[s_i(v^i)]$.

Задача центру полягає у виборі таких функцій доплат (штрафів) $s_i(v^i)$, $i=\overline{1,m}$, які доставляють максимум критерію центру

$\phi(v^1,\ldots,v^m)$. Тобто з врахуванням оптимальної поведінки підприємств критерій центру можна записати у такому вигляді:

$$\phi = \phi(v^{1*}[s_1], v^{2*}[s_2], ..., v^{m*}[s_m]). \qquad (1.31)$$

Задача знаходження екстремального розв'язку функціоналу (1.31) є складною і нестандартною оптимізаційною задачею. Для її розв'язування необхідні спеціальні оптимізаційні методи.

Позначимо через $\hat{v}^i$, $i=\overline{1,m}$ обсяги продукції підприємств, на яких критерій центру $\phi = \phi(v^1,...,v^m)$ приймає максимальне значення, і задамо функції штрафу підприємств у такому вигляді:

$$s_i(v^i) = \lambda_i(v^i - \hat{v}^i)^2 - c_i\alpha_i x_i L_i^{1/2} + \omega_i L_i, \ \ i=\overline{1,m}, \qquad (1.32)$$

де λ_i, $i=\overline{1,m}$ – довільні від'ємні числа. Із співвідношень (1.28) і (1.32) отримуємо такий критерій i-го підприємства:

$$\varphi_i(v^i) = \lambda_i(v^i - \hat{v}^i)^2, \ \ \lambda_i < 0, \ \ i=\overline{1,m}.$$

Звідси випливає, що оптимальним для i-го підприємства є випуск продукції $v^i = \hat{v}^i$, $i=\overline{1,m}$, тобто при виборі центром функції штрафу (1.32) інтереси центру і підприємств збігаються.

У реальних задачах величину штрафу чи заохочення або обмежують, тобто

$$s_i \in G_\varphi, \ \ i=\overline{1,m},$$

де G_φ — деяка множина; або значення критерію центру вибирають залежним також від функцій s_i, $i=\overline{1,m}$, тобто

$$\phi = \phi[v^1,...,v^m, s_1,...,s_m].$$

Складність оптимізації такого критерію полягає в тому, що необхідно шукати функції $s_i(v^i)$, $i=\overline{1,m}$, які залежать від фазових координат v^i, $i=\overline{1,m}$.

Розглянемо два підходи для розв'язування таких задач. Перший — базується на ідеї параметризації шуканих функцій, а другий — на еквівалентності розв'язків ієрархічної гри двох осіб і спеціальної задачі нелінійного програмування [4]

Спочатку спростимо ситуацію: вважаємо, що система керування складається із центру і одного підприємства. Центр вибирає елемент x, підприємство — y, максимізуючи свої критерії:

$$\phi(x,y) \to \max_{(x,y)}, \qquad (1.33)$$

$$\varphi(x,y) \to \max_{(x,y)}. \qquad (1.34)$$

Центр вибирає функцію $x = \psi(y)$ і повідомляє її вигляд підприємству. Припускається, що підприємство доброзичливо відноситься до центру і вибирає y як розв'язок оптимізаційної задачі

$$\varphi(\psi(y), y) \to \max_{y}. \tag{1.35}$$

В результаті розв'язування цієї задачі визначається точково-множинний оператор $y = Y[\psi(\cdot)]$. Отже, центру потрібно вибирати функцію $\psi(\cdot)$ як розв'язок задачі:

$$\sup_{\psi(\cdot)} \inf_{y \in Y[\psi(\cdot)]} \phi(\psi(y), y). \tag{1.36}$$

Якщо додатково припустити, що для будь-якої функції $\psi(\cdot)$ розв'язок задачі (1.35) єдиний, то замість (1.36) центру потрібно визначати функцію $\psi(\cdot)$, яка реалізує

$$\sup_{\psi(\cdot)} \phi(\psi(y), y),$$

де y – розв'язок (єдиний) задачі (1.35) за заданою функцією $\psi(\cdot)$.

I. *Перший підхід* до розв'язування цієї задачі полягає в параметризації функції $\psi(y)$. Задамо, наприклад, цю функцію в квадратичному вигляді

$$\psi(y) = ay + by^2, \tag{1.37}$$

де a, b – деякі параметри.

Використовуючи представлення (1.37), критерій (1.35) можна записати в такій формі:

$$\varphi^*(a, b, y) \to \max_{y}.$$

Якщо розв'язок останньої оптимізаційної задачі при довільних параметрах a і b єдиний, то y – це деяка функція від параметрів a і b:

$$y = y(a, b),$$

і задача (1.34) перетворюється в спеціальну задачу математичного програмування.

II. Опишемо реалізацію *другого підходу*. Сформулюємо спочатку таку оптимізаційну задачу:

$$\varphi(x, y) \to \min_{x}. \tag{1.38}$$

Розв'язок x цієї задачі залежить від $y: x = x^*(y)$. Тепер сформулюємо таку оптимізаційну задачу:

$$\varphi(x^*(y), y) \to \max_{y}. \tag{1.39}$$

Оптимальне значення функціоналу задачі (1.39) позначимо через φ^*, тобто $\varphi^* = \max_y \varphi(x^*(y), y)$.

Зрештою сформулюємо третю оптимізаційну задачу для центру:

$$\phi(x,y) \to \max_{(x,y)} \tag{1.40}$$

при обмеженнях

$$\varphi(x,y) \geq \varphi^*. \tag{1.41}$$

Позначимо розв'язок задачі (1.40), (1.41) через (x^0, y^0). Згідно з теоремою Гермейєра оптимальною стратегією центру буде функція $x(y)$:

$$x(y) = \begin{cases} \bar{x}^0, & \text{якщо} \quad y = \bar{y}^0, \\ x^*(y), & \text{якщо} \quad y \neq \bar{y}^0, \end{cases} \tag{1.42}$$

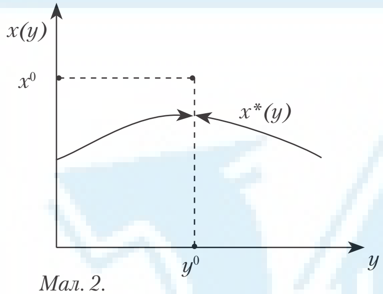
де $\bar{x}^0 = x^0$ та $\bar{y}^0 = y^0$, якщо $\varphi(x^0, y^0) > \varphi^*$; якщо ж $\varphi(x^0, y^0) = \varphi^*$, то $(\bar{x}^0, \bar{y}^0)$ такі, що $\varphi(x^0, y^0) > \varphi^*$ і $(\bar{x}^0, \bar{y}^0)$ з ε-точністю (яка задається центром) реалізують розв'язок задачі (1.40). Отже, якщо оптимізаційні задачі (1.38), (1.39), (1.40) розв'язані, то функція синтезу $x(y)$ виписується згідно з (1.42).

Задачі (1.38), (1.39), (1.40) мають простий економічний зміст. Оптимізаційну задачу (1.38) можна трактувати, як задачу визначення таких дій центру на підприємство, які ставлять його в найтяжчі умови. Оскільки ці дії незначні і знаходяться в певних рамках, то задача (1.38) часто буває тривіальною. Наприклад, якщо центр визначає ціни, то вони повинні бути мінімальними, якщо штраф — то максимально допустимий і т. д.

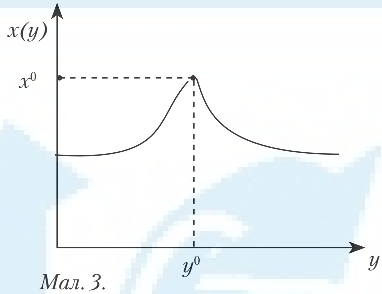
Задача (1.39) — це задача вибору підприємством своєї найкращої стратегії в найгірших для нього умовах, а величина φ^* — гарантований результат підприємства.

Задача (1.40) — це задача вибору оптимальної стратегії центру за умов повної централізації з виконанням вимоги (1.41). Розв'язок $\left(x^0, y^0\right)$ інтерпретується як узгоджена програма: підприємству вигідно її дотримуватись — воно має максимальне заохочення. Відступ від узгодженої програми призводить до погіршення результату.

На малюнку зображено графік функції (1.42). Функція $x(y)$ є розривною.



Мал. 2.



Мал. 3.

Всюди (окрім точки y^0) вона збігається з функцією $x^*(y)$ – розв'язком задачі (1.38), який визначає найгірші умови функціонування підприємства – максимальний штраф. На практиці функція може змінюватися в певному діапазоні, тому замість (1.42) користуються згладженою функцією $x(y)$ (мал. 3).

Застосуємо обидва підходи до розв'язування початкової задачі управління дворівневою економічною системою. Ввівши позначення $z_i = L_i^{1/2}$, $i = \overline{1,m}$, максимізацію критерію (1.29) i-го підприємства з врахуванням (1.27), можна записати в такому вигляді

$$\varphi_i(z_i) = \bar{\alpha}_i z_i - \omega_i z_i^2 + s_i(z_i) \to \max \qquad (1.43)$$

при умовах $z_i \geq 0$, $s_i(z_i) \geq 0$. Розв'яжемо цю задачу першим способом (використовуючи параметризацію). Задамо функцію $s_i(z_i)$ у квадратичній формі:

$$s_i(z_i) = c_{i1} z_i + c_{i2} z_i^2, \qquad (1.44)$$

де c_{i1} і c_{i2} – дійсні параметри. Прирівнявши похідну функції φ_i до нуля, знайдемо розв'язок задачі (1.43)

$$z_i = \frac{c_{i1} + \bar{\alpha}_i}{2(\omega_i - c_{i2})}. \qquad (1.45)$$

Цільову функцію центру задамо в такому вигляді:

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{m} d_i z_i - \sum_{i=1}^{m} s_i(z_i)$$

або з урахуванням рівності (1.44):

$$\phi(z)=\sum_{i=1}^{m} d_i z_i-\sum_{i=1}^{m}\left(c_{i1}z_i+c_{i2}z_i^2\right)=\sum_{i=1}^{m}\phi_i\,, \quad (1.46)$$

де $\phi_i=\left(d_i-c_{i1}\right)z_i-c_{i2}z_i^2$.

Підставимо в останню формулу замість z_i праву частину формули (1.45):

$$\phi_i=\frac{\left(d_i-c_{i1}\right)\left(c_{i1}+\bar{\alpha}_i\right)}{2\left(\omega_i-c_{i2}\right)}-\frac{c_{i2}\left(c_{i1}+\bar{\alpha}_i\right)^2}{4\left(\omega_i-c_{i2}\right)^2}.$$

Максимізація функції ϕ_i за змінними (параметрами) c_{i1}, c_{i2} є звичайною задачею математичного програмування.

Тепер опишемо реалізацію другого підходу. Оскільки $s_i\left(z_i\right)\geq 0,$ то найгіршою дією центру на підприємство буде $s_i\left(z_i\right)=0$, тоді критерій i -го підприємства набуде вигляду

$$\varphi_i\left(z_i\right)=\bar{\alpha}_i z_i-\omega_i z_i^2\rightarrow\max.$$

Максимальне значення цієї функції досягається у вершині параболи $z_i={\bar{\alpha}_i}/{\left(2\omega_i\right)}$ і дорівнює

$$\varphi_i^*=\bar{\alpha}_i\frac{\bar{\alpha}_i}{2\omega_i}-\omega_i\frac{\bar{\alpha}_i^{\,2}}{4\omega_i^2}=\frac{\bar{\alpha}_i^{\,2}}{4\omega_i}.$$

Третьою оптимізаційною задачею (1.40), (1.41) при кожному $i=\overline{1,m}$ буде така:

$$\phi_i=d_i z_i-s_i\left(z_i\right)\rightarrow\max_{z_i}$$

за умови $\varphi_i\left(z_i\right)\geq{\bar{\alpha}_i^{\,2}}/{\left(4\omega_i\right)}$.

Звідси отримуємо:

$$s_i=0,\;\; z_i={\bar{\alpha}_i}/{2\omega_i}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. –К.: Вища шк., 1983. – 512 с.; *Зайченко Ю. П.* Дослідження операцій: Підручник. — 7-ме вид., переробл. та допов. –К.: Слово, 2006. –816 с.
2. *Згуровський М. З., Панкротова Н. Д.* Системний аналіз: Проблеми, методологія, застосування. – К.: Наук. думка, 2005. – 743 с.
3. *Кутковецький В. Я.* Дослідження операцій: Навч. посіб. — К.: Професіонал, 2004. – 350 с.
4. *Волошин О. Ф., Мащенко С. О.* Теорія прийняття рішень: Навч. посіб. – К.: ВПЦ "Київ. ун-т", 2006. – 304 с.
5. *Зайченко Ю. П., Шумилова С. А.* Исследование операций: Сборник задач. — 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк., 1990. – 239 с.
6. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971. – 384 с.
7. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
8. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений. – М.: Логос, 2000. – 296 с.
9. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
10. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
11. *Подаковский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 254 с.
12. *Пономаренко О. І., Пономаренко В. О.* Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі: Навч. посіб. — К.: – Либідь, 1995. – 240 с

Додаткова

13. *Гетьманцев В. Д.* Лінійна алгебра і лінійне програмування. – К.: Либідь, 2001. – 256 с.
14. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. — 208 с.
15. *Кудрявцев Е. М.* Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. – М.: Радио и связь, 1984, – 183 с.

16. *Растригин Л. А.* Статистические методы поиска екстремума. – М.: Наука, 1968. – 376 с.
17. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наук. думка, 1979. – 199 с.
18. *Юдин Д. Б.* Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Сов. радио. 1979. – 392 с.
19. *Давыдов Э. Г.* Исследование операций: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1990. – 383 с.
20. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наук. думка, 1985. – 384 с.
21. *Така Х.* Введение в исследование операций. — 7-е изд.: Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2005. – 912 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленко*
Комп’ютерне верстання *І. О. Музика*

Зам. № ВКЦ-4238

Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний. Тираж 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП “Видавничий дім “Персонал”
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008 р.