

МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

**НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**  
**дисципліни**  
**“ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ”**  
**(для бакалаврів)**

Київ  
ДП «Видавничий дім «Персонал»  
2013

## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Метою дисципліни “Диференціальні рівняння” є поглиблене вивчення теорії звичайних диференціальних рівнянь, методів їх точного інтегрування, дослідження якісних властивостей звичайних диференціальних рівнянь, методів побудови розв’язків лінійних диференціальних рівнянь у вигляді узагальнених степеневих рядів.

Навчальний курс ґрунтується на знаннях, здобутих у процесі вивчення таких дисциплін, як “Математичний аналіз”, “Лінійна алгебра” та “Аналітична геометрія”.

Завдання курсу — ознайомити студентів з основними типами диференціальних рівнянь, що можуть бути проінтегровані у квадратах, і опанувати методами такого інтегрування та методами постановки граничних задач і задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

## ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН дисципліни “ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ”

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
1	2
	<b>Змістовий модуль I. Методи розв’язування диференціальних рівнянь</b>
1	Вступ. Звичайні диференціальні рівняння та їх використання для моделювання
2	Елементарні диференціальні рівняння і методи їх інтегрування
3	Диференціальні рівняння вищих порядків: основні поняття та означення
	<b>Змістовий модуль II. Система диференціальних рівнянь та їх властивості</b>
4	Лінійні диференціальні рівняння і системи лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами
5	Загальна теорія систем диференціальних рівнянь
6	Теорія стійкості

Підготовлено кандидатом фізико-математичних наук, професором кафедри інформатики та інформаційних технологій *А. В. Кузьміним*

Затверджено на засіданні кафедри інформатики та інформаційних технологій (протокол № 5 від 27.05.04)

Перезатверджено на засіданні кафедри прикладної математики і програмування (протокол № 10 від 19.06.09)

Перезатверджено на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (протокол № 26 від 13.07.11)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*

**Кузьмін А. В.** Навчальна програма дисципліни “Диференціальні рівняння” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2013. — 14 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Диференціальні рівняння”, теми практичних занять, питання для самоконтролю, вказівки до виконання контрольної роботи, варіанти контрольних робіт, а також список літератури.

© Міжрегіональна Академія  
управління персоналом (МАУП), 2013  
© ДП «Видавничий дім «Персонал», 2013

1	2
7	Лінійні диференціальні рівняння другого порядку
8	Граничні задачі
Разом годин: 162	

**ЗМІСТ**  
**дисципліни**  
**“ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ”**

**Змістовий модуль I. Методи розв’язування диференціальних рівнянь**

**Тема 1. Вступ. Звичайні диференціальні рівняння та їх використання для моделювання**

Джерело виникнення звичайних диференціальних рівнянь. Приклади математичних моделей і процесів, що описуються звичайними диференціальними рівняннями.

Основні задачі теорії звичайних диференціальних рівнянь, способи їх розв’язання на прикладі найпростішого рівняння.

Рівняння першого порядку. Розв’язок рівняння, явний і неявний розв’язки рівняння. Задача Коші, достатні умови існування та єдиного розв’язку. Загальний розв’язок, загальний інтеграл.

*Література [1; 3; 5]*

**Тема 2. Елементарні диференціальні рівняння і методи їх інтегрування**

Рівняння з відокремлюваними змінними. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Рівняння Рікатті, рівняння Бернуллі. Рівняння в повних диференціалах, інтегруючий множник. Однорідне рівняння, узагальнене однорідне рівняння.

Рівняння, що не розв’язане стосовно першої похідної. Неповні рівняння. Рівняння Лагранжа та Клеро. Задача про ізогональні траєкторії. Перші інтеграли рівняння. Довідник Камке, його структура та засоби використання.

*Література [1; 2; 6]*

**Тема 3. Диференціальні рівняння вищих порядків: основні поняття та означення**

Задача Коші, достатні умови існування та єдиного розв’язку. Поняття про граничну задачу. Загальний розв’язок, загальний інтеграл.

*Література [1; 7]*

**Змістовий модуль II. Система диференціальних рівнянь та їх властивості**

**Тема 4. Лінійні диференціальні рівняння і системи лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами**

Загальна структура розв’язку лінійного рівняння  $n$ -го порядку. Однорідні лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами. Фундаментальна система розв’язків. Метод Ейлера. Фазова площина лінійного однорідного рівняння другого порядку. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння. Загальний розв’язок. Метод варіації довільної сталої. Функція Коші. Рівняння з квазіполіномом у вільному члені. Лінійні рівняння  $n$ -го порядку, що приводяться до рівнянь з постійними змінними.

*Література [1; 2–6]*

**Тема 5. Загальна теорія систем диференціальних рівнянь**

Загальні питання теорії систем у нормальній і симетричній формах. Залежність розв’язків від початкових даних і параметрів. Інтегральні нерівності.

Системи лінійних диференціальних рівнянь. Фундаментальна система розв’язків та її існування. Побудова загального розв’язку. Розв’язки неоднорідних систем рівнянь, метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Лінійні системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Побудова фундаментального розв’язку у випадку простих і кратних коренів. Інтегрування неоднорідної системи методом варіації довільних сталих.

*Література [2–5]*

**Тема 6. Теорія стійкості**

Загальні поняття теорії стійкості. Стійкість за Ляпуновим. Стійкість автономних систем, найпростіші точки покою. Метод функцій

Ляпунова дослідження стійкості. Дослідження стійкості по першому наближенню. Критерій Рауса-Гурвіца.

*Література* [1–3]

### **Тема 7. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку**

Перетворення форми запису рівняння, дивергентна форма запису, загальні властивості розв'язку. Інтегрування диференціальних рівнянь у вигляді степеневих рядів. Гіпергеометричне рівняння, рівняння Бесселя.

*Література* [3; 6]

### **Тема 8. Граничні задачі**

Граничні задачі для лінійних рівнянь другого порядку. Поняття функції Гріна, інтегральне представлення розв'язку.

Задачі Штурма – Ліувілля, властивості власних чисел і власних функцій задачі Штурма – Ліувілля. Теорема Стеклова про розвинення функцій в ряд Фур'є. Задача Штурма – Ліувілля з умовами перодичності та з іншими неklasичними граничними умовами. Лінійні рівняння з виродженням у граничній точці.

*Література* [2; 3]

### **ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

1. Неповні рівняння та рівняння з відокремлюваними змінними.
2. Лінійне однорідне та неоднорідне рівняння першого порядку.
3. Рівняння, що зводяться до лінійного рівняння першого порядку (Рікатті, однорідне).
4. Рівняння в повних диференціалах і пошук інтегруючого множника.
5. Диференціальні рівняння вищих порядків і деякі методи їх інтегрування.
6. Лінійне однорідне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку з постійними коефіцієнтами.
7. Метод варіації довільної сталої для пошуку розв'язків неоднорідних рівнянь.
8. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
9. Системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.
10. Пошук розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь.

11. Дослідження стійкості за початковими даними системи лінійних диференціальних рівнянь і лінійного рівняння  $n$ -го порядку.
12. Побудова розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку у вигляді узагальненого степеневого ряду.
13. Пошук власних функцій і власних чисел задачі Штурма – Ліувілля, розвинення функцій в ряд Фур'є за системою власних функцій.
14. Використання програми символьних обчислень MAPLE для знаходження загальних розв'язків диференціальних рівнянь та розв'язків задач Коші, граничних задач.

### **ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку?
2. Яке рівняння називається лінійним?
3. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння?
4. Що називається частинним розв'язком диференціального рівняння?
5. Навести приклади математичних моделей, що записуються у вигляді звичайних диференціальних рівнянь.
6. Приклад лінійної моделі.
7. Приклад нелінійної моделі.
8. Метод степеневого ряду.
9. Приклад використання методу степеневого ряду.
10. Приклад різницевого методу.
11. Яке рівняння називають рівнянням з відокремлюваними змінними?
12. Як записати розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними в загальному вигляді, у формі Коші?
13. Запишіть лінійне рівняння першого порядку.
14. У чому полягає метод Лагранжа пошуку розв'язку неоднорідного рівняння?
15. Що називається рівнянням з однорідними функціями, якою заміною змінних це рівняння зводиться до лінійного?
16. Яке рівняння називають рівнянням Рікатті, якою заміною його можна звести до однорідного?
17. Яке рівняння називають рівнянням у повних диференціалах?

18. Яка ознака використовується для перевірки того, що рівняння є в повних диференціалах?
19. Як знайти загальний розв'язок рівняння в повних диференціалах?
20. Що називається рівнянням Лагранжа, до якого рівняння воно може бути зведене?
21. Що називається диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку?
22. Як записати задачу Коші для рівняння  $n$ -го порядку?
23. Навести умови теореми про існування і єдиний розв'язок задачі Коші.
24. Що називається граничною задачею для рівняння  $n$ -го порядку?
25. Що називається загальним розв'язком і загальним інтегралом рівняння  $n$ -го порядку?
26. Степеневий метод для рівнянь  $n$ -го порядку.
27. Приклад степеневого методу  $m$ -го порядку.
28. Приклад математичної моделі  $n$ -го порядку.
29. Різницьевий метод для рівняння  $n$ -го порядку.
30. Метод розв'язування різцевого рівняння.
31. Запишіть загальний вид лінійного рівняння  $n$ -го порядку.
32. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного рівняння  $n$ -го порядку?
33. У чому полягає метод Ейлера пошуку розв'язку лінійного однорідного рівняння  $n$ -го порядку з постійними коефіцієнтами. Що називають характеристичним поліномом?
34. Які частинні розв'язки є в однорідного рівняння у випадку дійсних коренів?
35. Які частинні розв'язки є в однорідного рівняння у випадку комплексних коренів?
36. Які частинні розв'язки є в однорідного рівняння у випадку кратних дійсних коренів?
37. Які частинні розв'язки є в однорідного рівняння у випадку кратних комплексних коренів?
38. У чому полягає метод варіації довільної сталої для пошуку розв'язку неоднорідного рівняння?
39. Які методи пошуку частинного розв'язку неоднорідного рівняння існують для квазіполіноміального вільного члена?
40. Яка ознака появи коливного процесу?
41. Яка форма запису системи рівнянь називається нормальною?
42. Яка форма запису системи називається симетричною?
43. Що називають загальним розв'язком системи рівнянь?
44. Що називають задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь?
45. Що називається граничною задачею для системи диференціальних рівнянь?
46. Сформулюйте теорему про існування і єдиний розв'язок задачі Коші?
47. Запишіть лінійну систему диференціальних рівнянь першого порядку.
48. Яку структуру має розв'язок однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь?
49. Яку структуру має розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь?
50. У чому полягає метод Ейлера інтегрування системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь? Що називається характеристичним рівнянням?
51. У чому полягає ідея методу варіації довільної сталої для диференціальної системи лінійних неоднорідних рівнянь?
52. Яка різниця між розв'язком задачі Коші та загальним розв'язком.
53. Приклад математичної моделі лінійної системи.
54. Властивості лінійних моделей.
55. Дайте визначення за Ляпуновим розв'язку системи диференціальних рівнянь.
56. Сформулюйте першу теорему Ляпунова про стійкість.
57. Сформулюйте другу теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість.
58. Сформулюйте загальну теорему про стійкість системи лінійних однорідних рівнянь.
59. Яку ідею покладено в основу методу дослідження стійкості за першим лінійним наближенням?
60. Сформулюйте критерій Рауса-Гурвіца дослідження стійкості системи лінійних однорідних рівнянь.
61. Запишіть загальний вид лінійного рівняння другого порядку.
62. Запишіть дивергентну форму лінійного рівняння другого порядку.
63. У чому полягає метод узагальнених степеневих рядів для інтегрування розв'язку диференціального рівняння другого порядку?

64. Яке рівняння називають гіпергеометричним?
65. Яке рівняння називають рівнянням Бесселя дійсного та уявного аргументів?
66. Які особливості пошуку другого лінійно-незалежного розв'язку рівняння Бесселя у випадку цілого значення параметра?
67. Приклад використання методу узагальненого степеневого ряду.
68. Приклад математичної моделі для другого порядку.
69. Побудова стійкої моделі.
70. Методи прогнозування нестійких процесів.
71. Запишіть загальну постановку граничної задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку.
72. Що називають функцією Гріна для диференціального оператора другого порядку?
73. Які властивості має функція Гріна?
74. Як записати розв'язок граничної задачі через функцію Гріна.
75. Запишіть загальний вид задачі Штурма — Ліувілля.
76. Що називають власними числами та власними функціями задачі Штурма — Ліувілля?
77. Які особливості мають власні функції та власні числа задачі Штурма — Ліувілля?
78. Запишіть задачу Штурма — Ліувілля з умовами періодичності.
79. Сформулюйте теорему Стеклова про розв'язку в ряд Фур'є?
80. Що називають граничною задачею з виродження та які типи граничних умов можуть використовуватися в точках виродження?
81. Властивості математичної моделі для стійкої динамічної системи.
82. Ознаки стійкості лінійної динамічної системи.
83. Застосування узагальненого методу степеневих рядів для наближеного розв'язування узагальненої крайової задачі.
84. Використання методу степеневих рядів у чисельно-аналітичних методах наближеного розв'язування крайових задач.
85. Різницеві апроксимації диференціального рівняння для чисельної побудови наближеного розв'язку крайової задачі.
86. Використання методів прогонки для розв'язування лінійних крайових задач.
87. Комбіновані чисельно-аналітичні методи для побудови кусочно-поліноміальних наближень до розв'язку крайової задачі.
88. Побудова наближених розв'язків у класі сплайн-функцій.

89. Способи уточнення розв'язків крайової задачі у класі сплайн-функцій.
90. Комбіновані методи різницевої апроксимації і сплайн-апроксимації.

### **ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ**

Номер контрольної роботи студент визначає за останньою цифрою номера своєї залікової книжки. Якщо номер закінчується на 0, то студент виконує варіант 10.

Контрольна робота складається з 20 завдань: 8 перших — теоретичні, останні 12 — практичні. Письмові відповіді на теоретичні питання мають бути максимально докладними.

Виконуючи практичні завдання, слід пам'ятати, що кожне з них складається з двох прикладів, які вибираються з того самого розділу посібника [8], а завдання з розділів 2, 3, 9, 11 містять по два приклади з однаковими номерами з першої та другої групи прикладів. Таким чином, контрольна робота містить 8 теоретичних питань і 24 практичних завдання. Перед відповіддю на запитання необхідно записати умову відповідного завдання.

### **ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ**

Номер теми теоретичного завдання	Номер варіанта теоретичного питання									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
До теми 1	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
До теми 2	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
До теми 3	5	4	3	2	1	2	1	3	4	5
До теми 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	7
До теми 5	3	2	1	5	6	4	7	8	10	9
До теми 6	5	4	3	2	1	6	4	3	2	1
До теми 7	3	2	1	6	5	4	2	3	4	5
До теми 8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Номер розділу	Номер задачі									
	1, 21	2, 22	3, 23	4, 24	5, 25	6, 26	7, 27	8, 28	9, 29	10, 30
Розділ 1	1, 21	2, 22	3, 23	4, 24	5, 25	6, 26	7, 27	8, 28	9, 29	10, 30
Розділ 2 (2)	1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5	6, 6	7, 7	8, 8	9, 9	10, 10
Розділ 3 (2)	1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5	6, 6	7, 7	8, 8	9, 9	10, 10
Розділ 4	1, 21	2, 22	3, 23	4, 24	5, 25	6, 26	7, 27	8, 28	9, 29	10, 30
Розділ 5	1, 21	2, 22	3, 23	4, 24	5, 25	6, 26	7, 27	8, 28	9, 29	10, 30
Розділ 6	1, 21	2, 22	3, 23	4, 24	5, 25	6, 26	7, 27	8, 28	9, 29	10, 30
Розділ 7	1, 21	2, 22	3, 23	4, 24	5, 25	6, 26	7, 27	8, 28	9, 29	10, 30
Розділ 8	1, 21	2, 22	3, 23	4, 24	5, 25	6, 26	7, 27	8, 28	9, 29	10, 30
Розділ 9 (2)	1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5	6, 6	7, 7	8, 8	9, 9	10, 10
Розділ 10	1, 21	2, 22	3, 23	4, 24	5, 25	6, 26	7, 27	8, 28	9, 29	10, 30
Розділ 11 (2)	1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5	6, 6	7, 7	8, 8	9, 9	10, 10
Розділ 12	1, 21	2, 22	3, 23	4, 24	5, 25	6, 26	7, 27	8, 28	9, 29	10, 30

## **СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

### *Основна*

1. *Матвеев Н. Н.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — Минск: Вышэйш. шк., 1974. — 766 с.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 331 с.
3. *Ляшко И. И. и др.* Дифференциальные уравнения. — К.: Выща шк., 1981. — 504 с.
4. *Гудименко Ф. С., Павлюк И. А., Волкова В. А.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — К.: Выща шк., 1972. — 156 с.
5. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Минск: Вышэйш. шк., 1970. — 357 с.
6. *Самойленко А. М. и др.* Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. — К.: Выща шк., 1984. — 408 с.
7. *Краснов М. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Высш. шк., 1983. — 128 с.

### *Додаткова*

8. *Вертелева О. В., Самусенко П. Ф.* Дифференциальні рівняння: методичні вказівки до виконання самостійних, контрольних і розрахункових робіт. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. — 53 с.
9. *Васильев А. Н.* Маале 8. Самоучитель. — М.; СПб.; К., 2003. — 352 с.

## ***ЗМІСТ***

Пояснювальна записка.....	3
Тематичний план дисципліни “Диференціальні рівняння” .....	3
Зміст дисципліни “Диференціальні рівняння” .....	4
Теми практичних занять.....	6
Питання для самоконтролю .....	7
Вказівки до виконання контрольної роботи .....	11
Варіанти контрольних робіт.....	11
Список літератури .....	12

Відповідальний за випуск    *А. Д. Вегеренко*  
Редактор                            *Н. П. Підлужна*  
Комп’ютерне верстання        *О. Л. Тищенко*

Зам. № ВКЦ-4157

Формат 60×84/16. Папір офсетний.

Друк ротатійний трафаретний. Наклад 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)  
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»  
03039 Київ-39, пр. Червонозоряний, 119, літ. XX

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008*