

МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

**НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**  
дисципліни  
**“ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ”**  
(для бакалаврів)

Київ  
ДП «Видавничий дім «Персонал»  
2012

## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Підготовлено кафедри інформатики та інформаційних технологій професором *А. В. Кузьміним*

Затверджено на засіданні кафедри інформатики та інформаційних технологій (протокол № 6 від 30.06.04)

Перезатверджено на засіданні кафедри інформатики та інформаційних технологій (протокол № 10 від 19.06.08)

Перезатверджено на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (протокол № 49 від 13.07.11)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*

**Кузьмін А. В.** Навчальна програма дисципліни “Чисельні методи в інформатиці” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2012. — 15 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Чисельні методи в інформатиці”, теми практичних занять, питання для самоконтролю, варіанти контрольних робіт, варіанти практичних завдань, а також список літератури.

© Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2012  
© ДП «Видавничий дім «Персонал», 2012

Метою дисципліни “Чисельні методи в інформатиці” є поглиблене вивчення теорії застосування наближених обчислень для різних класів задач, що зустрічаються у практиці. Значна увага приділяється задачам лінійної алгебри, як прямим, так і ітераційним методам, зокрема з матрицями спеціального вигляду, проблемі знаходження власних чисел і власних функцій.

Вивчаються методи наближеного обчислення розв’язків нелінійних рівнянь та їх систем.

Розглядаються питання наближення лінійних функціоналів, а саме задачі наближення функцій в різних просторах і наближеного обчислення інтегралів, а також питання інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, як для задач Коші, так і для граничних задач.

Даються початкові знання щодо знаходження розв’язків рівнянь в частинних похідних для основних операторів другого порядку за допомогою методу сіток і сітково-варіаційних (проекційних) методів.

Навчальний курс базується на знаннях, здобутих при вивченні таких дисциплін, як математичний аналіз, лінійна алгебра та аналітична геометрія, диференціальні рівняння, диференціальні рівняння в частинних похідних.

Завдання курсу — ознайомити студентів з основними типами задач наближеного знаходження розв’язків, навчити їх оцінювати точність результатів.

## ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН дисципліни “ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ”

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
1	2
	<b>Змістовий модуль I. Чисельні методи алгебри і наближення функцій</b>
1	Вступ. Предмет і метод дисципліни, роль обчислювальних методів у математичному моделюванні
2	Чисельні методи алгебри

1	2
3	Наближення функцій
4	<b>Змістовий модуль II. Чисельне інтегрування</b>
5	Чисельне інтегрування
6	Методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь
	Методи інтегрування граничних задач для рівнянь у частинних похідних
Разом годин: 135	

**ЗМІСТ**  
**дисципліни**  
**“ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ”**

**Змістовий модуль I. Чисельні методи алгебри і наближення функцій**

**Тема 1. Вступ. Предмет і метод дисципліни, роль обчислювальних методів у математичному моделюванні**

Наближені обчислення як універсальний спосіб знаходження розв'язку різних математичних задач. Основні проблеми використання чисельних методів на прикладі. Роль ЕОМ при реалізації чисельних методів.

Теорія похибок і заокруглень при виконанні обчислень засобами ЕОМ.

*Література [1; 2; 4]*

**Тема 2. Чисельні методи алгебри**

Прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь із симетричною матрицею, факторизація матриці. Системи лінійних рівнянь з матрицями спеціального вигляду (тридіагональні, п'ятидіагональні, розріджені). Аналіз кількості арифметичних операцій у прямих методах. Задача знаходження оберненої матриці.

Ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Збіжність однокрокових ітераційних методів. Ітераційні

методи з чебишевським набором параметрів. Метод спряжених градієнтів.

Проблема власних чисел і власних векторів. Степеневий метод і метод обернених ітерацій розв'язування часткової проблеми власних значень. Повна проблема власних значень.

Нелінійні рівняння й системи рівнянь. Проблема аналізу наявності розв'язків. Метод простої ітерації та метод Ньютона. Збіжність. Методи мінімізації функціоналів.

*Література [1; 2; 4; 6]*

**Тема 3. Наближення функцій**

Загальна задача наближення функцій в евклідовому просторі. Інтерполювання функцій. Многочлени Лагранжа і Ньютона. Скінченні та розділені різниці. Інтерполювання з кратними вузлами за заданими значеннями функції та її похідної, поліном Ерміта. Точність інтерполювання. Стратегія вибору інтерполяційних формул.

Поняття про середньоквадратичне наближення функцій. Метод найменших квадратів. Швидке дискретне перетворення Фур'є. Поняття про рівномірне наближення функцій.

Інтерполювання функцій за допомогою сплайнів.

*Література [3–6]*

**Змістовий модуль II. Чисельне інтегрування**

**Тема 4. Чисельне інтегрування**

Квадратурні формули інтерполяційного типу, формули Ньютона – Котеса.

Квадратурні формули найвищого алгебраїчного ступеня точності. Оцінка точності квадратурних формул. Правило Рунге оцінки апостеріорної оцінки точності.

Квадратурні формули спеціального типу. Поняття про обчислення багатовимірних інтегралів.

*Література [2–5]*

**Тема 5. Методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь**

Однокрокові методи інтегрування задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. Методи Рунне – Кутта. Багатокрокові

методи інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь. Методи Адамса. Стійкість методів інтегрування, збіжність. Використання апостеріорних методів оцінки точності інтегрування задач Коші.

Поняття жорстких систем диференціальних рівнянь. Методи інтегрування задач Коші для жорстких систем.

Граничні задачі для звичайних диференціальних рівнянь, методи їх інтегрування. Метод редукції до задач Коші. Метод лінеаризації. Метод продовження за параметром. Метод прогонки. Метод сіток для лінійної граничної задачі другого порядку.

*Література* [4; 8]

### **Тема 6. Методи інтегрування граничних задач для рівнянь у частинних похідних**

Різницева апроксимація диференціальних операторів (Лапласа, хвильового, теплопровідності). Методи апроксимації граничних і початкових умов. Поняття стійкості та збіжності різницевих схем. Методи розв'язування сіткових рівнянь.

Поняття про проєкційні та варіаційні методи. Проєкційно-різницеві та варіаційно-різницеві методи інтегрування граничних задач у частинних похідних. Поняття про метод скінченних елементів.

*Література* [3; 6; 7]

### **ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

1. Прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
3. Методи обчислення розв'язків лінійних систем з матрицями спеціального вигляду.
4. Методи простої ітерації для систем нелінійних рівнянь.
5. Метод Ньютона для систем нелінійних рівнянь.
6. Інтерполювання функцій многочленами Лагранжа і Ньютона.
7. Наближення функцій за допомогою сплайнів.
8. Середньоквадратичне наближення функцій.
9. Використання системи MAPLE для розв'язання задач наближення функцій.

10. Знаходження визначених інтегралів за допомогою квадратурних формул інтерполяційного типу, апостеріорна оцінка точності.
11. Знаходження визначених інтегралів за допомогою квадратурних формул найвищого ступеня точності, апостеріорна оцінка точності.
12. Використання системи MAPLE для розв'язання задач чисельного інтегрування.
13. Інтегрування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь однокроковими методами.
14. Інтегрування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь багатокроковими методами.
15. Використання системи MAPLE для розв'язання задач інтегрування звичайних диференціальних рівнянь.
16. Методи сіток інтегрування граничної задачі для звичайних диференціальних рівнянь.
17. Метод стрільби інтегрування лінійної граничної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь.
18. Метод сіток для знаходження розв'язків граничних задач рівняння Лапласа.
19. Метод сіток інтегрування нестационарних задач (хвильового рівняння, рівняння теплопровідності).

### **ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Якими основними загальними параметрами характеризуються чисельні методи розв'язування математичних задач?
2. Що називається абсолютною та відносною похибкою числа?
3. Як поведуться абсолютна й відносна похибки під час виконання операцій додавання та віднімання?
4. Як поведуться абсолютні похибки під час виконання операцій множення та ділення?
5. Яке правило застосовують для обчислення похибки функції?
6. Які значущі цифри наближеного числа називають вірними?
7. Лінійні рівняння і системи рівнянь.
8. Множини розв'язків лінійних систем.
9. Умови існування розв'язків системи.
10. Наближені розв'язки.
11. Які методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь називають прямими?

12. З якою метою використовують вибір головного елемента в методі Гаусса?
13. Якою кількістю арифметичних дій характеризується прямий і обернений хід методу Гаусса?
14. Як використовується метод Гаусса для обчислення оберненої матриці та визначника?
15. Що називається нормою та числом обумовленості матриці?
16. Які матриці називають погано обумовленими? Які підходи використовують для розв'язування систем лінійних рівнянь з такими матрицями?
17. Яка основна ідея методу квадратних коренів для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
18. Що називається ітераційним уточненням розв'язку, в яких випадках він застосовується?
19. Які методи розв'язування систем лінійних рівнянь називаються ітераційними?
20. Яка умова збіжності методу простої ітерації?
21. Яку точність забезпечує метод простої ітерації на  $n$ -му кроці?
22. Яку ітераційну схему має метод Зейделя?
23. Які умови збіжності ітераційного методу з чебишевським набором параметрів?
24. Що називається три-, п'ятидіагональною матрицею?
25. Яку кількість арифметичних операцій потребує метод прогонки?
26. У чому полягає метод поділу навпіл? Його переваги та недоліки.
27. Як записуються наближення за методом простої ітерації. Умови збіжності методу?
28. Що називають методом Ньютона? Достатні умови його збіжності.
29. Який з методів розв'язування систем нелінійних рівнянь має найбільшу швидкість збіжності?
30. Що називається повною та частковою проблемами власних чисел?
31. У чому полягає ідея методу обертання для розв'язування повної проблеми власних чисел?
32. Що таке степеневий метод розв'язування часткової проблеми власних чисел? Від чого залежить швидкість його збіжності?

33. Як оцінити точність наближеного розв'язку?
34. Як оцінити множини розв'язків?
35. У якому випадку кожен вектор  $\epsilon$  розв'язком?
36. Записати інтерполяційний многочлен Лагранжа.
37. Розділені різниці. Інтерполяційний многочлен у формі Ньютона.
38. Похибка задачі інтерполювання, вигляд залишкового члена у формі Ньютона та Лагранжа.
39. Інтерполяційний многочлен Ньютона для рівних проміжків. У чому суть інтерполяції вперед, назад, на середину?
40. Що називається інтерполяційним многочленом Ерміта?
41. Що називається кубічним інтерполяційним сплайном?
42. Що називається кубічним згладжуючим сплайном?
43. Які системи лінійних рівнянь виникають при розв'язуванні проблеми інтерполювання кубічними сплайнами?
44. Сформулювати задачу рівномірного наближення функцій.
45. Що називають точками чебишевського алтернансу?
46. Які методи використовують для знаходження многочленів, близьких до многочленів найкращого рівномірного наближення?
47. Сформулювати загальну задачу середньоквадратичного наближення функцій.
48. У чому полягає метод найменших квадратів знаходження многочлена найкращого середньоквадратичного наближення?
49. Сформулювати загальну задачу рівномірного наближення функцій.
50. Записати вигляд функціоналу для знаходження середньоквадратичного наближення функції на дискретній множині точок.
51. Що називають квадратурними формулами інтерполяційного типу?
52. Що розуміють під ступенем точності квадратурної формули інтерполяційного типу?
53. Як обчислюється точність квадратурної формули інтерполяційного типу?
54. Що називається квадратурними формулами найвищого алгебраїчного ступеня точності?
55. Який максимальний алгебраїчний ступінь точності може бути забезпечено квадратурною формулою для  $n$ -точок?

56. Як вибираються вузли та вагові коефіцієнти квадратурної формули найвищого алгебраїчного ступеня точності?
57. У чому полягає правило Рунге практичної оцінки точності обчислення інтегралів?
58. Які принципи використовуються для побудови кубатурних формул інтерполяційного типу відповідного порядку точності?
59. Які методи інтегрування використовуються для функцій, що належать до спеціальних класів гладкості?
60. Методи підвищення точності числового інтегрування.
61. Який вигляд має загальна схема методів Рунге — Кутта для інтегрування задач Коші?
62. Що називають похибкою методів Рунге — Кутта на кроці інтегрування?
63. Які методи інтегрування задач Коші називають двосторонніми?
64. Записати вигляд багатокрокового методу інтегрування задачі Коші.
65. Як оцінити похибку багатокрокового методу на кроці інтегрування?
66. Які багатокрокові методи інтегрування називаються неявними, у чому їх переваги та недоліки перед явними методами?
67. У чому ідея методу Рунге апостеріорної оцінки точності методу інтегрування на кроці?
68. Яка головна особливість жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь?
69. Яким методом треба надавати перевагу при інтегруванні жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь?
70. Які проблеми виникають при застосуванні неявних методів інтегрування задач Коші?
71. Яку ідею закладено в методі стрільби (редукції до задач Коші) при розв'язуванні граничних задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь?
72. Що називають методом лінеаризації при інтегруванні граничної задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь?
73. Яку ідею покладено в основу методу продовження розв'язку за параметром?
74. Записати різницеве рівняння для звичайного диференціального рівняння другого порядку.
75. Записати різницевий вираз граничних умов третього роду для граничної задачі другого порядку.

76. Яку структуру матиме система лінійних алгебраїчних рівнянь при застосуванні методу сіток до граничної задачі для рівняння другого порядку?
77. Яким методом треба розв'язувати цю систему?
78. Метод Гауса для п'ятидіагональної системи.
79. Методи підвищення порядку апроксимації.
80. Узагальнені різницеві моделі.
81. Записати апроксимацію двовимірного оператора Лапласа на нерівномірній сітці.
82. Який порядок апроксимації має різницевий аналог оператора Лапласа?
83. Що називається шаблоном різницевого оператора?
84. Записати неявну різницеву схему для одновимірного рівняння теплопровідності.
85. Записати різницеву схему з вагою для рівняння коливання струни.
86. Записати різницеву схему для двовимірного рівняння теплопровідності.
87. Що називається стійкістю різницевої схеми за початковими даними?
88. Як пов'язані між собою поняття збіжності, стійкості й апроксимації для різницевих схем?
89. Який клас методів називається проєкційним, яка схема обчислення розв'язків для цього класу методів?
90. Який клас методів називають проєкційно-різницеvими, в якому вигляді шукають розв'язки в цьому методі?

## **ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ**

### *Теоретичні завдання*

У таблиці наведено питання з переліку контрольних питань. Першим зазначено номер питання, через дробову риску — номер теми. Відповіді на питання подаються у письмовому вигляді згідно з номером варіанта контрольної роботи. Номер варіанта вибирається за останньою цифрою номера залікової книжки студента.

Номер питання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Варіант 1	1/1	10/2	22/2	5/3	11/3	5/4	8/5	1/5	1/6	5/6
Варіант 2	2/1	1/2	21/2	4/3	12/3	4/4	7/5	3/5	2/6	6/6
Варіант 3	3/1	2/2	20/2	4/3	13/3	1/4	6/5	5/5	3/6	7/6
Варіант 4	4/1	3/2	19/2	2/3	14/3	2/4	5/5	7/5	4/6	8/6
Варіант 5	5/1	4/2	18/2	1/3	15/3	6/4	4/5	13/5	5/6	9/6
Варіант 6	6/1	5/2	17/2	6/3	16/3	7/4	3/5	12/5	6/6	10/6
Варіант 7	1/1	6/2	16/2	7/3	1/3	8/4	2/5	14/5	7/6	1/6
Варіант 8	2/1	7/2	15/2	8/3	2/3	9/4	1/5	15/5	8/6	2/6
Варіант 9	3/1	8/2	14/2	9/3	3/3	3/4	9/5	16/5	9/6	3/6
Варіант 10	4/1	9/2	13/2	10/3	4/3	6/4	10/5	2/5	10/6	4/6

### Практичні завдання

**Завдання 1.** Для заданої функції  $f(x)$  на вказаному проміжку  $[a; b]$  побудувати інтерполяційний многочлен 10-го степеня з вузлами інтерполяції  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ ;  $h = (b - a) / 10$ .

Побудувати графіки вихідної функції та інтерполяційного многочлена. Використати вбудовану процедуру *interp* ( $X, Y, x$ ) *MAPLE* [9].

**Завдання 2.** Для заданої функції  $f(x)$  на вказаному проміжку  $[a; b]$  побудувати сплайн 1-го та 3-го порядків за зазначеним набором вузлів  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ ;  $h = (b - a) / 10$ .

Побудувати графіки вихідної функції та сплайнів. Використати вбудовану процедуру *spline* ( $X, Y, x, n$ ) *MAPLE* [9].

**Завдання 3.** Методом найменших квадратів для заданої функції  $f(x)$  на вказаному проміжку  $[a; b]$  побудувати поліном 5-го степеня за зазначеним набором вузлів

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, 10; \quad h = (b - a) / 10.$$

Як функцію, що наближує  $f(x)$ , обрати  $G_5(x) = \sum_{i=1}^5 A_i L_i(x)$ ,

де  $L_i(x)$  — поліном Лежандра  $i$ -го степеня. Побудувати графіки вихідної функції та найкращого середньоквадратичного наближення. Використати процедуру *LeastSquares*() пакету *CurveFitting* *MAPLE* [9].

**Завдання 4.** Наближено обчислити інтеграл від функції  $f(x)$  на вказаному проміжку  $[a; b]$  з точністю  $10^{-8}$ . Для обчислення інтегралу застосувати квадратурну формулу Ньютона — Котеса та квадратурну формулу Гаусса. Використати вбудовані процедури *evalf*, *Int* *MAPLE* та відповідні параметри процедури *Int\_Gquad* (метод Гаусса) *NCruler* (метод Ньютона — Котеса) [9].

### ВАРІАНТИ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

$$1. f(x) = \frac{2x+1}{(x_2+2x+1)^2}, \quad x \in [0; \pi/4].$$

$$2. f(x) = \frac{x^2+2}{(x^2+1)}, \quad x \in [0; \pi/4].$$

$$3. f(x) = \frac{\sqrt{2x+1+1}}{\sqrt{(2x+1)}}, \quad x \in [0; \pi/4].$$

$$4. f(x) = \cos^{-2} x \ln(1+tgx), \quad x \in [0; \pi/4].$$

$$5. f(x) = \cos^4 \sin^3 x, \quad x \in [0; 0,5].$$

$$6. f(x) = (x+1)3^x, \quad x \in [0; 0,5].$$

$$7. f(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} 2^{\arcsin x}, \quad x \in [0; 0,5].$$

$$8. f(x) = \frac{x^4+3x^2-1}{x^2+2x^2+x}, \quad x \in [1; 2].$$

$$9. f(x) = \frac{x \ln(x^2+1)}{x_2+1}, \quad x \in [1; 2].$$

$$10. f(x) = \sin x \arcsin(\cos x), \quad x \in [0; \pi/2].$$

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

#### Основна

1. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. — К.: Вища шк., 2000.
2. Ляшко І. І., Макаров В. Л., Скоробагатько А. А. Методы вычислений. — К.: Вища шк., 1977. 408 с.



3. *Бурківська В. Л., Войцехівський С. О., Кузьмін А. В. та ін.* Методи обчислень: Практикум на ЕОМ. — К.: Вища шк., 1995. — 304 с.
  4. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 598 с.
  5. *Волков Е. А.* Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
  6. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
- Додаткова*
7. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
  8. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И.* Вычислительные методы высшей математики. Т. 1, 2. — Минск: Вышэйш. шк., 1975.
  9. *Васильев А. Н.* MAPLE 8. Самоучитель. Диалектика, 2003.

## **ЗМІСТ**

Пояснювальна записка.....	3
Тематичний план дисципліни “Чисельні методи в інформатиці”.....	3
Зміст дисципліни “Чисельні методи в інформатиці” ....	4
Теми практичних занять.....	6
Питання для самоконтролю.....	7
Варіанти контрольних робіт.....	11
Варіанти практичних завдань.....	13
Список літератури .....	13

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*  
 Редактор *Л. В. Логвиненко*  
 Комп’ютерне верстання *О. Л. Тищенко, О. М. Бабаєва*

Зам. № ВКЦ-4171

Формат 60×84/16. Папір офсетний.  
 Друк ротатійний трафаретний. Наклад 30 пр.  
 Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)  
 03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП  
 ДП «Видавничий дім «Персонал»  
 03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. ХХ  
*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
 суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008*  
 Надруковано в друкарні ДП «Видавничий дім «Персонал»