МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

"МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА"

(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2010

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики
та програмування *Ю. В. Загороднім*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики
та програмування (протокол № 10 від 19.06.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Загородній Ю. В. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Математична економіка” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2010. — 66 с.

Методичні матеріали містять пояснювальну записку, тематичний план, теоретичний мінімум, задачі для самоконтролю, загальні рекомендації щодо виконання самостійної роботи, теми завдань та список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Сучасний спеціаліст з прикладної математики повинен вміти самостійно підходити до вивчення процесів споживання, виробництва та макроекономічної динаміки за допомогою апарату математичного моделювання. Для цього йому потрібно опанувати методи побудови, структурної, параметричної ідентифікації і дослідження моделей економічних систем.

В ході виконання самостійної роботи студент має опанувати методи дослідження математичних моделей.

Матеріал самостійних завдань відповідає темам дисципліни “Математична економіка” у підготовці бакалаврів, спеціалістів, магістрів напряму “Прикладна математика”. Зміст поєднує теоретичні питання методики математичного моделювання та основи його практичного застосування у дослідженні економічних систем.

Метою курсу є формування системи знань з методології, методики та інструментарію побудови економічних моделей, їх аналізу та використання, озброїти майбутніх спеціалістів методологією побудови економіко-математичних моделей для проведення активного системного аналізу соціально-економічних процесів, явищ та систем на макро- і мікроекономічному рівнях.

Курс “Математична економіка” вивчається студентами спеціальності прикладна математика на 4 курсі в 6-му семестрі, коли вони опанували базові дисципліни спеціальності, а саме “Математичний аналіз”, “Теорія ймовірності”, “Математичне програмування”, “Моделювання економічних, соціальних та екологічних процесів” тощо.

Завданнями вивчення дисципліни є

- ознайомлення з основами математичного аналізу економіко-інформаційних процесів;
- набуття навичок застосування методів прийняття рішень з оптимізації відносин економічних суб’єктів;
- набуття практичних навичок моделювання й аналізу економічних об’єктів і процесів на макро- мезо- та мікроекономічному рівнях.

Вивчення дисципліни дозволить студентам поглибити свої знання з важливих напрямів прикладної математики, зокрема з методів оптимізації, математичного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики з застосуванням комп’ютерного моделювання, методів оптимізації та інших дисциплін, необхідних для опанування таких дисциплін з навчального плану підготовки бакалавра: системи штучного інтелекту; комп'ютерні мережі; теорія фінансів; розміщення продуктивних сил; організація інформаційної діяльності у сфері управління.

Студентам пропонується самостійно опрацювати такі теми:

1. Побудова моделі та оцінювання процесів споживання. Простір товарів і послуг
2. Постановка та розв'язування задачі з оптимізації споживання.
3. Побудова та дослідження моделей виробничого процесу. Види виробничих функцій.
4. Задачі з оптимізації виробництва.
5. Задача з оптимізації виробництва за умов монополії.
6. Задача з оптимізації виробництва за умов ризику.
7. Побудова моделі економічної рівноваги.
8. Модель рівноваги з гарантованим доходом.
9. Види функцій колективної корисності.
10. Задачі з розподілу доходу в корпорації.
11. Модель міжгалузевого балансу.

12 Використання методу динамічного програмування в задачах з розподілу ресурсів.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МІНІМУМ: ОСНОВИ МОДЕЛЮВННЯ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Економіку, з точки зору математичного моделювання, можна визначити як суспільно-природничу систему, що здійснює виробництво, розподіл, обмін та споживання необхідних суспільству матеріальних благ.

У математичному сенсі економічну систему (E) можна подати як перетин двох систем вищого рівня, а саме "суспільство" (S) та "ресурси" (R).

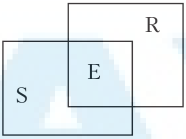


Рис. 1. **Схема взаємовідношення суспільства та економіки**

При розгляданні економіки як суспільної підсистеми значними є соціально-економічні аспекти її аналізу. При вивченні економіки як підсистеми ресурсів на перший план висуваються виробничо-технологічні аспекти її аналізу. Люди грають подвійну роль — вони є споживачами, які задають виробництву кінцеву мету, і одночасно трудовими ресурсами, найважливішим функціональним елементом самого виробництва.

Економіка може вивчатись і як відносно обумовлена система потоку перетворення ресурсів на продукти кінцевого споживання, що пов'язаний своїми входами та виходами з природою і соціальним середовищем:

Рис. 1.2. **Потік економічного перетворення**

Також можна визначити економіку як суспільну науку, що вивчає вибори, які роблять люди, використовуючи рідкісні ресурси для задоволення своїх потреб і бажань.

При цьому мікроекономіка вивчає вибір, який роблять малі економічні одиниці — люди, фірми, державні агентства, підприємства. Макроекономіка є розділом економічної науки, що аналізує поведінку та розвиток економіки як єдиного цілого. Наприклад, макроекономіка вивчає вплив на соціально-економічний розвиток країни таких показників:

- загальний рівень цін;
- рівень безробіття;
- показники кредитно-грошової політики;
- бюджетно-податкові показники тощо.

Розглянемо особливості економіки як об'єкта моделювання.

Перша особливість — це складність економічних процесів та явищ. Більшість об'єктів економіки з погляду кібернетики — складні системи.

Сприйняття системи як сукупності елементів, що знаходяться у взаємодії та утворюють деяку цілісність, єдність, є найбільш розповсюдженим. Важливою властивістю будь-якої системи є емерджентність — наявність таких властивостей, які не належать жодному елементу системи. Тому при вивченні системи недостатньо (а часто і неможливо) користуватися методом роздрібнення її на певні елементи з наступним їх вивченням окремо від цілого. Однією із труднощів економічних досліджень є те, що практично не існує економічних об'єктів, які можна розглядати як окремі (несистемні) елементи. Економічні системи мають усі ознаки дуже складних систем. Вони поєднують велику кількість елементів, які відрізняються багатостатністю внутрішніх зв'язків та зв'язків з іншими системами (соціальними, технологічними, природними). А всі ці процеси мають динамічний характер. Особливістю внутрішньої організації такої складної динамічної системи, як економіка, є її поліструктурність — взаємопереплітання різноякісних підсистем, що утворюють декілька зв'язаних між собою ієрархічних структур (виробничо-технологічних, територіальних, соціальних та ін.).

Трудноші вивчення економічних систем методами моделювання визначаються не тільки їх об'єктивними властивостями, а й особливостями взаємодії об'єктів та суб'єктів дослідження. Тому задачею економічної науки є не тільки пізнання об'єктивних економічних законів, а й розробка методів перетворення економіки через свідоме, оптимальне керування її розвитком. Адекватність моделі складних систем визначається мірою їх використання у дослідженні реальних економічних процесів.

Другою особливістю економічних систем є **невизначеність в економічному процесі**. Внаслідок великої кількості факторів, що впливають на економічні процеси, суттєві зв'язки не проявляються у чистому вигляді в кожному окремому випадку. Непередбачені **випадковості** можуть бути викликані природними явищами, змінами міжнародної обстановки, науково-технічними відкриттями, різноманітними суб'єктивними факторами. Таким чином, економічні закономірності мають **стохастичний характер**.

Розрізняють два типи невизначеності: істинну, обумовлену властивостями економічного процесу, та інформаційну, пов'язану з неповнотою та неточністю інформації про ці процеси.

Невизначеність викликається, як правило, тим, що хід запланованих і керованих процесів, а також зовнішні впливи на процеси, не завжди можливо точно передбачити через дію випадкових факторів і обмеження знань людини в будь-який момент часу. Особливо це є характерним для прогнозування науково-технічного прогресу та потреб суспільства. Крім того, можлива неузгодженість рішень і дій. Неповнота і неточність інформації про об'єктивні процеси підсилюють істинну невизначеність.

Третя особливість економічних систем — це **динамічність економічних показників**. Функціонуюча система може переходити з одного стану в інший в будь-який інтервал часу. Якщо такий перехід можна спостерігати, то таку систему називають динамічною.

Динамічність розглядається як суттєва властивість системи. Зникнення цієї властивості змінює систему. Водночас ця властивість ускладнює моделювання економіки.

Четверта особливість економіки — **нелінійність зв'язків економічної системи**. Задачі економіки часто носять нелінійний характер, який можна описати лише нелінійними рівняннями. Але нелінійність математичних задач ускладнює їх розвиток.

Нелінійні зв'язки при розв'язанні економічних задач можуть спостерігатися: а) за залежності ефективності використання ресурсів від збільшення виробництва; б) зміні попиту та потреб населення зі зростанням його доходів тощо.

З давніх часів люди замислювалися над можливістю швидко і вірно оцінювати можливі результати тих чи інших своїх рішень. Використання математики в знаходженні точних і оптимальних розв'язків реальних задач ми знаходимо в трудах найстародавніших єгипетських, грецьких та римських вчених.

На можливості математичного моделювання в економіці вказав Уільям Петті (1623–1687) в своїй праці "Політична арифметика", де написав: "... викладання думок на мові чисел, ваг та мір". У 1758 р. лейб-медик короля Людовика XIV, доктор Франсуа Кене (1694–1774) опублікував працю "Економічна таблиця", де зробив спробу кількісно описати національну економіку. Це була перша в світі модель народного господарства (економіки). Перший варіант його знаменитої "Економічної таблиці" отримав назву "Зигзаг"; другий — "Арифметична формула" (опубліковано у 1766 р.) Це була вищою мірою геніальна ідея.

"Економічна таблиця" Ф. Кене — це схема (графіко-числова модель) процесу суспільного відтворення. Вона розкриває основні стадії відтворення (виробництво, розподіл, перетворення, споживання та нагромадження), рух складових частин суспільного продукту (за вартістю та матеріально-речовинним складом), стосунків класів (землевласників, фермерів, ремісників, торговців) до виробництва та розподілу продукції і доходів. З моделі Кене випливає висновок, що нормальний хід суспільного відтворення може здійснюватись тільки за дотримання визначених вартісних і матеріально-речовинних процесів. Вже в наш час "Економічна таблиця" Ф. Кене стала основою для побудови і розвитку багатьох математичних моделей суспільного відтворення.

Виділяють три основні етапи розвитку математично-економічних досліджень: математична школа в політекономії, статистичний напрям та напрям теоретичних математичних моделей.

Родоначальником математичної школи в політекономії є французький вчений О. Курно (1801–1877), який 1838 р. в Парижі опублікував книгу "Дослідження математичних принципів теорії багатства". Видатними представниками математичної школи були: Г. Гюссен (1810–1858), Л. Вальрас (1834–1910), У. Джевонс (1835–1882), Ф. Еджворт (1845–1926), В. Парето (1848–1923), В. Дмитрієв (1868–1913).

Представники математичної школи досліджували на основі математичного методу важливі проблеми економічної теорії. Однак їх праці часто не мали практичного застосування.

Статистичні методи виникли у XX ст. Їх головним завданням було вивчення економічних циклів та прогнозування господарчої кон'юнктури на основі методів статистики. Цю направленість ще називають статистичною економікою. В рамках напряму було створено велику кількість математико-статистичних моделей економічних явищ. Наприклад, "Гарвардський барометр" для передбачення "економічної погоди". Цей барометр являв собою сукупність трьох кривих ринків: фондового, товарного, грошового.

Термін **економетрика** ввів норвежський вчений Р. Фриш (1895–1973), який проголосив, що економетрика є синтезом економічної теорії, математики і статистики. У 1931 р. створено Міжнародне економетричне товариство розвитку економічної теорії та її зв'язку із статистикою і математикою. У 1933 р. воно започатковує журнал "Економетрика".

Іншим полюсом економетрики є **математична економія**, що займається математичними дослідженнями теоретичних моделей економіки.

Видатним представником математичної економії був Джон фон Нейман (1903–1957). Йому належить ряд фундаментальних результатів у математичних теоріях економічного зростання, економічної рівноваги, ігор тощо.

Серед авторів виданих зарубіжних праць з математичної економії можна назвати С. Карлина (1964), К. Ланкастера (1972), Х. Никайдо (1972).

На Заході математичне моделювання стало найпрестижнішим напрямом в економічній науці. Не випадково від часу заснування Нобелівських премій з економіки (1969 р.) їх присуджували, як правило, за економіко-математичні дослідження. Нобелівськими лауреатами стали економетрики: Р. Фріш, Я. Тинберген, П. Самуельсон, Д. Хікс, К.Ерроу, В. Леонтьєв, Т. Кумпанс.

З кінця XIX ст. з'являються оригінальні економіко-математичні дослідження В. К. Дмитрієва, В. І. Борткевича, В. С. Войтинського, Р. І. Ворженецького, В. В. Самсонова, Н. А. Столярова, Н. Н. Шапошникова.

Відносно самостійним напрямом науки кінця XIX — початку XX ст. були дослідження з використанням математичної статистики. Провідну роль відігравав А. А. Чупров (1874–1926), йому належать праці з кореляційного аналізу економічних явищ. Найвідомішим економістом-математиком був В. К. Дмитрієв, його праця “Економічні нариси” (1904 р.) широко використовувалися в моделюванні міжгалузевих зв'язків.

Особливе місце посідає також Є. Є. Слуцький (1880–1948). Його стаття “До теорії збалансованого бюджету споживача” набула світової слави. Ідеї вченого збагачуються й донині.

Баланс народного господарства в нашій країні було складено у 20-х роках, що набагато випередило зарубіжні статистичні дослідження. Родоначальником цього напряму досліджень став В. Леонтьєв.

Згодом були праці М. Баренгольца, Я. Шатуновського. Спроби використати математичні методи з метою вивчення структури та обґрунтування народногосподарських витрат зробив Л. Лубни-Герцик. Г. А. Фельдман (1884–1958) розробив моделі економічного зростання, а С. С. Бюшгенс та А. А. Конюс — споживання, індексів цін та купівельної спроможності грошей.

У1939 р. ленінградський математик Л. В. Канторович отримав завдання від фанерного тресту: вирішити задачу щодо завантаження верстатів, щоб або збільшити випуск продукції, або на ту ж кількість виготовлених виробів зменшити витрати сировини. Л. В. Канторович розробив метод **послідовного покращення плану,** або ж розв'язуючих множників. А наприкінці 40-х років в США Дж. Данцигом було відкрито **лінійне програмування**. Почався новий етап економічних досліджень — використання лінійного програмування для вирішення різноманітних задач: розподілу робіт між видами обладнання; використання комплексної сировини; розкрою матеріалів; складання планів перевезень тощо.

Пізніше Л. В. Канторович розширив сферу використання лінійного програмування в економіці, сформулював завдання галузевого та народногосподарського оптимального планування, за що у 1975 р. отримав Нобелівську премію.

У 1939 р., майже одночасно з Л. В. Канторовичем, ленінградський економіст В. В. Новожилов (1892–1970) опублікував економіко-математичну працю “Методи вимірювання народногосподарської ефективності планових та проектних варіантів”. Тоді ж виконувались роботи з раціоналізації **транспортних перевезень** (А. Л. Лур’є та В. Н. Толстой). Слід також вказати на розробку С. Г. Струміліна з числових моделей праці та балансу народного господарства (хоча широкого практичного застосування вона не набула).

Новий етап у розвитку економіко-математичних методів почався у другій половині 50-х років XX ст. У 1957–58 рр. у країні створюються перші спеціалізовані економіко-математичні підрозділи. Визначну роль в організації і пропаганді економіко-математичних досліджень відіграв В. С. Немчинов (1894–1964).

З 30-х років XX ст. розвивалися такі напрями економіко-математичного моделювання:

- моделі міжгалузевого балансу;
- моделі ринкової рівноваги;
- моделі багатосекторної економіки;
- теорія ігор;
- економетрика;
- лінійне та опукле програмування в економіці.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Провести системний аналіз проблеми щодо підвищення прибутку продуктової фірми на основі інформації про її структуру та технологічний процес виготовлення і реалізації продукції. Основними змінними та параметрами моделі є:

- кількість готової продукції на складі;
- попит на продукцію;
- кількість сировини;

- технологічні матриці;
- продаж продукції;
- ціна реалізації продукції та собівартість сировини;
- параметри виробничої функції технологічного процесу виробництва.

2. Побудувати математичну модель динаміки капіталу продуктової фірми — економічного продуцента.

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Самостійна робота полягає у дослідженні задачі з прийняття рішень в управлінні економічним процесом.

За результатами самостійної роботи студент складає і захищає звіт, в якому розкривається:

- постановка задачі моделювання обраного процесу;
- методи моделювання та дослідження реального процесу на основі його математичної моделі;
- постановка задачі прийняття рішень;
- опис програмного продукту для чисельного дослідження моделі;
- основні результати, отримані в ході розв'язування поставленої задачі;
- основні висновки;
- список використаної літератури.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Основи моделювання процесів споживання

Теми, які вивчаються при виконанні завдання: Побудова моделі та оцінювання процесів споживання. Простір товарів та послуг. Постановка та розв'язування задачі оптимізації споживання.

Теоретичні положення завдання

Економіка, насамперед, є наукою, що вивчає методи виробництва товарів і послуг, їх споживання населенням окремо взятої країни чи всього світу. Одним з основних понять економіки є поняття товару. **Товар** — це споживче благо чи послуга, що надійшли у продаж в певний час у певному місці. Товари купують споживачі. Споживач — індивід чи група індивідів, що розподіляє свій прибуток на закупівлю товарів.

На **питання споживача** “Яку кількість товарів придбати?” допомагають відповісти моделювання сфери споживання і задачі, які будуються на основі моделей споживання [1, 2].

Нехай маємо n товарів на ринку послуг. Вибір споживача — це деякий вектор $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, де кожна компонента — кількість відповідного товару, придбаного споживачем. Набір всіх таких векторів створює **простір товарів** X, який описує дії споживача відносно усіх товарів:

- якщо $x_i > 0$ — споживач придбає товар у кількості .
- якщо $x_i = 0$ — споживач байдуже ставиться до товару *i*.

Введемо **відношення переваги** $(\geq)$ у просторі товарів *X*. Якщо $x \geq y$, це означає, що споживач віддає **перевагу** набору товарів *x*. Якщо $x = y$, то для споживача немає різниці, який набір товарів придбати — x чи y (має місце **байдужість**).

Для відношення переваги діють **аксіоми**:

1) відношення переваги — неперервне. Тобто, якщо $x \geq y$, то існує такий маленький приріст, що $x + \Delta x \geq y$;
2) відношення переваги — рефлексивне: $x \geq x$;
3) відношення переваги транзитивне: з $x \geq y, y \geq z$ випливає $x \geq z$;
4) для будь-яких товарів *x, y* або $x \geq y$ або $y \geq x$.

У відношенні байдужості теж є властивості рефлексивності, транзитивності та симетричності.

Множина товарів, які для споживача мають однакову цінність з товаром x, є множиною байдужості:

$$I_x = \{y \in X : y = x, x \in X\}$$

Товари, які, в свою чергу, мають переважне значення для споживача порівняно з товаром x, визначають множину переваги:

$$P_x = \{y \in X : y \geq x, x \in X\}.$$

Непереважною множиною є множина

$$NP_x = \{y \in X : y \leq x, x \in X\}.$$

Виходячи з означення цих множин, маємо таку властивість:

$$I_x = P_x \cap NP_x.$$

Множина байдужості при $n=2$ визначає на площині криву байдужості.

Нехай $(X, \geq)$ — поле переваг споживача, $C \subset X$ — підмножина товарів. Тоді $x \in X$ — найбільш (найменш) **переважний товар** в С, якщо $x \geq y (x \leq y) \forall y \in C$.

Теорема про переважний елемент

Якщо відношення переваги неперервне, С — компактна (замкнена та обмежена) множина, то вона містить хоча б один найбільший (найменший) переважний елемент.

Для поля переваг $(X, \geq)$ найбільш переважний елемент є точкою насиченості. Якщо ж такого елементу немає, тоді має місце ненасиченість **товарів**.

Кожен споживач, купуючи товари, обмежений на ринку своїми можливостями (своїм бюджетом). Введемо бюджетні фактори для того, щоб оцінити обмеження споживача. Серед них виділимо:

1) ціни на товар. Для кожного товару з $X = \left\{x_i, i = \overline{1,n}\right\}$ введемо вектор цін $P = \left\{p_i, i = \overline{1,n}\right\}$;
2) рівень доходу споживача — I.

Тоді бюджетне обмеження має вигляд:

$$x * p = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n \leq I \qquad (1.1)$$

Споживча множина

$$S = \left\{y \in R_+^n : x * p \leq I\right\},$$

яка визначає набори товарів, що доступні споживачу, є замкненою, обмеженою та опуклою. На споживчій множині і будемо проводити всі подальші дослідження.

Постає зрозуміле питання: чи можливо оцінити попит на товари ринку, якщо відомі ціни та рівень доходу споживача? Рівню цін *p*, які можуть змінюватися в множині цін *P*, і рівню доходу *I* можна поставити у відповідність **функцію попиту**, що має множину значень у просторі товарів:

$$\varphi : PxI \to 2^x , \qquad (1.2)$$

де 2^x — множина всіх підмножин множини товарів *X*.

Як знайти таку функцію? Спочатку слід оцінити привабливість для споживача тих чи інших товарів, тобто кількісно оцінити відношення переваги. Для цтого є функція корисності.

Числову функцію

$$U : X \to R$$

назвемо **функцією корисності**, якщо вона є індикатором переваги товарів, тобто:

$$U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow x \geq y \, .$$

Граничною корисністю товару (marginal utility) називається похідна від функції корисності:

$$MU(x) = \frac{dU(x)}{dx} \, ,$$

яка показує, яким чином буде змінюватися корисність зі збільшенням споживання того чи іншого товару. Гранична корисність — це вектор частинних похідних по кожному товару x_i. Тоді умова монотонності функції корисності набуває вигляду:

$$MU(x) > 0 \, .$$

Приклади функції корисності:

1) Лінійна функція корисності

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = ax^T \; ;$$

2) Квадратична функція корисності

$$U(x) = ax^T + \frac{1}{2} xBx^T \, ,$$

де $B < 0, a + xB > 0$;

3) Логарифмічна функція корисності (функція Бернулі)

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \log_b (x_i - \overline{x_i}),$$

$$b > 1, a_i, x_i > \overline{x_i} \geq 0 \; ;$$

4) Функція корисності з постійною еластичністю

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 - b_i} (x_i - \overline{x_i})^{1 - b_i}$$

$$a_i > 0, 0 < b_i < 1, x_i > \overline{x_i} \geq 0 \quad .$$

Задачею споживання є задача збільшення корисності від придбання допустимого набору товарів з врахуванням бюджетного обмеження споживача. Це є задачею опуклого програмування, де множина товарів опукла і функція корисності теж опукла:

$$\begin{gathered} U(x) \to \max \\ x * p \le I \\ x \in R_+^n (x \ge 0) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Для розв'язування задачі опуклого програмування використовується опукле програмування. Для знаходження необхідних умов оптимальності будується **функція Лагранжа**, яка має вигляд:

$$L(x,\lambda) = U(x) + \lambda(I - xp) \tag{1.4}$$

і за наступними умовами знаходяться розв'язки задачі (2.3):

$$\begin{gathered} \frac{dL(x,\lambda)}{dx} \le 0, \frac{dL(x,\lambda)}{d\lambda} \ge 0 \\ \frac{dL(x,\lambda)}{dx} x = 0, \frac{dL(x,\lambda)}{d\lambda} \lambda = 0, \lambda \ge 0 \end{gathered} \tag{1.5}$$

Підставляючи функцію Лагранжа (1.4) в умови оптимальності (1.5), отримуємо залежності для оптимального значення x* (тобто такого значення, яке задовольняє умовам задачі (1.3) і максимізує функцію корисності):

$$\begin{gathered} MU(x) = \frac{dU(x)}{dx} \le \lambda * p, \\ Mu_i(x) = \lambda * p_i; \lambda * = \frac{Mu_i(x)}{p_i}, \text{якщо}\_ x_i^* > 0 \\ Mu_i(x) < \lambda * p_i, \text{якщо}\_ x_i^* = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Якщо всі товари було придбано, тобто всі компоненти вектора x додатні, тоді маємо залежності:

$$\begin{gathered} MU(x^*) - \lambda * p = 0 \\ I - x * p = 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Приклад 1.1

Нехай задача споживання стосується двох товарів (n=2). Цінність другого товару доречна тільки за наявності першого, який має власну ціну, але вона зростає зі споживанням другого товару. Тоді функцію корисності можна записати так:

$$U(x) = ax_1 + bx_1x_2, \tag{1.8}$$

де коефіцієнт цінності першого товару (цінність одиниці товару), $b > 0$ — коефіцієнт цінності спільного використання обох товарів. Бюджетне обмеження запишемо в формі:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I, \qquad (1.9)$$

При $x_1 = 0$ функція корисності теж буде дорівнювати 0, що, звичайно, не може бути її максимальним значенням. Тому, використовуючи співвідношення (1.5), при $x_1 > 0$, маємо рівність:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = a + bx_2 - 2\lambda = 0$$

або $x_2 = \dfrac{2\lambda - a}{b} \ge 0$.

З останнього відношення можна зробити висновок, що $\lambda^* > 0$, тобто весь бюджет споживач витрачає, а отже:

$$I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 .$$

$$x_1 = \frac{I - p_2 x_2}{p_1}$$

Для знаходження значення x_2 розглянемо дві можливості (вибір яких, врешті-решт, залежить від значень коефіцієнтів задачі).

1) $x_2^* = 0$. Тобто другий товар не купується. Тоді маємо: $\lambda^* = \dfrac{a}{2}; x_1^* = \dfrac{I}{p_1}; U(x^*) = \dfrac{aI}{p_1}$;

2) $x_2^* > 0$. Тоді з співвідношення необхідних умов оптимальності маємо

$$x_1^* = \frac{\lambda^*}{b}; x_2^* = \frac{I - \dfrac{\lambda^*}{b} p_1}{p_2} = \frac{2\lambda^* - a}{b} .$$

Звідси:

$$\lambda^* = \frac{bI + ap_2}{2p_2 + p_1} .$$

Залежно від допустимості і з ознакою максимуму обирається перший чи другий варіант. Він і буде остаточним оптимальним результатом споживання.

Наприклад, при значеннях параметрів моделі (1.3): $p_1 = 2; p_2 = 1; a = 1; b = 0{,}25; I = 100$, маємо

1) $x_2 = 0; x_1 = \dfrac{100}{2} = 50; U(x) = 50$;

2) $\lambda = \frac{25+1}{2+2} = 6,5; x_1 = \frac{6,5}{0,25} = 26; x_2 = \frac{13-1}{0,25} = 48;$

$U(x) = 26 + 0,25 * 26 * 48 = 338$

Отже, варіант 2 є оптимальним. Він дає значення функції корисності — 338.

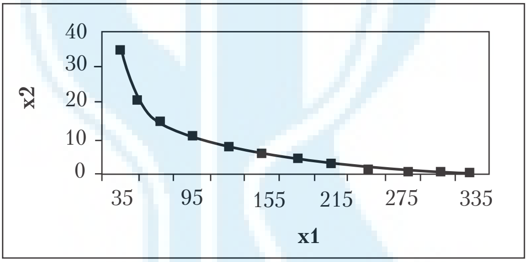
Кривою байдужості можна назвати всі точки на площині двох товарів, де функція корисності має постійне значення.

Так, рівняння кривої байдужості, яка проходить через оптимальну точку, має вигляд:

$$x_1 + 0,25x_1x_2 = 338$$

або

$$x_2 = 4(\frac{338}{x_1} - 1), 0 < x_1 \le 338 .$$



Крива байдужості

Наприклад, крім оптимальної точки (26,48), на кривій байдужості лежать точки (13,100) і (338,0).

Загалом оптимальні значення задачі споживання (x^*, λ^*) залежать від вектора цін на товари та від рівня доходу. Зрозуміло, що зі зміною цін на товари або свого бюджету, споживач змінює і свій попит на товари чи послуги. Таку залежність опишемо функцією попиту.

Функцією попиту будемо називати оптимальні значення вектора споживання: $\xi(p,I) = x^*(p,I)$.

Граничною вартістю грошей назвемо оптимальне значення коефіцієнта функції Лагранжа $G(p,I) = \lambda^*(p,I)$.

Приклад 1.2

Для прикладу 1.1 маємо такі функції попиту і граничної вартості грошей (ГВГ):

$$G(p,I)=\frac{bI+ap_2}{2p_2+p_1}.$$

$$\xi(p,I)=\{\frac{I-p_2(2G(p,I)-a)/b}{p_1},\frac{2G(p,I)-a}{b})$$

Виходячи з умов оптимальності задачі споживання, можна записати два співвідношення для функцій попиту і ГВГ:

$$\begin{aligned} &I-\xi(p,I)p=0; \\ &\frac{dU}{dx}(\xi(p,I))-G(p,I)p^T=0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

Продиференціюємо ці рівняння за аргументами p- та I-функцій. Будемо мати залежності:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^T \\ -p & U_{xx} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial G/\partial I \\ \partial\xi/\partial I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^T \\ -p & U_{xx} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial G/\partial p \\ \partial\xi/\partial p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi(p,I) \\ G(p,I) \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Приклад 1.3

В умовах прикладу 1.1 знайдемо матрицю H:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & -p^T \\ -p & U_{xx} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & 0 & 1/4 \\ -p_2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю, обернену до H:

$$H^{-1}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

знаючи, що множення матриці на обернену дає одиничну матрицю:

$$HH^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер маємо 3 системи рівнянь:

$$\begin{cases}-2a_2-a_3=1\\ -2a_1+\dfrac{a_3}{4}=0;\\ -a_1+\dfrac{a_2}{4}=0\end{cases}\begin{cases}-2b_2-b_3=0\\ -2b_1+\dfrac{b_3}{4}=1;\\ -b_1+\dfrac{b_2}{4}=0\end{cases}\begin{cases}-2c_2-c_3=0\\ -2c_1+\dfrac{c_3}{4}=0\,,\\ -c_1+\dfrac{c_2}{4}=1\end{cases}$$

з яких можемо обчислити значення елементів оберненої матриці:

$$H^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{16} & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{4} & -1 & 2\\ -\dfrac{1}{2} & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

Тоді ми можемо обчислити реакцію функції попиту до зміни бюджету в точці, виходячи з системи рівнянь (1.11):

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial G(p,I)}{\partial I}\\ \dfrac{\partial \xi_1(p,I)}{\partial I}\\ \dfrac{\partial \xi_2(p,I)}{\partial I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{16} & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{4} & -1 & 2\\ -\dfrac{1}{2} & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{16}\\ \dfrac{1}{4}\\ \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Тобто зі зміною бюджету на незначну величину $(\,I+dI\,)$, гранична вартість грошей зміниться на величину

$$dG=\frac{\partial G(p,I)}{\partial I}dI=\frac{dI}{16}\,.$$

Перевірити це можна через знаходження безпосередньої похідної від функції граничної вартості грошей:

$$\frac{\partial G(p,I)}{\partial I}=\frac{b}{2p_2+p_1}=\frac{1}{4(2+2)}=\frac{1}{16}\,.$$

Крім того, можна врахувати **компенсовану зміну ціни**, коли зі змінною ринкових цін дохід I компенсується таким чином, щоб корисність залишалася незмінною:

$$
\begin{aligned}
&dU = 0;\\
&dI = xdp, \qquad\qquad (1.12)\\
&\begin{pmatrix} 0 & -p^T \\ -p & U_{xx} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial G / \partial p_{comp} \\ \partial\xi / \partial p_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G(p,I) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

За таких умов дохід споживача є не сталою величиною, а функцією від цін. Крім того, виконується співвідношення:

$$\frac{dI}{dp} = \xi(p,I)\ .$$

Матричні рівнянь (1.11) і (1.12) дають можливість прослідкувати, як буде змінюватися попит на товари зі зміною цін та доходу споживачів. Разом ці рівняння складають основне рівняння теорії споживання.

Динаміку зміни функції попиту при зміні цін на товари ринку дає рівняння Слуцького:

$$\frac{\partial\xi(p,I)}{\partial p} = \frac{\partial\xi(p,I)}{\partial p}_{comp} - (\frac{\partial\xi(p,I)}{\partial I})\xi(p,I)\ , \qquad (1.13)$$

Проаналізуємо класифікацію товарів за рівнем споживання (пам'ятаючи, що, якщо похідна від функції за деяким аргументом додатна, це означає, що функція зростає зі зростанням значення аргументу в обраній точці, і навпаки, якщо похідна від'ємна, — значення функції спадає зі зростанням значення аргументу)

Таблиця порівняння товарів ринку

	Цінні товари $\partial\xi_i / \partial I > 0$	Малоцінні товари $\partial\xi_i / \partial I < 0$
Нормальні товари $\partial\xi_i / \partial p_i > 0$	Нормальні товари (масло, молоко)	Норм. малоцінні (хліб, маргарин)
Товари Гіффена		Товари Гіффена (картопля)

Як оцінити зміну функції попиту залежно від зміни цін на товари і рівня доходу споживача? Математично це можна зробити за допомогою похідної від функції попиту $\xi(p,I)$ за її аргументами. Відомо, що похідна функції показує швидкість збільшення значення функції при збільшенні її аргументів. Якщо, наприклад, похідна за рівнем доходу від'ємна $\frac{\partial \xi(p,I)}{\partial I} < 0$, то це свідчить про те, що попит зменшується зі збільшенням рівня бюджету. В економіці для того, щоб позбавитись проблем метричності змінних моделей, замість похідної функції вводиться **коефіцієнт еластичності:**

$$e(x) = \frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} , \qquad (1.14)$$

Наприклад, **еластичність попиту** за цінами та рівнем бюджету можна знайти за співвідношеннями:

$$e_{pi}(\xi) = \frac{p_i}{\xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial p_i}; e_I(\xi) = \frac{I}{\xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial I} . \qquad (1.15)$$

Таким чином, еластичність попиту є кількісною оцінкою у відсотковому співвідношенні чутливості функції попиту до коливань цін ринку та бюджету споживача.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Поняття товару та споживача.
2. Простір товарів. Відношення переваги.
3. Функція корисності. Види функцій корисності.
4. Задача оптимізації споживання.
5. Функція попиту.
6. Основне рівняння теорії споживання.
7. Рівняння Слуцького та класифікація товарів.
8. Знайти функцію попиту для функції корисності $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{b-a} (x_1 + b - a)^{-b}$.
9. Знайти еластичність функцій попиту Торнквіста:
   $\xi_1 = \frac{aI}{(I+b)}$ для товарів першої необхідності;
   $\xi_2 = \frac{aI - c}{I + b}$ для товарів відносної розкоші.
10. Показати, що коли в межах певної групи товарів ціни змінюються пропорційно, то таку групу товарів можна розглядати як один товар.
11. Принцип вилучення податків типу "рівності жертв" потребує, щоб $U^*(p,I) - U^*(p, I - T(I)) = const$ для будь-якого рівня дохо-

ду I, де T(I) — податок. Показати, що податок зростає за доходом.

12. Дослідити проблему вибору між заробітком і вільним часом для дозвілля з точки зору теорії споживання:

$$U(x,l) \to \max$$

$$(p,x) = I + (w,h)\,,$$

$$h + l = q$$

де x — кількість товарів, p — їх ціни, I — нетрудовий дохід, h –робочий час, w — зарплата, q — загальний час. Знайти функцію попиту.

Варіант	Функція корисності	Значення параметрів
1	$U(x,l) = ax + bxl$	P=3, I=10, w=2, q=16, a=18, b=2
2	$U(x,l) = xl$	W=3, p=4, I=40, q=20, I=20
3	$U(x,l) = ax + bl - cxl$	W=3, q=16, p=4, a=6, b=6; c=0,5; I=10
4	$U(x,l) = al + bxl$	W=2, q=18, a=6, b=1, p=1, I=12

13. Дослідити модель споживання для двох, трьох товарів. Знайти функцію попиту від бюджету та ціни, якої немає в таблиці. Знайти її еластичність

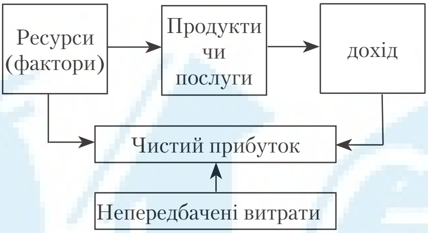
Варіант	Функція корисності	Значення параметрів
1	$U(x,y,z) = ax + by - cxy + dxz$	a=1, b=2, c=0,1, d=0,5, p_1=2, p_2=3, p_3=2
2	$U(x,y,z) = ax^2 + by + dxz$	a=1, b=4, d=1, p_1=3, p_2=2, p_3=2
3	$U(x,y,z) = ax - by + cxy$	a=1, b=0,5, c=1, p_2=3
4	$U(x,y,z) = ax^2 + by - cx + dxz$	a=1, b=2, c=0,5, d=1, p_1=2, p_2=3, p_3=2
5	$U(x,y,z) = ax^2 + by - cxy$	a=1, b=2, c=0,05, p_1=2

Завдання 2. Основи моделювання процесів виробництва

Теми завдання: побудова та дослідження моделей виробничого процесу; види виробничих функцій; задачі оптимізації виробництва.

Теоретичні положення завдання

Будь-яка фірма чи підприємство працюють заради прибутку, виробляючи продукт. Для цього необхідно використовувати ресурси — виробничі фактори.



Загальна схема моделей виробництва

Наприклад, виробничими факторами можуть бути

- земля;
- капітал;
- людська праця;
- природні ресурси тощо.

Постановка задачі: підприємству необхідно визначити кількість продукції та рівень витрат виробничих факторів, щоб максимізувати прибуток.

Розглянемо спочатку однопродуктову фірму, яка використовує n виробничих факторів. Введемо вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — кількість витрат факторів виробництва. Тоді потужність виробництва можна задати функцією, що відображає простір виробничих витрат X в число, яке символізує величину випуску продукції:

$$F : X \to R \tag{2.1}$$

Така функція $q = F(x)$ називається **виробничою функцією** і задовольняє аксіоми:

1. $F(0) = 0$ (неможливість отримати продукт без витрат виробничих факторів).

Підсилена умова: $\forall x \ni i : x_i = 0 \Rightarrow F(x) = 0$ (тобто якщо хоч один фактор є нульовим, то нульовим є і значення виробничої функції).

2. Монотонність. Існує така економічна область $\exists \Sigma \subset X$, що $x^1, x^2 \in \Sigma, x^1 \geq x^2 \Rightarrow F(x^1) \geq F(x^2)$.

3. Угнутість (випуклість вгору). Існує така особлива опукла область $D \subset \Sigma$, що

$\forall x^1, x^2 \in D, F(ax^1 + (1-a)x^2) \geq aF(x^1) + (1-a)F(x^2), 0 \leq a \leq 1$.

Закон спадаючої віддачі (ЗСВ) Йогана Гюнена (1783–1850): *якщо поступово витрати факторів збільшуються, то досягається така особлива область, де поширення продуктивності спадає.*

Похідна від вектора факторів є граничним продуктом виробництва:

$$MP(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{2.2}$$

За аксіомою монотонності

$$MP(x) \geq 0 .$$

Друга похідна від функції виробництва, навпаки, від’ємна

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \ddot{F}(x) < 0 \ \text{-}$$

в особливій області, тому що така властивість функції пояснює ЗСВ.

Нехай $\bar{x}(x_i)$ — вектор, де незафіксоване значення лише і-ї компоненти. Тоді і-та компонента вектора граничного продукту показує збільшення виробництва при додаткових витратах і-го виробничого фактора.

$$MP_i(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}, x_i > 0 .$$

Середній рівень збільшення виробництва на одиницю і-го фактора визначається рівнянням:

$$AP_i(x) = \frac{MP_i(x_i)}{x_i}, x_i > 0 .$$

Виробництво продукції має три стадії:

Від $x_i = 0$ до точки x_i^0, коли частковий граничний продукт $MP_i(x)$ досягає свого максимуму:

$$MP_i(x_i) > AP_i(x_i) > 0, 0 < x_i < x_i^0 .$$

Від точки x_i^0 до точки x_i^1, поки граничний продукт має додатне значення:

$$MP_i(x_i) > AP_i(x_i) > 0, x_i^0 < x_i \leq x_i^1 .$$

Від точки x_i^2, коли граничний продукт має від’ємне значення.

Тобто виробництво знижується зі збільшенням використання виробничих факторів.

Приклад 2.1

Для описання виробництва розглянемо виробничу функцію з одним виробничим фактором x:

$$F(x) = \frac{a}{2c}\ln(1+cx^2).$$

Граничний продукт визначається рівнянням:

$$MP(x) = \frac{ax}{1+cx^2}.$$

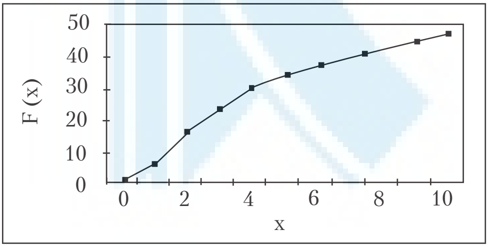
Він має максимум у точці

$$x^0 = \sqrt{\frac{1}{c}}.$$

При цьому випуск виробництва визначається виробничою функцією:

$$F(x^0) = \frac{a}{2c}\ln 2.$$

Точка x^0 — перехід до другої стадії виробництва, коли зростання випуску знижується зі збільшенням фактора.



Графік виробничої функції при $a = 10; c = 1$

Введемо поняття **еластичності випуску** продукції. Виробництво назвемо сталим, якщо виконується умова:

$$F(ax) = aF(x), a > 1.$$

Тобто при збільшенні витрат виробничих факторів в *a* раз, виробництво теж збільшується в *a* раз. Функція виробництва F(x) за такої умови є однорідною функцією 1-го ступеня.

Виробництво назвемо зростаючим (спадаючим), якщо

$$F(ax) > aF(x), a > 1,$$
$$(\ F(ax) < aF(x), a > 1\ ).$$

Міра доходу може бути оцінена **еластичністю виробництва:**

$$e(x) = \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^{n} MP_i(x) x_i \qquad (2.3)$$

Властивість еластичності виробництва: якщо виробнича функція однорідна зі ступенем k

$$F(ax) = a^k F(x),$$

тоді

$$e(x) = k.$$

Графічно маємо, що e(x) — кривизна ізокванта. Ізокванта — це гіперповерхні байдужості (крива лінія при n=2) у просторі виробничих факторів X, при яких

$$F(x) = q^0.$$

Тобто ізокванта — це геометричне місце точок, рухаючись через які, змінюються виробничі фактори, але загальне виробництво продукту залишається сталим.

Типи виробничих функцій:

Розглянемо поширені виробничі функції для двох виробничих факторів (n=2, наприклад, K — обсяг витрат капіталу, L — обсяг праці), не обмежуючи загальності.

1. Лінійна виробнича функція $F(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2$.

Така функція одночасно і угнута, і опукла. Еластичність виробництва: $e(x) = 1$, а граничний продукт $MP_i(x) = a_1$.

2. Виробнича функція моделі Леонтьєва $F(x) = \min(\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2})$.

$c_i > 0$ — кількість витрат виду і на виробництво одиниці продукції.

3. Виробнича функція аналізу способу виробничої діяльності

$$F(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k y_k,$$

$$y_k : \sum_{k=1}^{p} a_{ik} y_k \le x_i, i = 1,2$$

p — число способів виробничої діяльності;

y_k — рівень інтенсивності використання k-го способу;

a_k — випуск продукції при одиниці інтенсивності способу k.

4. Виробнича функція зі сталою еластичністю

$F(x) = e_0[e_1 x_1^{-b} + e_2 x_2^{-b}]^{-h/b}$

e_0 — масштабний множник;
$e_i \geq 0$ — параметр розподілу;
$h > 0$ — ступінь однорідності;
$b \geq -1$ — параметр заміщення.
Тоді властивості цієї функції такі:

$\sigma_{12} = \dfrac{1}{1+b}; e(x_1, x_2) = h$,

де σ_{ij} — еластичність заміщення фактора *i* на фактор j, і обчислюється за формулою:

$$\sigma_{ij} = \frac{d\ln(\frac{x_i}{x_j})}{d\ln(\frac{MP_i(x)}{MP_j(y)})} .$$

5. Виробнича функція Кобба-Дугласа:

$F(x) = b_0 x_1^{b1} x_2^{b2}$, де

b_0 — масштабний множник;
b_1, b_2 — еластичність випуску відносно кожної з витрат.
Властивості цієї функції такі:
$e_i(x) = b_i; \sigma_{12} = 0; e(x) = b_1 + b_2$.

Цю функцію було наведено у статті американських вчених П. Дугласа і Д. Кобба “Теорія виробництва” (1928 р.)

Задача теорії виробництва полягає у максимізації прибутків фірм. Тому для обчислення чистого прибутку слід обчислити прибуток від продукції і відняти від нього витрати на виробничі фактори.

Нехай р — ціна на продукт фірми, w — вектор витрат на одиниці виробничих факторів. Тоді математично задача має вигляд:

$$D(x) = pF(x) - wx \to \max; x \in R_+^m \qquad (2.4)$$

і є задачею опуклого програмування.

Приклад 2.2

Нехай фірма виробляє продукт, витрачаючи на нього два фактори виробництва. Виробнича функція має вигляд:

$F(x) = b x_1^{a_1} x_2^{a_2}$

Тоді прибуток визначається за формулою:

$$D(x) = pbx_1^{a_1}x_2^{a_2} - \varpi_1 x_1 - \varpi_2 x_2$$

За теоремою Кунна-Таккера, необхідними умовами оптимальності є:

$$\frac{dD(x)}{dx_1} = pba_1 x_1^{a_1-1}x_2^{a_2} - \varpi_1 \le 0;$$

$$\frac{dD(x)}{dx_2} = pba_2 x_1^{a_1}x_2^{a_2-1} - \varpi_2 \le 0\ ;$$

$$(pba_1 x_1^{a_1-1}x_2^{a_2} - \varpi_1)x_1 = 0;$$

$$(pba_2 x_1^{a_1}x_2^{a_2-1} - \varpi_2)x_2 = 0;$$

Таким чином,

$$pMP_i(x) \le \varpi_i$$

$$pMP_i(x) = \varpi_i, x_i > 0$$

$$pMP_i(x) < \varpi_i, x_i = 0$$

$pMP_i(x) = pbx_j$ — вартість і-го граничного продукту, при $i \ne j$.

Якщо всі фактори були використанні, тобто $\forall i = 1,2; x_i > 0$, тоді

$$p\frac{dF(x^*)}{dx_i} = pMP_i = \varpi_i\ ,$$

а отже,

$$\frac{MP_1}{\varpi_1} = \frac{MP_2}{\varpi_2} = \frac{1}{p} \qquad (2.5)$$

Останнє рівняння є **законом оптимального виробництва**.

Оптимальне значення виробничих факторів обчислюється за формулою:

$$x_1^* = \sqrt[a_1+a_2-1]{\frac{\varpi_1}{pba_1(\frac{\varpi_1 a_2}{\varpi_2 a_1})^{a_2}}}; x_2^* = \frac{\varpi_1 a_2}{\varpi_2 a_1}x_1^*\ .$$

Так, наприклад, візьмемо наступні значення параметрів:

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{4}; \varpi_1 = 2, \varpi_2 = 1\ .$$

Тоді маємо оптимальне значення кількості виробничих факторів та чистого прибутку:

$$x_1^* = \frac{\sqrt{2}pb}{64}; x_2^* = \frac{2\sqrt{2}pb}{64}; D(x^*) = \frac{pb}{2}(\sqrt{pb} - \frac{1}{2})$$

Контрольні питання та завдання

1. Поняття виробничої функції. Основні виробничі функції.
2. Задача оптимізації виробництва.
3. Закон оптимального виробництва.
4. Функції попиту на витрати.
5. Основне рівняння виробництва.
6. Перевірити, що для виробничої функції

$$F(x_1, x_2) = x_2 \frac{2x_1^2 + x_2^2}{3x_1^2 + x_2^2}$$

граничний продукт спадає.

7. Знайти функцію попиту на фактори виробництва для виробничої функції:

$$F = b\sqrt{x_1}\sqrt[4]{x_2}\ .$$

Завдання 3. Управління виробничим процесом у спеціальних умовах

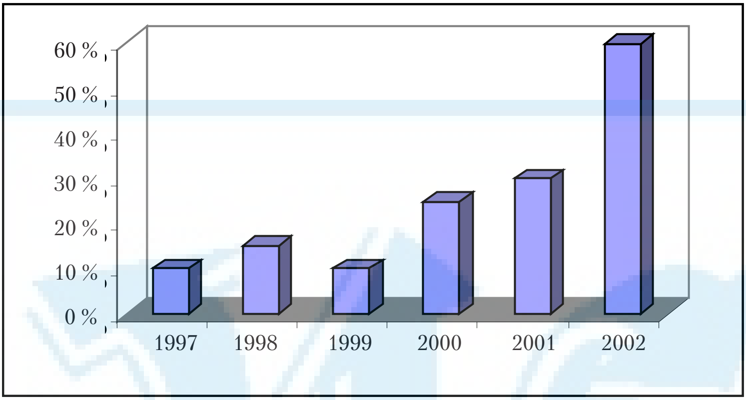
Теми завдання: Задача оптимізації виробництва в умовах монополії. Задача оптимізації виробництва в умовах ризику.

Теоретичні положення завдання

Підприємство в умовах ринку діє як суб'єкт, що виробляє певні товари чи послуги, і його моделі мають підпорядковуватися певним умовам:

1. У підприємства є виробнича функція $q = F(x)$.
2. Можливість впливати на ціни дає досконалу чи недосконалу конкуренцію.
3. Наявність ресурсних обмежень.
4. У підприємства є мета: максимізувати прибуток.
5. Може бути присутнім у моделі фактор часу.

Вплив на ціни і максимізацію прибутку великою мірою залежать від умов конкуренції ринку. Не останню роль тут відіграє зайнятість ринку продукцією саме цього підприємства, тобто на скільки відсотків вона займає ринок. Так, наприклад, якщо доля продукту підприємства зросла, як показано на рисунку, то воно отримало додаткові важелі впливу на ціни продукції p .



Відсоток продукції підприємства на ринку

Приклад 3.1

Описати дію підприємства можна задачею:

$$\begin{matrix} D = pq - c(x) \to \max \\ q = F(x) \end{matrix}, \qquad (3.1)$$

де $R = pq$ — дохід підприємства, $c(x)$ — витрати на виробничі фактори. При обмеженні на ресурси виробництва слід додати умову:

$$g(x) \le b, g: R_+^m \to R_+^m$$

Виходячи з необхідних умов оптимальності, для екстремального значення задачі (3.1) слід записати:

$$\begin{matrix} \frac{dD(x)}{dx} = p\frac{dF(x)}{dx} - \varpi^T \le 0; \\ \frac{dD(x)}{dx}x^T = (p\frac{dF(x)}{dx} - \varpi^T)x^T = 0 \end{matrix} \qquad (3.2)$$

Як було показано в прикладі попередньої теми, маємо закон оптимального виробництва:

$$\frac{MP_1(x)}{\varpi_1} = \frac{MP_2(x)}{\varpi_2} = ... = \frac{MP_m(x)}{\varpi_m} = \frac{1}{p}.$$

Нехай ціни на товари і виробничі фактори змінюються в межах:

$$p_1 \le p \le p_2; \varpi_1 \le \varpi \le \varpi_2.$$

Оптимальні значення витратних факторів

$$\xi(p,w)=x^*(p,w)$$

назвемо **функцією попиту на витрати** для підприємства. Вона має властивість однорідності 1-го ступеня:

$$\xi(ap,aw)=a\xi(p,w),\forall a>0 \tag{3.3}$$

Оптимальне значення виробничої функції

$$Q(p,w)=F(x^*(p,w))$$

назвемо **функцією пропозиції випуску**, яка теж має властивість однорідності:

$$Q(ap,aw)=aQ(p,w),\forall a>0$$

Для геометричного тлумачення оптимального виробництва розглянемо двофакторний випадок: m=2. Лінія ізокванти є геометричним розміщенням точок з властивістю

$$F(x_1,x_2)=q\ .$$

Лінія ізокости є геометричним розміщенням точок з властивістю

$$c(x)=c_1;\{x:w_1x_1+w_2x_2=c_1\}\ .$$

Ці лінії мають однаковий нахил

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{w_1}{w_2}\ .$$

Геометричне місце точок дотику ізоквант і ізокост є кривою довгострокового шляху розширення (показує витрати, що максимізують прибутки).

Розглянемо **чутливість функцій** оптимального виробництва до змін цінових параметрів задачі оптимальної поведінки підприємства. Якщо взяти похідні по аргументах функцій $Q(p,w),\xi(p,w)$ і зробити незначні перетворення, отримаємо рівняння — **основні рівняння теорії підприємства**:

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{dF}{dx} \\ 0 & p\dfrac{d^2F}{dx^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial p} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{dF}{dx} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{dF}{dx} \\ 0 & p\dfrac{d^2F}{dx^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ E_m \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Оскільки

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} < 0\,,$$

існує єдиний розв’язок рівняння підприємства. Зворотна матриця до матриці рівняння має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{dF}{dx} \\ 0 & p\frac{d^2F}{dx^2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{p}\frac{dF}{dx}(\frac{d^2F}{dx^2})^{-1} \\ 0 & \frac{1}{p}(\frac{d^2F}{dx^2})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, можна знайти розв’язки основного рівняння за досконалої конкуренції, тобто за умови, що підприємство не може безпосередньо впливати на ціни.:

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{1}{p}\frac{dF}{dx}(\frac{d^2F}{dx^2})^{-1}(\frac{dF}{dx})^T;(\frac{\partial \xi}{\partial p})^T = -\frac{1}{p}(\frac{d^2F}{dx^2})^{-1}(\frac{dF}{dx})^T$$

$$\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{1}{p}\frac{dF}{dx}(\frac{d^2F}{dx^2})^{-1};\frac{\partial \xi}{\partial w} = \frac{1}{p}(\frac{d^2F}{dx^2})^{-1}.$$

Рівняння виробництва (3.4) свідчать, як поводить себе попит на витрати із підвищенням цін.

ФІРМА В УМОВАХ МОНОПОЛІЇ

Монополія на ринку утворює недосконалу конкуренцію [2], за можливості впливає на ціни продукції. Математично таку можливість можна описати функцією:

$$p = p(q); \frac{dp}{dq} < 0\,.$$

Тоді валовий вихід продукції вираховується за формулою:

$$R(q) = p(q)q\,.$$

Граничний валовий дохід вираховується за формулою:

$$MR(q) = \frac{dR(q)}{dq} = p(q) + \frac{dp}{dq}q\,.$$

При цьому маємо умову:

$$MR(q) < p(q)\,.$$

Монополія за можливості може впливати на ціни факторів виробництва.

$$w = w(x); \frac{dw}{dx} > 0$$

Тоді витрати на виробничі фактори обчислюються за формулою:

$$c(x) = w(x)x .$$

Задача оптимального виробництва запишеться таким чином:

$$\begin{aligned} &D(x) = p(q)q - w(x)x \to \max \\ &q = F(x) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Функція Лагранжа для задачі має вигляд:

$$L(q,x,\lambda) = p(q)q - w(x)x + \lambda(F(x) - q) .$$

Умови оптимальності тоді можна знайти з рівняння:

$$MR(q^*) = MC(q^*); q^* = F(x^*) .$$

Теорія багатопродуктової фірми

При плануванні виробництва багатопродуктової фірми вводимо вектор виробничих функцій:

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)) ,$$

де n — кількість продуктів, а $q_i = F_i(x)$ — рівень випуску продукту i.

Введемо вектор цін на продукцію

$$p = (p_1, p_2, ... p_n) .$$

Тоді формула маржинального доходу складається з суми доходів від усіх товарів і має вигляд:

$$R = F(x)p = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x) \qquad (3.6)$$

Витрати виробничих факторів розподіляються на кожен продукт. Позначимо через x_j^i витрати фактора j на виробництво продукту i. Тоді загальні витрати фактора j знайдемо за формулою:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_j^i .$$

Чистий прибуток фірми обчислюється за формулою:

$$D(x) = F(x)p - xw ,$$

де w — вектор цін на фактори виробництва.

Неокласичними умовами оптимальності є такі рівняння:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial D(x)}{\partial x_j^i} = p_i \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} - w_j \le 0 \\ &\frac{\partial D(x)}{\partial x_j^i} x_j^i = (p_i \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} - w_j) x_j^i = 0 \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Іноді виробничу функцію можна записати і в неявній формі, яка поєднує кількість витрат виробничих факторів і кількість вироблених продуктів:

$$\Phi(q,x)=\Phi(q_1,...,q_n,x_1,...x_m)=0 \tag{3.8}$$

Така функція має підкорятися таким умовам:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi(q,x)}{\partial q_i}\le 0\\&\frac{\partial\Phi(q,x)}{\partial x_j}\ge 0\end{aligned} \tag{3.9}$$

Функція прибутку має вигляд:

$$D(q,x)=pq-wx\ ,$$

а функція Лагранжа задачі оптимізації:

$$L(q,x,\lambda)=qp-xw+\lambda\Phi(q,x)\ .$$

Виходячи з теореми Кунна-Таккера, можна знайти необхідні умови оптимальності.

Функцію прибутку підприємства можна подати і таким чином [3]:

$$D(x)=f(x)-FC\ , \tag{3.10}$$

де $f(x)$ — функція маржинального доходу підприємства, FC — величина постійних витрат.

Приклад 3.2

Підприємство вирішило провести рекламну кампанію. Величину витрат на неї позначимо через R. При цьому, звичайно, очікується, що попит на продукцію збільшиться. Змоделюємо цю зміну попиту за формулою:

$$S(R)=S(0)(1-e^{-aR}),$$

де $S(R)$ — величина попиту.

Задачу можна математично подати так:

$$\begin{aligned}&D(x)\to\max\\&f(x)=(C-H)x\\&FC=const+R\\&x\le S(R)\end{aligned}\ , \tag{3.11}$$

МОДЕЛІ ДІЇ ПІДПРИЄМСТВА В УМОВАХ РИЗИКУ

Для математичного описання стану ризику підприємства в умовах ринку використаємо поняття економічного левериджу [3]. Економічний леверидж оснований на понятті фізичного важеля, коли на обох кінцях діють дві сили F_1 та F_2:

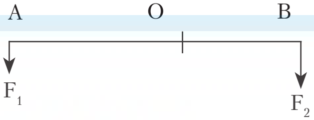


Схема дії фізичного важеля

Формально це співвідношення можна описати рівнянням:

$$F_1 = F_2 \frac{OA}{OB}$$

Виходячи з цих міркувань, економічний леверидж обчислюється за формулою:

$$L(x) = \frac{\text{\%зміни\_ прибутку}}{\text{\%зміни\_ продажу}} = \frac{100 - \dfrac{f(x+dx)-FC}{f(x)-FC}100}{100 - \dfrac{f(x+dx)}{f(x)}100} = \frac{f(x)}{f(x)-FC},$$

де FC — величина постійних витрат, $f(x)$ – функція маржинального доходу, x — обсяг продаж. Леверидж L(x) показує, на скільки відсотків зміниться дохід при зміні обсягу продаж на 1 %.

Приклад 3.3

Нехай підприємство випускає продукт А. Перемінні витрати — 5 грн. за одиницю продукту, ціна — 10 грн. Величина постійних витрат FC=2000 грн. Тоді $x_0 = 400$ — **точка незбитковості**. Обчислимо величину левериджу в точці $x_1 = 450$:

$$L_0(450) = \frac{(10-5)*450}{(10-5)*450-2000} = \frac{2250}{250} = 9\,.$$

Це значення показує, що зі збільшенням обсягу продаж на 1 % прибуток зміниться на 9 %.

Перевіримо цей результат.

$$D(450) = (10-5)450 - 2000 = 250; f(454{,}5) = (10-5)454{,}5 - 2000 = 272{,}5$$

$$\frac{d(454{,}5) - D(450)}{D(450)}100\% = \frac{22{,}5}{250}100\% = 9\%$$

Якщо обчислити при цьому і еластичність доходу

$$e(450) = \frac{dD(450)}{dx}\frac{450}{D(450)} = 5\frac{450}{250} = 9\,,$$

то побачимо, що вона відповідає економічному левериджу.

Економічний леверидж — це показник ризику підприємства. Якщо ж підприємство хоче зменшити свій ризик, тоді маємо **багатокритеріальну задачу**:

$$\begin{aligned} & f(x) = (C - H)x \to \max \\ & \frac{(C - H)x}{(C - H)x - FC} \to \min \quad , \end{aligned} \tag{3.12}$$

де С — ціна продукту, Н — величина перемінних витрат на одиницю продукції.

Приклад 3.4

Нехай А і Б — підприємства, у яких очікуваний дохід складає 100 грн. У підприємства А немає заборгованості, а підприємство В взяло кредит у 150 грн. під 10 % (слід виплатити 15 грн.). Тоді якщо дохід підприємств на 85 % буде нижчим за очікуваний, то підприємство В не в змозі буде виплатити заборгованість.

Як оцінити такий фінансовий ризик?

Фінансовий ризик пов’язаний з коливанням доходу. Якщо (D_i, p_i) — розподіл різних можливих значень доходу, тоді можна обчислити середній дохід і дисперсію:

$$\begin{aligned} & \overline{D} = \sum p_i D_i \\ & \sigma = \sqrt{\sum (\overline{D} - D_i)^2 p_i} \end{aligned} \; .$$

Тоді можна вирахувати коефіцієнт варіації, який покаже, наскільки дохід може відхилятися від очікуваного.

$$v = \frac{\sigma}{\overline{D}} \; .$$

Фінансовий леверидж можна тоді вирахувати як відношення процента зміни доходу до процента зміни чистого прибутку:

$$L_f = \frac{D(x)}{D(x) - I_n} \; ,$$

де I_n — процент виплати позики

Фінансовий леверидж показує, на скільки зміниться величина чистого прибутку при зміні доходу на 1 %.

Тоді формула

$$L_v = v L_f$$

обчислює відхилення чистого прибутку від очікуваного.

Мінімізація фінансового левериджу і є мінімізацією ризику підприємства.

Завдання 4. Основи моделювання економічної рівноваги

Теми завдання: Побудова моделі економічної рівноваги. Модель рівноваги з гарантованим доходом.

Теоретичні положення завдання

Ринок економіки — це, в першу чергу, об'єднання споживачів і виробників у єдину систему. Споживачі та виробники діють на двох ринках:

- ринку продуктів;
- ринку факторів виробництва.

Для описання взаємодії всіх суб'єктів ринку існує кілька моделей ринкової рівноваги. Найперша і основна з них — це модель ринкової рівноваги Вальраса.

Модель Вальраса — модель взаємодії споживачів і виробників на обох ринках.

Нехай економіка складається з H споживачів, E підприємств, n типів продуктів і m типів ресурсів. Ціни i-го продукту — pi, j-того ресурсу — wj.

Економіка є конкурентною, якщо всі суб'єкти діють за заданими цінами.

Нехай r_j^e — кількість первинного ресурсу виду j, що закуповується фірмою e; q_i^e — обсяг випуску продукту i фірмою e. Прибуток підприємства визначається таким чином:

$$D^e = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^e - \sum_{j=1}^{m} w_j r_j^e, e = \overline{1,E}\ . \tag{4.1}$$

Нехай $Q^e(q^e, r^e) = 0$ — виробнича функція підприємства e, яка зв'язує продукт з витратами виробничих факторів. Тоді якщо ми поставимо задачу оптимізації

$$D^e \to \max\,,$$

то необхідні умови оптимальності запишуться таким чином:

$$\begin{aligned}
&\lambda^e \frac{\partial Q^e(q^e, r^e)}{\partial q^e} = -p^T \\
&\lambda^e \frac{\partial Q^e(q^e, r^e)}{\partial r^e} = w^T \\
&Q^e(q^e, r^e) = 0 \\
&\lambda^e \geq 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Таких рівнянь буде n+m+1.

Тепер нехай на ринку діє H споживачів, які мають можливість:

- продавати виробничі фактори (працю тощо);
- мати частку доходів фірми;
- закуповувати товари і послуги.

Нехай

x_i^h — кількість i-го продукту, що його купує споживач h,

y_j^h — кількість проданого j-того фактора,

$U^h(x^h, y^h)$ — функція корисності споживача h.

Для споживача h маємо бюджетне обмеження:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j y_j^h + \sum_{e=1}^{E} s^{h,e} D^e = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h , \tag{4.3}$$

де $s^{h,e}$ — частка споживача h в доході фірми e.

Задача оптимізації споживача виглядає так:

$$\begin{gathered} U^h(x^h, y^h) \to \max \\ \sum_{j=1}^{m} w_j y_j^h + \sum_{e=1}^{E} s^{h,e} D^e = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h \ . \end{gathered} \tag{4.4}$$

Побудуємо функцію Лагранжа для цієї задачі:

$$L^h = U^h(x^h, y^h) + \mu^h (y^h w + D s^h - x^h p)$$

Тоді необхідні умови оптимальності мають вигляд:

$$\begin{gathered} \frac{\partial U^h}{\partial x^h} = \mu^h p^T \\ \frac{\partial U^h}{\partial y^h} = -\mu^h w^T \\ y^h w + D s^h = x^h p \end{gathered} \tag{4.5}$$

Система (4.5) містить (n+m+1)H рівнянь. Додамо рівняння взаємної рівноваги:

$$\begin{gathered} \sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{e=1}^{E} q_i^e , i = \overline{1,n} \\ \sum_{h=1}^{H} y_j^h = \sum_{e=1}^{E} r_j^e , j = \overline{1,m} \end{gathered} \tag{4.6}$$

Рівняння (4.2), (4.5), (4.6) разом утворюють рівноважний стан ринкової економіки.

Закон Вальраса:

У ринковій економіці в стані рівноваги загальний попит продукту має дорівнювати загальній пропозиції продукту.

Математично це запишеться таким чином:

$$\sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{m} w_j y_j^h + \sum_{e=1}^{E} D^e = \sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h$$

Розписуючи значення D^e і групуючи елементи, ми доходимо до математичної форми закону:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \Big(\sum_{h=1}^{H} y_j^h - \sum_{e=1}^{E} r_j^e\Big) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Big(\sum_{h=1}^{H} x_i^h - \sum_{e=1}^{E} q_i^e\Big) \qquad (4.7)$$

Невідомі в стані ринкової рівноваги:

$$q^e, r^e, \lambda^e, e = \overline{1,E};$$

$$x^h, y^h, \mu^h, h = \overline{1,H};.$$

$$p; w$$

Їх всього (n+m+1)E + (n+m+1)H+n+m.

Виходячи з закону (4.7), система рівнянь (4.2), (4.5), (4.6) — лінійно-залежна. Одне з них можна викреслити. Наприклад, при $w_m \neq 0$ можна позбутися останнього рівняння в системі (4.6). Тоді рівнянь буде (n+m+1)E + (n+m+1)H+n+m-1. Тобто на одне менше, ніж невідомих.

Можна перейти до відносних цін — $\dfrac{p}{p_1}; \dfrac{w}{p_1}$, тому що

$$(p, w) \approx (ap, aw), a = \frac{1}{p_1}.$$

Тоді система — замкнена і може бути розв’язана. Іншими словами, можна знайти **стан рівноваги** — як сукупність цін рівноваги та рівноважних рішень.

Приклад 4.1

Нехай маємо 2 підприємства, кожне з яких виробляє свій продукт, і 2 споживача, що можуть купувати ці продукти і продають підприємствам свою працю.

Виробничі функції цих підприємств мають вигляд:

$$\Phi^1 = a_1\sqrt{r} - q^1 = 0$$

$$\Phi^2 = a_2\sqrt{r} - q^2 = 0,$$

де r — кількість ресурсу (праця), що витрачається на виробництво, q^1, q^2 — кількість кожного продукту.

Тоді умови оптимальності мають такий вигляд:

$$\frac{a_1}{2\sqrt{r_1}}\lambda_1 = \frac{a_2}{2\sqrt{r_2}}\lambda_2 = w;$$

$$\lambda_1 = p_1; \lambda_2 = p_2$$

де w — ціна за одиницю ресурсу.

Два споживача h_1, h_2 продають підприємствам свою працю: перший споживач — першому підприємству у розмірі y_1, другий — другому у розмірі y_2. Функції корисності для споживачів мають вигляд:

$$U^1(x,y) = 2x_1^1 + x_2^1 - x_1^1 x_2^1 - y_1$$

$$U^2(x,y) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 x_2^2 - y_2,$$

де x_i^h — кількість продукту i, що купує споживач h. Бюджетні обмеження запишуться таким чином:

$$p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 = w y_1$$

$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 = w y_2$$

Необхідні умови оптимальності для споживачів мають вигляд:

$$\frac{\partial U^1(x,y)}{\partial x_1} = 2 - x_2^1 = \mu^1 p_1$$

$$\frac{\partial U^1(x,y)}{\partial x_2} = 1 - x_1^1 = \mu^1 p_2$$

$$\frac{\partial U^2(x,y)}{\partial x_1} = 1 - x_2^2 = \mu^2 p_1$$

$$\frac{\partial U^2(x,y)}{\partial x_2} = 1 - x_1^2 = \mu^2 p_2$$

$$\frac{\partial U^1(x,y)}{\partial y_j} = -1 = -\mu^j w, j = \overline{1,2}$$

Крім того, додамо умови рівноваги Вальраса:

$$x_1^1 + x_1^2 = q^1$$

$$x_2^1 + x_2^2 = q^2$$

$$y_1 + y_2 = r_1 + r_2$$

Розв’язуючи рівняння, отримуємо оптимальні значення рівноваги:

$$\mu^1 = \mu^2 = \frac{1}{w}$$

$$x_1^1 = 1 - \frac{p_2}{w}; x_1^2 = 2 - \frac{p_2}{w}; x_2^1 = 2 - \frac{p_1}{w}; x_2^2 = 1 - \frac{p_1}{w}$$

$$r_1 = (\frac{p_1 a_1}{2w})^2; r_2 = (\frac{p_2 a_2}{2w})^2; q^1 = \frac{p_1 a_1^2}{2w}; q^2 = \frac{p_2 a_2^2}{2w}$$

Разом з умовами Вальраса ці рівняння утворюють рівноважну систему. Останнє рівняння можна опустити як залежне від інших.

Змінних, значення яких потрібно знайти, є 11, а рівнянь 10. Виходячи з того, що ціни на продукт і ціни на ресурс зв’язані подібністю:

$$(p,w) \approx (ap,aw),$$

не втрачаючи загальності, можна вважати, що w=1.

Підставляючи значення оптимальних параметрів в дві перші умови Вальраса, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3 - 2p_2 = \dfrac{p_1 a_1^2}{2w} \\ 3 - 2p_1 = \dfrac{p_2 a_2^2}{2w} \end{cases}$$

Якщо параметри виробничих функцій мають значення $a_1 = a_2 = \sqrt{2}$, то знайдемо оптимальні значення рівноваги:

$$p_1 = 1; p_2 = 1; x_1^1 = 0; x_1^2 = 1; x_2^1 = 1; x_2^2 = 0; q^1 = 1; q^2 = 1.$$

Загальний обсяг прибутку виробництва обчислюється за формулою:

$$D = p_1 q^1 + p_2 q^2 - w(r_1 + r_2) = 1 + 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 1.$$

Якщо виробництво піднімає свою потужність таким чином, що коефіцієнти виробничих функцій мають значення: $a_1 = a_2 = 2$, то стан рівноваги описується такими значеннями:

$$p_1 = 0,5; p_2 = 1;$$

$$x_1^1 = 0; x_1^2 = 1; x_2^1 = 1,5; x_2^2 = 0,5;$$

$$q^1 = 1; q^2 = 2$$

Загальний обсяг прибутку виробництва:

$$D = p_1 q^1 + p_2 q^2 - w(r_1 + r_2) = 0{,}5 + 2 - (\frac{1}{4} + 1) = 1{,}25 .$$

Тобто загальний прибуток зріс на 25 %.

Гіпотеза А. Сміта: *керуючись егоїстичними міркуваннями, економічні агенти досягають максимального підвищення загального добробуту, хоча безпосередньо це і не було їхнім наміром.*

МОДЕЛЬ ЗМІШАНОЇ ЕКОНОМІКИ: РІВНОВАГА З ГАРАНТОВАНИМ ДОХОДОМ

Підприємство, для якого виконується нерівність:

$$D^e = pq^e - wr^e > 0 ,$$

назвемо **рентабельним**. Загальний сукупний прибуток можна обчислити як суму прибутків усіх підприємств:

$$D(p,w) = \sum_{e=1}^{E} D^e(p,w) \tag{4.10}$$

Вирахуємо середній рівень доходу на всіх споживачів:

$$d = \frac{D(p,w)}{H} , \tag{4.11}$$

де H — кількість споживачів.

Нехай $I_1(p)$ — множина рентабельних підприємств, а $I_2(p,w)$ — нерентабельних.

Можна ввести мінімальний рівень доходу кожного споживача:

$$d^{\min} = sd, 0 \le s < 1 . \tag{4.12}$$

Припустимо, що для забезпечення будь-якого учасника ринку мінімальним доходом держава бере з рентабельних підприємств податок у розмірі $(1-s)100\%$. Тоді реальний прибуток підприємств можна обчислити за формулою:

$$D_R^e(p,w) = \begin{cases} sD^e(p,w), e \in I_1(p,w) \\ 0, e \in I_2(p,w) \end{cases} . \tag{4.13}$$

Доход споживача визначається за формулою:

$$I_h = \sum_{e=1}^{E} a_{he} D_R^e(p,w) + \max\{0, sd - \sum_{e=1}^{E} a_{he} D_R^e(p,w)\} , \tag{4.14}$$

де для всіх підприємств виконується умова

$$\sum_{h=1}^{H} a_{he} = 1$$

Для рівноваги має задовольнятися закон Вальраса:

$$\sum_{h=1}^{H} I_h = D(p,w)\,. \tag{4.15}$$

Рівняння (4.15) можна розкласти таким чином:

$$\sum_{h=1}^{H} I_h = \sum_{h=1}^{H}\sum_{e\in I_1} a_{he} sD^e(p,w) + \sum_{h=1}^{H} \max(s*0, sd - \sum_{e\in I_1} sD^e(p,w)) =$$

$$= s[\sum_{e\in I_1}\sum_{h=1}^{H} a_{he} D^e(p,w) + \sum_{h=1}^{H} \max(0, d - \sum_{e\in I_1} D^e(p,w)) = D(p,w)$$

звідки

$$s = \frac{D(p,w)}{\sum_{e\in I_1} D^e(p,w) + \sum_{i=1}^{H} \{0, d - \sum_{e\in I_1} a_{he} D^e(p,w))}\,. \tag{4.16}$$

Приклад 4.2

Нехай два підприємства (дві технології виробництва) виробляють сукупний продукт в кількості умовних одиниць $q^1 = 10; q^2 = 20$, використовуючи ресурси, відповідно, $r^1 = 5, r^2 = 10$. Ціни на одиниці продукту і ресурсу теж відомі: $p = 30, w = 10$. Оцінити кількість мінімального рівня доходу п'яти споживачів в умовах змішаної економіки, якщо розподіл доходів підприємств оцінюється матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оцінимо спочатку доходи підприємств.

$$D^1 = 300 - 50 = 250$$

$$D^2 = 450 - 100 = 350$$

Обидва підприємства рентабельні. Загальний доход (5.10) визначається сумою їх прибутків

$$D = D^1 + D^2 = 600\,,$$

а середній рівень доходу споживачів

$$d = \frac{D}{5} = 120 .$$

За формулою (4.16) оцінимо долю мінімального доходу споживача:

$$s = \frac{600}{600 + 32 + 0 + 0 + 92 + 120} = \frac{600}{844} = 0{,}71 .$$

Отже, мінімальний доход складає суму

$$d^{\min} = 0{,}71 * 120 = 85{,}2 .$$

Щоб забезпечити всіх споживачів цим мінімальним рівнем доходу, у підприємств вилучається податок у розмірі 29 % їх чистого прибутку. Тоді їх реальний дохід складає:

$$\begin{array}{l} D_R^1 = sD^1 = 0{,}71 * 250 = 177{,}5 \\ D_R^2 = sD^2 = 0{,}71 * 350 = 248{,}5 \end{array} .$$

Кожний споживач отримує наступну суму

$$I_1 = 0{,}3 * 177{,}5 + 0{,}1 * 248{,}5 + \max(0; 85{,}2 - 0{,}3 * 177{,}5 - 0{,}1 * 248{,}5) =$$

$$= 78{,}1 + 7{,}1 = 85{,}2$$

$$I_2 = 0{,}2 * 177{,}5 + 0{,}4 * 248{,}5 + \max(0; 85{,}2 - 0{,}2 * 177{,}5 - 0{,}4 * 248{,}5) =$$

$$= 134{,}9 + 0 = 134{,}9$$

$$I_3 = 0{,}5 * 177{,}5 + 0{,}4 * 248{,}5 + \max(0; 85{,}2 - 0{,}5 * 177{,}5 - 0{,}4 * 248{,}5) =$$

$$= 188{,}15 + 0 = 188{,}15$$

$$I_4 = 0 + 0{,}1 * 248{,}5 + \max(0; 85{,}2 - 0 - 0{,}1 * 248{,}5) =$$

$$= 24{,}8 + 60{,}6 = 85{,}2$$

$$I_5 = 0 + 0 + \max(0; 85{,}2 - 0 - 0) = 0 + 85{,}2 = 85{,}2$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Умови ринкової конкурентної рівноваги.
2. Закон Вальраса.
3. Модель рівновагиЕрроу-Дебре.
4. Модель рівноваги Вальда-Касселя.
5. Модель змішаної економіки.

Описати економіку чистого обміну, коли немає виробництва, а є три споживачі. Описати її стан рівноваги.

Завдання 5. Моделі макроекономічних систем

Теми завдання: види функцій колективної корисності. Задачі розподілу доходу в корпорації. Модель міжгалузевого балансу. Використання методу динамічного програмування для розподілу ресурсів.

Теоретичні положення завдання

Корпоративне рішення багатьох суб'єктів ринку визначає економічну політику. Суб'єкти ринку взаємодіють шляхом компромісів, угод чи договорів. Для кількісного вимірювання стану всіх агентів будується загальна **функція колективного добробуту**.

Корпоративні рішення мають свою цінність, бо не всіх цілей, поставлених суб'єктами ринку, можна досягти через саморинкову економіку, коли немає регуляторних механізмів (наприклад, зниження зростання цін на 2 %). В корпоративній економіці цілі регулюються не тільки ринковими механізмами $(z_1, z_2, ..., z_n)$, а й інструментальними механізмами $(x_1, x_2, ... x_s)$:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_s, z_1, z_2, ... z_n)\,, \qquad (5.1)$$

де $y_i, i = \overline{1,k}$ — цілі, що досягаються як інструментальними, так і ринковими механізмами.

Ефект деякої інструментальної змінної x_j визначається **мультиплікатором:**

$$m_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,, \qquad (5.2)$$

або його еластичністю:

$$e_{ij} = \frac{x_j}{f_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,. \qquad (5.3)$$

Приклад 5.1

Валовий національний продукт (y) визначається сумою особистого споживання (c), сумою інвестицій (i) та державними витратами на закупівлю товарів (g):

$$y = c + g + i\,. \qquad (5.4)$$

Нехай кількість споживання визначається рівнянням:

$c = a + b(1 - t)y$,

де b — гранична схильність до споживання, t — середня податкова ставка: 0<t<0. Тоді валовий національний продукт вираховується за формулою:

$$y = a + b(1 - t)y + g + i\,. \qquad (5.5)$$

Звідси:

$$y = \frac{a+i+g}{1-b(1-t)}.$$

Мультиплікатор впливу державних витрат має вигляд:

$$m_{yg} = \frac{\partial y}{\partial g} = \frac{1}{1-b(1-t)}. \qquad (5.6)$$

Якщо припустити, що $i = z_1 y - z_2 r$, де r — норми кредиту (%), z_1 — гранична схильність до збереження при умові макроекономічної рівноваги, коли кількість інвестицій дорівнює кількості заощаджень, тоді:

$$m_{yr} = \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{z_2}{1-b(1-t)-z_1}. \qquad (5.7)$$

Егалітаризм припускає, що до рівноважних агентів має бути рівне ставлення. Математичним варіантом цього є пропозиція філософа Джона Ролса, коли колективна корисність визначається корисністю найневдалішого агента:

$$W_1(u_1, u_2, ...u_m) = \min_i u_i. \qquad (5.8)$$

При цьому оптимальним ринковим набором буде такий, що підкоряється такій задачі оптимізації (максимізує значення функції (5.8)):

$$x^* = \arg\max_{x \in X} W_1(u_1(x), u_2(x), ..., u_m(x)). \qquad (5.9)$$

Утилітаризм виходить з максимізації середнього чи сукупного добробуту:

$$W_2(u_1, u_2, ..., u_m) = \sum_{i=1}^{m} u_i. \qquad (5.10)$$

Приклад 5.2

Два фермери вирощують кукурудзу. Продуктивність другого фермера вдвічі більша. Початкові запаси фермерів — 100 умовних одиниць праці. Функції корисності однакові:

$$u_i(x, y) = \sqrt[3]{y_i(100 - x_i)}, \qquad (5.11)$$

де x — витрати праці у годинах, y — вихід кукурудзи у бушелях.

Нехай фермери діють за утилітарною програмою:

$$\sqrt[3]{y_1(100 - x_1)} + \sqrt[3]{y_2(100 - x_2)} \to \max$$

Обмеження задачі мають вигляд:

$$y_1 + y_2 = x_1 + 2x_2$$

Тоді функція Лагранжа в задачі набуває вигляду:

$$L(x,y,\lambda)=\sqrt[3]{y_1(100-x_1)}+\sqrt[3]{y_2(100-x_2)}-\lambda(y_1+y_2-x_1-2x_2)\,,$$

а умови оптимальності:

$$\lambda=\frac{\sqrt[3]{y_1}}{\sqrt[3]{(100-x_1)^2}}=\frac{\sqrt[3]{100-x_1}}{\sqrt[3]{y_1^{\,2}}}=\frac{\sqrt[3]{y_2}}{2\sqrt[3]{(100-x_2)^2}}=\frac{\sqrt[3]{100-x_2}}{\sqrt[3]{y_2^{\,2}}}\,,$$

звідки виводяться співвідношення:

$$\begin{aligned}&100-x_1^*=4(100-x_2^*)\\&y_1=2y_2\qquad\qquad .\end{aligned}$$

Отже, більш продуктивний фермер має отримувати вдвоє менше продукції і наділяється для цього меншим обсягом праці у 4 рази. Тобто йому не вигідно бути продуктивним за утилітарної програми.

Нехай i=1,2,..., m — члени корпоративного суспільства. Вектор $u=(u_i, i=\overline{1,m})$ — розподіл корисностей, де кожна компонента є функцією на множині певних благ: $u_i=u_i(x), x\in X$.

Порядок колективного добробуту — це відношення впорядкованості R, таке що u(x)Rv(x) засвідчує більшість значення u(x) перед v(x). Відношення R має властивості рефлективності та транзитивності.

ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ ВИТРАТ ТА КОРПОРАТИВНІ ІГРИ

Нехай $M=(1,2,...,m)$ — множина споживачів, які можуть обслуговуватись на ринку товарів і послуг, $S\subseteq M$ — їх певна коаліція, $c(S)$ — загальна функція витрат коаліції:

$$C(S)=x_1+x_2+...+x_k\,, \tag{5.12}$$

де x_j — витрати агента j.

Природно зробити припущення.

Принцип відділення: коаліція ніколи не сплатить більше витрат на самостійне обслуговування:

$$\sum_{j\in S}x_j\le c(S)\,. \tag{5.13}$$

Принцип відсутності субсидій: витрати коаліції — це її внутрішні витрати без зовнішніх інвестицій:

$$\sum_{j\in S}x_j\ge c(M)-c(M\setminus S)\,. \tag{5.14}$$

Пару $(M,c);c(S)\geq 0;S\subseteq M$ назвемо грою з розподілом витрат. Ядром гри (M,c) є множина розподілів витрат $D=\{x:\sum_{j=1}^{m}x_j=c(M)\}$, які підкоряються принципу віддавання.

Введемо функцію прибутку споживачів:

$$v(S)=\max_{T\subset S}\{\sum_{j\in T}b_j-c(T),0\}. \qquad (5.15)$$

Пара (M,v) є **грою з трансферабельною корисністю** (ТК-гра), ядром якої є множина витрат X, що підкоряється умові:

$$\forall S\subset M\sum_{j\in S}x_j\geq v(S).$$

Приклад 5.3

Моделі розподілу прибутку та витрат

Нехай m агентів отримують доход $r>0$. Введемо c_j як витрати агентові j. Тоді умова того, що кооперація отримує прибуток, виглядає таким чином:

$$\sum_{j=1}^{m}c_j<r. \qquad (5.16)$$

Яку частку загального прибутку має отримати кожен агент? **Пропорційне рішення** — це коли прибуток агента має відповідати його витратам:

$$r_i=r\frac{c_i}{\sum_{j=1}^{m}c_j}. \qquad (5.17)$$

Егалітарне рішення — це коли кожен агент покриває свої видатки та отримує середню величину чистого прибутку:

$$\begin{aligned}r_i&=c_i+\frac{s}{m}\\ s&=r-\sum_{j=1}^{m}c_j\end{aligned}. \qquad (5.18)$$

Це є прикладом ТК-гри з функцією прибутку $v(M)=r$.

Далі припустимо, що с — вартість кінцевого продукту, а b_j — доход j-того агента. Виробництво є ефективним, якщо

$$\sum_{j=1}^{m}b_j-c>0. \qquad (5.19)$$

Тоді постає питання про розподілення витрат на виробництво. Пропорційне рішення набуває вигляду рівняння:

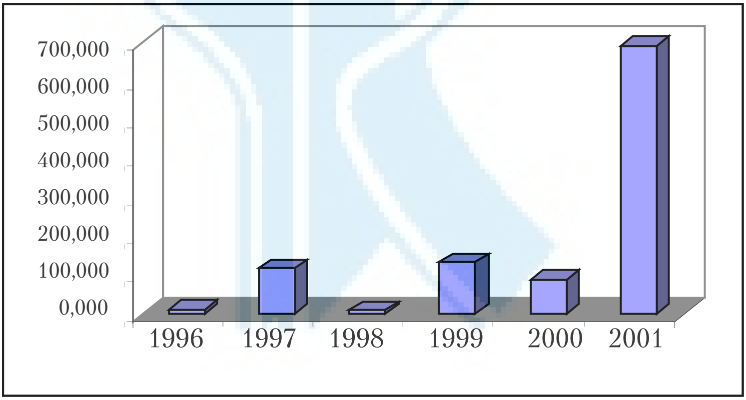
$$x_j = c\frac{b_j}{\sum_{i=1}^{m} b_i}. \tag{5.20}$$

При цьому справедлива умова $0 \le x_j \le b_j$.

Прибуток визначається формулою

$$v(S) = \max\{\sum_{i=1}^{m} b_i - c;0\}. \tag{5.21}$$

Корпоративні рішення завжди мали велике значення для розвитку економіки держави і всього світу. В попередньому році в Україні було випущено вдвічі більше корпоративних облігацій, ніж за п'ять попередніх років. Підприємства почали залучати кредитні ресурси для свого зростання. Динаміку випуску корпоративних облігацій видно з рисунка.



Випуск корпоративних акцій в Україні (млн грн)

Будемо сподіватися, що випуск корпоративних облігацій буде корисним для розширення діяльності економічних суб'єктів, забезпечення дешевими ресурсами, забезпечення стабільності умов займу та незалежності від кредиторів.

МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Міжгалузевий баланс виробництва та розподілу товарів (МГБ) — це економічна таблиця, де наводиться баланс розрахунків витрат на виробництво та розподіл продукції галузей економіки. Нехай маємо n галузей сектора народного господарства, кожна з яких виробляє свій продукт. За результатами виробництва складається балансовий звіт:

Баланс виробництва і споживання

Продукт	Розподіл витрат продукту між галузями			Кінцеве споживання	Валовий випуск
1	X_{11}	X_{12}	X_{1n}	Y_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	X_{2n}	Y_2	X_2
N	X_{n1}	X_{n2}	X_{nn}	Y_n	X_n
Оплата праці	$ЗП_1$	$ЗП_2$	$ЗП_n$		
Прибуток	$П_1$	$П_2$	$П_3$		
Всього	X_1	X_2	X_n		

де x_{ij} — обсяг продукту галузі і, що витрачається на виробництво в галузі j; x_j — загальний обсяг продукції j-тої галузі; y_j — обсяг продукції j-тої галузі, що витрачається у невиробничій сфері для споживання чи запасів; ЗПі — кількість виплаченої робітникам заробітної плати; Пі — величина прибутку галузі (чи збитку, якщо величина від'ємна).

Приклад 5.4

Нехай господарська система складається з трьох умовних галузей. Їх балансові розрахунки наведено в таблицях витрат та розподілу продукції.

Балансові рахунки витрат господарств

Рахунок	Галузь 1	Галузь 2	Галузь 3
Запаси готової продукції на початок року	10	0	0
Закуплено у галузі 1	0	70	0
Закуплено у галузі 2	20	0	70
Закуплено у галузі 3	50	0	0

Виплачено робітникам	70	20	30
Прибуток чи збиток	-10	20	20
Всього витрат	130	110	120

Балансові рахунки розподілу продукції господарств

Рахунок	Галузь 1	Галузь 2	Галузь 3
Запаси готової продукції на кінець року	10	20	30
Одержав від галузі 1	0	20	50
Одержав від галузі 2	70	0	0
Одержав від галузі 3	0	70	0
Одержано за споживання	60	0	40
Всього розподілено продукції	130	110	120

Ідея розрахунку балансу полягає у рівності загальних витрат та кількості розподіленої продукції по всіх галузях, що розглядаються. Тому в рядку прибуток чи збиток обчислюється значення з використанням даних з іншої таблиці.

Всі взаємозв'язки можна показати в одній таблиці, побудувавши МГБ для трьох галузей.

Міжгалузевий баланс господарської системи

Галузі	Галузі			Споживання	Приріст запасів	Всього
	A	B	C			
A	0	70	0	60	0	130
B	20	0	70	0	20	110
C	50	0	0	40	30	120
Зарплата	70	20	30			
Прибуток	-10	20	20			
Всього	130	110	120			360

Рівність суми всіх даних в рядках і стовпчиках таблиці свідчить про те, що вартість витрат разом з прибутком (чи збитком) відповідає вартості всієї випущеної продукції. Таким чином, для кожного продукту (молока, зерна чи комп'ютерів) ставиться балансова рівновага між наявністю та використанням.

Таблиця балансу відображає взаємозв'язки кількості продукції, які відображаються залежністю:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i + ПР_i = x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ji} + ЗП_i + П_i\,, \tag{5.22}$$

де ПР — приріст запасів галузі.

Введемо нові змінні, перевизначивши старі позначення:

$$a_{ij} := \frac{x_{ij}}{x_j}; c_j := \frac{y_j}{x_j}$$

Тоді вектор $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ назвемо вектором інтенсивності споживання, а a_{ij} — коефіцієнтами прямих витрат. Матриця, яка складається з коефіцієнтів прямих витрат $A = \{a_{ij}, i, j = \overline{1,n}\}$, називається **технологічною матрицею**.

Введемо вектор виробництва $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Тоді система рівнянь перетвориться на матричне співвідношення:

$$x = Ax + y + ПР\,,$$

чи

$$(I - A)x = y + ПР\,, \tag{5.23}$$

де $y = (y_1, y_2, ... y_n)^T, ПР = (ПР_1, ПР_2, ... ПР_n)^T$.

Система рівнянь має назву **статичної моделі Леонтьєва**.

Приклад 5.3

Обчислимо технологічну матрицю А для даних трьох галузей. Коефіцієнти прямих витрат мають відображати безпосередні зв'язки між галузями.

Маємо, наприклад, $a_{11} = 0; a_{\ 12} = \dfrac{70}{130} = 0{,}54; a_{21} = \dfrac{20}{110} = 0{,}18$.

$$\text{Тоді, } A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}54 & 0 \\ 0{,}18 & 0 & 0{,}64 \\ 0{,}42 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При існуванні оберненої матриці $(I - A)^{-1}$ існує розв'язок системи (5.23):

$$x = (I - A)^{-1} c\,. \tag{5.24}$$

Двоїстою системою до системи (5.23) є система в термінах цін на продукцію. Введемо вектор цін $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ на продукцію кожної галузі. Вектор $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ є кількістю заробітної плати за одиницю продукції в кожній галузі. Тоді можна записати двоїсту систему рівнянь:

$$p - pA = w, p \ge 0 \Rightarrow p(I - A) = w . \qquad (5.25)$$

Технологічну матрицю A назвемо **продуктивною**, якщо модель Леонтьєва має розв'язок, тобто є сумісною.

Нехай технологічна матриця моделі Леонтьєва невід'ємна, тобто

$$\forall i, j = \overline{1,n} \to a_{ij} \ge 0 .$$

S — множина індексів матриці: $S \subset U_n = \{1,2,..,n\}$. Її доповнення позначимо через $S^{'}$: $S^{'} = U_n \setminus S$.

Множина S називається ізольованою множиною, якщо виконується умова:

$$a_{ij} = 0 \forall i \in S, j \in S^{'} . \qquad (5.26)$$

Економічно це означає, що галузь з номером з S не використовує продукцію галузей з номерами з S'.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, S = \{1\}; S' = \{2,3\} .$$

Якщо в матриці А немає ізольованих множин, тоді матриця А називається **нерозкладною**.

Теорема Перрона-Фробеніуса

Якщо А невід'ємна і нерозкладна матриця, тоді існує таке її власне число λ_f , *що* $\forall k = \overline{1,m} | \lambda_k \le \lambda_f$. *Такому числу відповідає власний вектор* x_f *такий, що* $\forall i.j = \overline{1,m}; (x_f)_i \ne 0; sign(x_f)_i = sign(x_f)_j$

λ_f, x_f називаються числом та вектором Фробеніуса.

Приклад 5.4

Для нерозкладної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\|A - \lambda E\| = \lambda^2 - 1,5\lambda + 0,5 = 0$$

характерні власні числа: $\lambda_1 = 0,5;$ $\lambda_2 = 1$. Найбільше серед них і буде числом Фробеніуса $\lambda_f = 1$. Тоді маємо такі рівняння для визначення власних чисел:

$$(A - \lambda_f E)x = 0$$

$$p(A - \lambda_f E) = 0$$

Їх розв'язком є $x_f = (2,3); p_f = (1,1)$

Теорема (про продуктивність моделі Леонтьєва)
Для продуктивності моделі Леонтьєва

$$\begin{aligned} &x - Ax = c \\ &x \ge 0 \end{aligned}$$

необхідно і достатньо, щоб число Фробеніуса $\lambda_f < 1$.

Приклад 5.5.

Матриця

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ є при $a + b = 1$ непродуктивною, тому що характеристичне рівняння $(a - \lambda)^2 - b^2 = 0$ дає $\lambda_f = a + b = 1$

При роботі галузей народного господарства слід враховувати вектор **розподілу трудових витрат** $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$, де l_j — кількість людино-днів на одиницю інтенсивності галузі j.

За наявності загальних обсягів трудових ресурсів L>0 маємо додати до моделі Леонтьєва ще одне обмеження вигляду:

$$(x, l) \le L. \tag{5.26}$$

Отже, маємо таку **задачу про раціональний розподіл трудових витрат**:

$$\begin{aligned} &a \to \max \\ &x - Ax \ge ac \\ &(x, l) \le L \\ &x \ge 0. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Це задача лінійного програмування. Якщо A — продуктивна матриця, тоді ця задача має розв'язок.

Двоїста задача до задачі (5.27) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} &Lq \to \min \\ &lq \ge p(E - A) \\ &(c, p) \ge 1 \\ &p \ge 0, q \ge 0. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Вектор *p*, **вектор зумовлених оцінок трудових ресурсів**, можна інтерпретувати як вектор цін на продукцію, а *q* — як ставку заробітної плати.

Загальний фонд заробітної плати складає при цьому величину Lq, а

$y = \dfrac{x}{L}$ — валовий випуск на одного працівника, вектор *c* нехай описує оплату праці на одного працівника, тоді $Ax + Lc$ – є матрицею повних затрат, де L — кількість працівників.

Отже, задача розподілу трудових витрат має вигляд:

$$\begin{aligned} &Ax + Lc \le x \\ &(l, x) \le L \\ &x \ge 0, \end{aligned} \tag{5.29}$$

чи в термінах валового випуску на одного працівника:

$$\begin{aligned} &Ay + c \le y \\ &(l, y) \le 1 \\ &y \ge 0. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Теорема

Для продуктивності моделі розподілу трудових витрат з невід'ємною нерозкладною матрицею А необхідно і достатньо, щоб виконувалася нерівність:

$$l(E - A)^{-1}c \le 1\,,$$

тоді

$x = (E - A)^{-1}c$ *є розв'язком системи.*

Для моделі Леонтьєва (5.23) можна провести аналіз функції $x = x(c)$. Тобто оцінити, як буде змінюватися значення розв'язку моделі зі зміною величини споживання.

Якщо в моделі Леонтьєва матриця А невід'ємна, продуктивна і нерозкладна, то вектор попиту *c* має додатні значення (c>0), тоді функція $x(c) > 0$ має значення:

$$x(c) = (E - A)^{-1}c = c + Ac + A^2c + \ldots \tag{5.31}$$

Додамо до моделі вектор факторів виробництва $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$, матрицю витрат факторів B, де її елемент b_{ij} — витрати факторів i на одиницю продукції галузі *j*, вектор цін на продукцію галузей p, а також вектор цін на фактори виробництва *w*.

Задача максимізації національного продукту тоді може виглядати таким чином:

$$\begin{aligned} &(p, c) \to \max \\ &x = Ax + c \\ &Bx \le r \\ &x \ge 0, \end{aligned} \tag{5.32}$$

чи, більш скорочено, її можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} & p^T(E-A)x \to \max \\ & Bx \le r \\ & x \ge 0. \end{aligned} \qquad (5.33)$$

Двоїста задача до задачі максимізації продукту має вигляд:

$$\begin{aligned} & (w,r) \to \min \\ & p^T A + w^T B \ge p^T \\ & w \ge 0. \end{aligned} \qquad (5.34)$$

Розв’язки таких задач можна подати у вигляді функцій від цін: c=-c(p, w); r=r(p, w).

Станом рівноваги економіки при заданих A, B, c(p, w), r(p, w) називається набір (p^*,w^*,x^*,r^*,c^*), якщо виконуються такі умови:

$$\begin{aligned} & x^* = Ax^* + c^* \\ & Bx^* \le r^* \\ & p^{*T} A + w^{*T} B \ge p^{*T} \\ & (p^*,c^*) = (w^*,r^*). \end{aligned} \qquad (5.32)$$

При цьому, якщо $w_i^* = 0$, то відповідний фактор назвемо вільним, для якого виконується нерівність:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^* < r_i^* .$$

Якщо ж $w_i^* > 0$ — фактор є дефіцитним.

Якщо функції: c=c(p, w); r=r(p, w) однозначні та неперервні для будь-яких додатних значень своїх аргументів, то стан рівноваги існує.

ОСНОВИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

Динамічні моделі характеризують зміни економічних процесів за часом. Динамічна система описується рівняннями:

1) аналітичний вигляд:

$$y(t) = f(t,u(t)) . \qquad (5.35)$$

2) система неперервних диференційних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dt} = g(y,u,t) \\ & y(t_0) = y_0. \end{aligned} \qquad (5.36)$$

3) система різницевих (дискретних) рівнянь:

$$\begin{aligned} &y(t+h)=G(y(t),u(t),t) \\ &y(t_0)=y_0. \end{aligned} \tag{5.37}$$

де $y(t)=(y_1(t),y_2(t),...,y_n(t))$ — вектор функцій стану системи, $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_r(t))$ — вектор керуючих параметрів, від яких може залежати поведінка системи з часом.

Задача теорії керування полягає у тому, щоб спробувати перевести систему зі стану $y(t_0)$ в стан $y(t_1)$ за час $T=t_1-t_0$, використовуючи керуючі параметри $u(t)$.

Приклад 5.6

Розглянемо систему (5.38) як систему з керуванням, де керуючим параметром виступає ціна на товар $u_1(t)=P(t)$.

$$\begin{cases} C(t)=1000-4P(t) \\ S(t)=S(t-1)+0{,}5[C(t-1)-S(t-1)]. \end{cases} \tag{5.38}$$

Якщо відоме початкове значення системи $S(0)=100$, чи можна за скінченний час $t=0,1,2,...,T$ перевести систему в інший стан $C(T)=S(T)=200$? Бажано, щоб цей час був найменшим:

$$T\to\min \tag{5.39}$$

Аналізуючи перше рівняння системи (5.38), можна побачити, що попит бажаного стану $C(T)=200$ може досягти при ціні $P(T)=200$.

До бажаного стану систему можна перевести різними шляхами зміни ціни на товар.

Шлях 1

t	P	C	S
0	180	280	100
1	195	220	190
2	201	196	205
3	200	200	200
4	200	200	200

Шлях 2

t	P	C	S
0	175	300	100
1	200	200	200
2	200	200	200

Як бачимо, шлях 2 оптимальніший за умовою (5.39), бо досягається бажаний стан за меншу кількість кроків. Умова типу (5.39) називається критерієм оптимальності і в загальному вигляді описується таким чином:

$$J = \int_{t_0}^{T} f_0(y,u,t)dt \to \min. \qquad (5.40)$$

Якщо підінтегральну функцію взяти $f_0(y,u,t) \equiv 1$ і $t_0 = 0$, то легко приходимо до умови (5.39).

Система (5.36), (5.40) (або (5.37), (5.41)) є формальним записом задачі оптимального керування (ЗОК). В основі розв’язування задач керування методом динамічного програмування лежить **принцип оптимальності.**

Оптимальна траєкторія системи $x^0(t)$, яка відповідає оптимальному керуванню $u^0(t)$ при часі від t_0 до T, співпадає в часі від $t_1 > t_0$ до T з розв’язком задачі (5.36), (5.40) $x^1(t),u^1(t)$ при початкових умовах $x^1(t_1) = x^0(t_1)$. Принцип дозволяє звести розв’язування ЗОК для часу $[t_0,T]$ до послідовного розв’язування деякої кількості більш простих задач з одним кроком часу $[t_i,t_{i+1}]$.

Для дискретної задачі оптимального керування системою (5.37) з наступним критерієм керування

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F_0(x(t_k),u(t_k),t_k) + F(x(t_N)) \to \min \qquad (5.41)$$

вводиться функція:

$$s_k(x(t_k),t_k) = \min_u \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} F_0(x(t_k),u(t_k),t_k) + F(x(t_N)) \right\},$$

де $t_k = t_0 + kh$.

Нехай $u^0(t_k)$ — оптимальне керування задачі. Тоді, виходячи з (5.37) і (5.41), можна записати:

$$s_k(x_k,t_k) = F_0(x_k,u_k^0,t_k) + \sum_{j=k+1}^{N-1} F_0(x_j,u_j^0,t_j) + F(x_N) =$$

$$= F_0(x_k,u_k^0,t_k) + s_{k+1}(x_{k+1},t_{k+1}),$$

де $x_k = x(t_k), u_k = u(t_k)$.

Використавши видозмінене рівняння (5.41):

$$x_{k+1} = G(x_k, u_k, t_k)\,,$$

запишемо відоме **рівняння Белмана** в різницевій формі:

$$s_k(x_k, t_k) = \min_{u_k}\left\{F_0(x_k, u_k, t_k) + S_{k+1}(G(x_k, u_k, t_k), t_{k+1})\right\}. \qquad (5.42)$$

Виходячи з рівняння (5.42), виникає можливість розв’язувати задачу (5.37), (5.41) поступово, починаючи з кінцевого кроку часу $t_N = T$, для якого слід знайти

$$s_{N-1}(x_{N-1}, t_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} F(x_N) \qquad (5.43)$$

Поступово знаходиться оптимальне керування $u^0_{N-1}, u^0_{N-2}, ..., u^0_0$ як розв’язок задачі оптимізації (5.37), (5.41). Після чого, використовуючи рівняння (5.37), вираховується оптимальна траєкторія системи.

Приклад 5.7

Використовуючи принцип оптимальності і рівняння Белмана (5.42), розв’яжемо задачу про швидкодію прикладу 5.6.

Використовуючи знання про кінцевий стан системи

$$S(t_N = T) = 200, C(t_N) = 200\,,$$

можемо визначити, що оптимальне керування в цей час буде $u_N = 200$.

Динамічну систему (5.38) можна подати одним рівнянням:

$$S_k = S(t_k) = S_{k-1} + 0{,}5(1000 - 4u_{k-1} - S_{k-1}) = 0{,}5S_{k-1} - 2u_{k-1} + 500\,.$$

Бажання досягнути потрібного стану ($S_N = 200$) можна описати таким критерієм керування:

$$F(x_N) = [200 - x_N]^2 \to \min \qquad (5.44)$$

Тоді рівняння (5.43) виглядатиме:

$$S_{N-1}(x_{N-1,} t_{N-1}) = \min_{u_{N-1}}[S_N - 200]^2 = \min_{u_{N-1}}[300 + 0{,}5S_{N-1} - 2u_{N-1}]^2$$

Прирівнявши до нуля похідну по u_{N-1}

$$\frac{d[300 + 0{,}5S_{N-1} - 2u_{N-1}]^2}{du_{N-1}} = 0$$

знайдемо оптимальне керування на передостанньому кроці:

$$\frac{-4[300 + 0{,}5S_{N-1} - 2u_{N-1}]^2}{du_{N-1}} = 0$$

$$u^0_{N-1} = \frac{300 + 0.5S_{N-1}}{2} = 150 + 0.25S_{N-1}$$

Якщо підставити це оптимальне керування в рівняння системи, отримуємо:

$$S_N = 200 = 0{,}5S_{N-1} - 300 - 0{,}5S_{N-1} + 500\,.$$

Звідси видно, що при будь-якому початковому стані $S(0) = S_0$ систему можна перевести в стан $S(1) = 200$ за 1 крок керуванням $u_0 = 150 + 0{,}25S_0$.

Так, в нашому випадку $S(0) = 100, u^0 = 150 + 0{,}25 * 100 = 175$, в чому можна переконатися з таблиці на с. 58.

Приклад 5.8

Розглянемо можливість застосування методу динамічного програмування для розв'язування задач розподілення ресурсів.

Нехай існує резерв ресурсів у кількості 40 одиниць, які можна надати двом галузям (цехам, підприємствам тощо). Віддача галузей:

Ресурс	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**
Прибуток галузі 1	10	30	40	45	45
Прибуток галузі 2	20	35	40	45	45

Чи можна так розподілити ресурс на дві галузі, щоб отримати максимальний сукупний прибуток?

Введемо позначення: u_i — кількість ресурсу, яке вкладається у i -ту галузь, x_i — прибуток i -тої галузі.

Як можна переконатися, процес керування (кількість вкладеного ресурсу) підпорядковується умові:

$$u_1 + u_2 = 40\,. \tag{5.45}$$

Будемо розглядати $x_1(u_1), x_2(u_2)$ як динамічний процес, який складається з 2 кроків. Критерій оптимальності має вигляд:

$$J = x_1 + x_2 \to \max\,.$$

Тоді умова запишеться таким чином: потрібно знайти таке керування $u_2 \le 40$, щоб

$$s_2(x_2, t_2) = \max_{u_2 \le 40} x_2\,. \tag{5.46}$$

Таких керувань два: $u_2^0 = 20$ або $u_2^0 = 25$.

Для кожного з цих керувань слід перевірити умову для $k = 1$.

$$\begin{aligned} s_1(x_1, t_1) &= \max_{u_1 + u_2 \le 40} [x_1(40 - 20 = 20) + 45; x_1(40 - 25 = 15) + 45] = \\ &= \max[45 + 45; 40 + 45] = 90 \end{aligned} \tag{5.47}$$

для $u_1 = 20$.

Отже, оптимальне керування розподіленням ресурсів має розв'язок такий: кожній галузі слід надати 20 одиниць ресурсу. Загальний прибуток буде максимальний і становитиме 90 одиниць.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Функції колективної корисності. Егалітарні та утилітарні рішення.
2. Порядки колективного добробуту.
3. Індекс нерівності.
4. Задачі розподілу витрат та прибутків. Корпоративні ігри.
5. Три міста $A1, A2, A3$ розташовані на площині $R2$. Корисність у точці x міста Ai визначається віддаленістю до x зі знаком "–".Показати, що оптимальні розв'язки утворюють трикутник. Знайти максимальне значення функції колективної корисності.
6. Два агенти ринку можуть виробляти сукупний продукт у кількості $x>0$ з функцією витрат $c(x)=1+x$. Потрібно поділити частку витрат з загальним розміром 1 довільним чином $1=c1+c2$, а решту — порівну. Таким чином, витрати визначаються рівністю $ci+x/2$, а функції корисності такі: $u_1=3\sqrt{x}-(c1+x); u_2=\sqrt{x}-(c2+x)$. Знайти розподіл витрат з егалітарною функцією корисності.
7. Вигляд моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу.
8. Модель міжнародної торгівлі.
9. Задача про раціональний розподіл трудових ресурсів.
10. Модель максимізації національного продукту.
11. Порівняльна статика моделі Леонтьєва.
12. Стан рівноваги економіки у моделі Леонтьєва.
13. Знайти число і вектор Фробеніуса для матриць:

$$A_1=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Дослідити їх продуктивність.

14. Нехай в моделі обміну між країнами всі країни розбиті на m груп, що не перетинаються. Країна S_r купує продукти тільки у S_{r+1}, а S_m у S_1. Початковий вектор розподілу прибутків має вигляд: $D^0 = (d,0,0,...,0)$. Дослідити динаміку зміни стану вектора D^0 після кожного етапу обміну.

15. Побудувати таблицю міжгалузевого балансу, обчисливши прибуток для кожної галузі, і знайти технологічну матрицю для трьох галузей економіки A, B, C.

Рахунок	**Галузь 1**	**Галузь 2**	**Галузь 3**
1	2	3	4
Запаси готової продукції на початок року	0	0	0
Куплено у галузі 1	5	60	10
1	2	3	4
Куплено у галузі 2	25	21	0
Куплено у галузі 3	10	20	0
Виплачено робітникам	40	30	120
Прибуток чи збиток	?	?	?
Запаси готової продукції на кінець року	0	0	0
Одержано за споживання	45	14	26
Всього розподілено продукції	156	124	220

16. Розподілити ресурс $R = 120$ між трьома галузями виробництва, якщо їх віддача має такий вигляд.

Вкладений ресурс	Дохід галузі 1	Дохід галузі 2	Дохід галузі 3
10	20	15	5
20	30	25	12
30	40	40	20
40	45	50	26
50	47	55	32
60	47	55	33

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Пономаренко О. І.* Основи математичної економіки. — К.: Техноцентр, 1995.

2. *Вітлінський В. В.* Моделювання економіки: Навч. посіб. — К.: КНЕУ, 2004.
3. *Лысенко Г., Макаров К. Г., Петренко В. П., Филипов А. В.* Леверидж,. Экономические приложения. — Донецк, 1999. — 104 с.
4. *Колесников Л. А.* Основы теории системного подхода. — М., 1988.
5. *Иванилов Ю. П., Лотов А. В.* Математические модели в экономике. — М.: Наука, 1979.
6. *Клир Дж.* Системология. Автоматизация системных задач. — М.: Радио и связь, 1990. — 534 с.
7. *Ланкастер К.* Математическая экономика. — М., 1972.
8. *Лотов А. В.* Введение в эконом.-математическое моделирование. — М.: Наука, 1984. — 392 с.
9. *Петров А. А., Поспелов И. Г., Шинанин А. А.* Опыт математического моделирования экономики. — М.: Энергоиздат, 1996. — 544 с.
10. *Флейшман С.* Основы систематологии. — М., 1982.
11. *Ульянченко О. В.* Дослідження операцій в економіці — Харків: Гриф, 2001. — 580 с.

Додаткова

12. *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н.* Алгоритмы и методы решения задач оптимизации. — К.: Выща шк., 1980. — 511 с.
13. *Моделювання* економічної динаміки: Навч. посіб./ Лавріньский Г. В., Пшенишнюк О. С., Устинко С. В., Шарапов О. Д. — К.: Атака, 2006. — 276 с.
14. *В. Е. Гмурман.* Теория вероятности и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 1977. — 479 с.
15. *Санто Б.* Инновация как средство экономического развития: Пер с венг. — М.: Прогресс, 1996.
16. *Ч. Хикс.* Основные принципы планирования экспериментов. — М.: Мир, 1967, — 406 с.
17. *Акофф Р.* Планирование будущего корпорации. — М.: Прогресс, 1985.
18. *Лір В. Е.* Імітаційне моделювння фінансового забезпечення інноваційних проектів // Фінанси України.— 1997. — № 12. — 79 — 86 с.
19. *Бергстром А.* Построение и применение экономических моделей. — М.: Прогресс, 1970.

20. *Лысенко Ю. Г. и др.* Экономическая динамика. — Донецк, 2000. — 176 с.
21. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
22. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 224 с.
23. *Э. Хеди, Д. Диллон* Производственные функции в сельськом хозяйстве: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1965. — 600 с.
24. *Бродський Ю. Б., Желябовський В. М., Загородній Ю. В.* Інформатика і системологія. — Житомир, 2002. — 188 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленко*
Комп’ютерне верстання *І. О. Музика*

Зам. № ВКЦ-4237

Формат 60×84/$_{16}$. Папір офсетний.
Друк трафаретний, ротаційний.
Тираж 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП “Видавничий дім “Персонал”
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. ХХ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008 р.