МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
з дисципліни
“ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ”
(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2009

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики та програмування, кандидатом фіз.-мат. наук *В. І. Панчуком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 6 від 14.02.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Панчук В. І. Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни "Чисельні методи математичної фізики" (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2009. — 24 с.

Методична розробка містить пояснювальну записку, розгорнутий тематичний план дисципліни "Чисельні методи математичної фізики", приклади розв'язання типових задач, теми для самостійного вивчення, питання для самоконтролю, задачі та вправи для самостійного розв'язання, список рекомендованої літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Навчальний курс “Чисельні методи математичної фізики” є одним із завершальних курсів математичної освіти за фахом “Прикладна математика”. Він передбачає виклад важливих засад побудови та аналізу найважливіших чисельних методів розв’язування рівнянь у частинних похідних, які є теоретичним фундаментом математичного моделювання у проблемах фізики, механіки суцільного середовища, охорони довкілля тощо.

Метою вивчення дисципліни є актуалізація раніше вивченого слухачами теоретичного матеріалу з математичної фізики, оволодіння методами чисельного розв’язування рівнянь математичної фізики, з’ясування місця і значенням цих методів у загальному обчислювальному експерименті з дослідження фізичних процесів, формування практичних умінь та навичок розроблення математично-комп’ютерного інструментарію та його використання при розв’язуванні деяких задач математичної фізики.

Для освоєння матеріалу навчальної програми “Чисельні методи математичної фізики” студенти повинні знати диференціальне та інтегральне числення, аналітичну геометрію, функціональний аналіз, основи варіаційного числення; володіти чисельними методами розв’язання систем алгебричних рівнянь і звичайних диференціальних рівнянь; мати чітке уявлення про постановки задач математичної фізики з початковими та межовими умовами; вміти визначати властивості лінійних операторів і вирішувати для них задачі на власні значення тощо.

Запропонований курс розрахований на підготовку фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня “бакалавр” з напряму “Прикладна математика”.

У результаті вивчення дисципліни “Чисельні методи математичної фізики” студенти повинні:

знати

- важливі поняття теорії чисельного розв’язання рівнянь у частинних похідних;
- основні чисельні методи, схеми та обчислювальні алгоритми розв’язання різних типів задач математичної фізики, їх властивості та можливості;

уміти

- будувати та аналізувати найважливіші чисельні методи розв’язування різних типів рівнянь з частинними похідними;

- самостійно оцінувати точність та швидкість збіжності скінченно різницевих схем;
- застосовувати обчислювальний апарат для знаходження чисельних розв'язків практично важливих фізичних задач;
- орієнтуватися у виборі необхідної літератури для виконання практичних завдань;
- аналізувати отримані результати чисельних експериментів тощо.

У процесі практичних занять студент повинен також навчитися працювати із сучасними пакетами програм чисельного розв'язання основних типів рівнянь з частинними похідними.

При вивченні курсу значна увага приділяється систематичній і послідовній самостійній та індивідуальній роботі студентів, спрямованій на досконале опанування дисципліни, творчому пошуку шляхів розв'язання запропонованих задач, умілому використанню наявних літературних джерел тощо.

У процесі роботи з метою самоконтролю набутих знань студенти повинні уміти виконувати тестові та розрахункові завдання. Розрахункові задачі сприяють формуванню у студента вміння застосовувати теоретичні знання в конкретних практичних обчисленнях.

Пропоновані методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни "Чисельні методи математичної фізики" містять розгорнутий тематичний план дисципліни із розкриттям змісту тем. У кожному змістовому модулі наведені приклади розв'язання типових задач, теми для самостійного вивчення, список питань для самоконтролю рівня оволодіння теоретичним матеріалом, задачі та вправи для самостійного розв'язання, а також список літератури.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
дисципліни
"ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ"

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
	Змістовий модуль І. Попередні відомості та загальні поняття про чисельні методи розв'язання рівнянь математичної фізики
1	Чисельне математичне моделювання фізичних процесів
2	Скінченно різницевий метод розв'язання рівнянь з частинними похідними
3	Розв'язання рівнянь з частинними похідними методом скінченних елементів та методом прямих
	Змістовий модуль ІІ.Різницеві методи розв'язання задач для параболічних та еліптичних рівнянь
4	Поняття апроксимації, рахункової стійкості та збіжності різницевих схем
5	Різницеві методи розв'язання мішаної задачі для параболічного рівняння з однією просторовою змінною
6	Різницеві схеми підвищеної точності
7	Економічні різницеві схеми для багатовимірної параболічної задачі. Схема змінних напрямків
8	Розв'язання задач для рівняння Пуассона
	Змістовий модуль ІІІ. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь гіперболічного типу та інтегральних рівнянь
9	Різницеві схеми розв'язання хвильового рівняння
10	Різницеві схеми для рівняння переносу
11	Метод характеристик
12	Чисельні методи розв'язання інтегральних рівнянь
Разом годин: 162	

ЗМІСТ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
з дисципліни
“ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ”

Змістовий модуль І. Попередні відомості та загальні поняття про чисельні методи розв’язання рівнянь математичної фізики

Тема 1. Чисельне моделювання фізичних процесів та явищ

Математичні моделі та обчислювальні експерименти для дослідження фізичних процесів та явищ. Основні постановки задач математичної фізики.

Література [1; 6–8; 10; 16]

Тема 2. Скінченно різницевий метод розв’язання рівнянь з частинними похідними

Основні етапи реалізації методу. Сітка й сіткова функція. Проблема апроксимації межових умов. Умови розв’язування різницевих рівнянь. Ітераційні та релаксаційні методи (метод Якобі, метод Зейделя, метод верхньої релаксації, багатосітковий релаксійний метод Федоренка). Прямі методи.

***Практичне заняття* 1.** Побудова простого різницевого аналога задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1;$

$$\begin{cases} u = 0, & \text{з обох боків і угорі} \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & 0 \le x \le 1,\ y = 0. \end{cases}$$

2. Побудова алгоритму розв’язування різницевої задачі за методом Лібманна.

3. Поширення цього методу на розв’язування складніших задач Діріхле.

Література [1; 3–10; 16]

Завдання для самостійної роботи

1. Отримайте різницеву апроксимацію для другої похідної $f\,(x)$

$f'(x) = [f(x + h) - 2\,f(x) + f(x - h)]\,/\,h^2.$

2. До якої алгебричної системи зведеться задача Діріхле для рівняння Пуассона у середині квадрата

(*РЧП*) $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y),\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,$

(*ГУ*) $u(x, y) = g(x, y)$ на межі,

якщо її розв'язувати методом скінченних різниць?

Розв'яжіть задачу 2, якщо

(*РЧП*) $u_{xx} + u_{yy} + 2u = f(x, y)$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$,

(*ГУ*) $u(x, y) = g(x, y)$ на границі.

3. Як би ви розв'язували задачу Неймана усередині квадрата

(*РЧП*) $u_{xx} + u_{yy} += 0$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$,

$$(ГУ)\quad \begin{cases} u = 0 \quad \text{на верхній, нижній та лівій сторнах квадрата,} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 1, \quad 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

методом скінченних різниць?

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте роль чисельних методів у дослідженні фізичних процесів та явищ.
2. Наведіть основні постановки різницевих задач математичної фізики.
3. Опишіть основні етапи реалізації різницевого методу.
4. Розкажіть про сітку й сіткову функцію.
5. Що називають різницевою схемою та її шаблоном?
6. Розгляньте основну ідею сіткового методу на прикладі задачі Діріхле для рівняння Пуассона.
7. Різницева апроксимація диференціальних операторів у частинних похідних.
8. Чому виникає проблема апроксимації граничних умов?
9. Розкажіть про особливості матриць алгебричної (різницевої) системи, до якої зводяться диференціальні рівняння та відповідні граничні умови.

Література [6; 10; 13; 16]

Практичне заняття 2. Знаходження чисельного розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$u_{xx} + u_{yy} = -2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$;

$$\begin{cases} u(0, y) = u(1, y) = 0, \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \end{cases}$$

методами Якобі, Зейделя, верхньої релаксації.

Порівняйте ці методи на збіжність.

Завдання для самостійної роботи

1. Виконайте дві ітерації для задачі Діріхле

(*РЧП*) $u_{xx} + u_{yy} += 0$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$;

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u = 0 & \text{на верхній і бічних сторонах квадрата,} \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

використовуючи ітераційний метод Лібманна.

2. Побудуйте *блок-схему алгоритму* розв'язування задачі Діріхле у квадраті

($РЧП$) $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), 0 < x < 1, 0 < y < 1;$

($ГУ$) $u(x, y) = g(x, y)$ на межі

методом верхньої релаксації з довільною кількістю вузлів сітки. Напишіть програму для виконання цих обчислень.

Питання для самоконтролю

1. Розкажіть про ітераційні методи розв'язання різницевих крайових задач та необхідність їхнього використання.
2. У чому відмінність методів Якобі та Зейделя?
3. Що ви знаєте про метод верхньої релаксації?
4. Розкажіть про багатосітковий релаксаційний метод Федоренка.
5. Особливості релаксаційних методів.

Література [1; 4–8; 10; 16]

Тема 3. Розв'язання рівнянь з частинними похідними методом скінченних елементів

Сутність методу. Дискретизація області визначення розв'язку. Кусково-неперервні функції елементів. Знаходження розв'язку методом скінченних елементів. Композиція загального розв'язку задачі.

Література [6; 10; 14]

Практичне заняття 3. Знаходження методом скінченних елементів наближеного розв'язку задачі про розподіл температури у стрижні довжиною l при заданому збуренні $f(x)$ та граничних умовах $T(0, t) = T_1,$ $T(l, t) = T_2$, де T_1, T_2 — конкретно задані числові величини.

Приклад розв'язування типової задачі

Задача. Обчислити за методом скінченних елементів розподіл температури у стрижні довжиною $l = 8$ см, якщо температура на кінцях стрижня $T(0, t) = 20,$ $T(l, t) = 100$ та існує рівномірне джерело тепла $f(x) = 10$ [10].

Розв'язування. Теплові процеси у стрижні описуються рівнянням Пуассона

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -10.$$

Виділимо на стрижні чотири лінійні скінченні елементи довжиною $l = 2$ і задамо номери п'яти вузлів: 1, 2, 3, 4, 5.

Щоб скористатися рівняннями

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dT(x_1)/dx \\ dT(x_2)/dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x) N_1(x) d \\ \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x) N_2(x) dx \end{bmatrix}, \quad (1)$$

необхідно обчислити вирази

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x) N_1(x) dx = \int\limits_0^2 10 \frac{2 - x}{2 - 0} dx = 10;$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x) N_2(x) dx = \int\limits_0^2 10 \frac{x - 0}{2 - 0} dx = 10.$$

Тоді рівняння (1) набувають такого вигляду

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dT(x_1)/dx + 10 \\ dT(x_2)/dx + 10 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Щоб записати рівняння для всіх чотирьох елементів, встановимо відповідність між локальними й глобальними номерами вузлів стрижня згідно з табл. 1.

Таблиця 1. Відповідність між локальними й глобальними номерами вузлів

Номер елемента	Локальна нумерація вузлів	Глобальна нумерація вузлів
1	1,2	1, 2
2	1,2	2, 3
3	1,2	3, 4
4	1,2	4, 5

У результаті підсумовуванням рівнянь для всіх елементів створимо систему рівнянь для обчислення розв'язку в усіх вузлах, яка матиме такий вигляд:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & & & \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & & \\ & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & \\ & & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ & & & -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}
\end{array}
\times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dT(x_1)/dx+10 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ dT(x_5)/dx+10 \end{bmatrix}.
$$

За послідовного внесення рівнянь скінченного елемента у загальну систему межові умови в суміжних вузлах 2, 3, 4 взаємно компенсують одна одну. Це виконується у першому і останньому вузлах.

Оскільки значення температури T_1 і T_5 задані (відомі з межових умов), то отриману систему рівнянь можна перетворити у такий спосіб: члени лівої частини рівнянь, що містять T_1 і T_5, перенести у праву; невідомі з правої частини ($d(x_1)/dx$, $d(x_5)/dx$), перенести в ліву.

У результаті маємо систему рівнянь з тридіагональною матрицею:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & & & \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & & \\ & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & \\ & & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ & & & -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}
\end{array}
\times \begin{bmatrix} dT(x_1)/dx \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ dT(x_5)/dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 20 \\ 70 \\ -40 \end{bmatrix}.
$$

Розв’язуючи цю систему рівнянь, отримаємо:

$dT(x_1)/dx = 50$,

$T_2=100$, $T_3 = 140$, $T_4 = 140$,

$dT(x_5)/dx = 30$.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити за методом скінченних елементів розподіл температури у стрижні довжиною $l = 10$ см, якщо температура на кінцях стрижня $T(0, t) = 40$, $T(l, t) = 200$ та існує рівномірне джерело тепла $f(x) = 20$.

Питання для самоконтролю

1. У чому сутність методу скінченних елементів?
2. Розкажіть про послідовність етапів реалізації методу скінченних елементів.

3. Охарактеризуйте застосування методу скінченних елементів до розв'язання рівнянь із частинними похідними.
4. Як здійснюється дискретизація області визначення розв'язку у методі скінченних елементів і як вибираються апроксимуючі функції?
5. Композиція загального розв'язку задачі.
6. Дайте порівняльну характеристику методам: скінченних різниці та скінченних елементів.

Література [6; 10; 14]

Розділи тем змістового модуля I для самостійного вивчення

Тема 1. Чисельне моделювання фізичних процесів та явищ

Основні математичні постановки задач фізики.

Література [1; 6–8; 10; 16]

Тема 2. Скінченно різницевий метод розв'язування рівнянь з частинними похідними

Проблема апроксимації межових умов.

Література [1; 6–8; 10; 16]

Умови розв'язування різницевих рівнянь. Багатосітковий релаксаційний метод Федоренка. Прямі методи розв'язування еліптичної крайової задачі. Розв'язування одновимірної задачі Діріхле для рівняння Пуассона методом факторизації (методом прогону). Метод матричного прогону, переваги та недоліки його використання.

Література [1; 3–10; 11; 15]

Тема 3. Розв'язування рівнянь з частинними похідними методом скінченних елементів

Знаходження розв'язку методом скінченних елементів для конкретної задачі (завдання з практичного заняття).

Література [6; 10; 14]

Змістовий модуль II. Різницеві методи розв'язання задач для параболічних та еліптичних рівнянь

Тема 4. Поняття апроксимації, рахункової стійкості та збіжності різницевих схем

Різницева апроксимація диференціальних операторів у частинних похідних. Похибки апроксимації різницевих схем. Апроксимація межових і початкових умов. Рахункова стійкість і збіжність різницевої схеми. Методи дослідження стійкості.

Література [1; 3–10; 16; 17]

Практичне заняття 4. Перевірка за методом Неймана (за спектральною ознакою) стійкості явної схеми

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\tau}=a^2\frac{v_{m+1}^n-2v_m^n+v_{m-1}^n}{h^2},\quad m=1,\ ...,M-1,\quad n=1,2,...\ ,$$

$$v_m^0=\varphi_{m,}\quad m=1,...,M.$$

Завдання для самостійної роботи

Дослідіть властивості різницевої схеми

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^{n1}}{\tau}=a^2\frac{v_{m+1}^n-2v_m^n+v_{m-1}^n}{h^2}+f_m^n,\quad m=1,...,M-1,\quad n=1,2,...$$

Визначте, чи стійка вона.

Питання для самоконтролю

1. Як визначають похибку апроксимації різницевої схеми?
2. Рахункова стійкість і збіжність різницевої схеми.
3. Наведіть приклади явних і неявних різницевих схем для рівняння теплопровідності однорідного стрижня.
4. Похибка апроксимації різницевої схеми для рівняння теплопровідності з постійними коефіцієнтами.
5. Стійкість за початковими даними (за правою частиною) різницевої схеми для рівняння теплопровідності з постійними коефіцієнтами.
6. Збіжність і точність явних і неявних різницевих схем для рівняння теплопровідності з постійними коефіцієнтами.
7. Межові умови третього роду для рівняння теплопровідності.

Література [1; 3–10; 16]

Тема 5. Різницеві методи розв'язування мішаної задачі для параболічного рівняння з однією просторовою змінною

Апроксимація параболічного рівняння. Обчислювальні алгоритми. Рахункова стійкість і збіжність явних і неявних схем. Спектральна ознака стійкості.

Література [1; 3–10; 16]

Тема 6. Різницеві схеми підвищеної точності

Схема Кранка-Ніколсона. Схема Дюфорта-Франкела. Неявні багатошарові схеми.

Література [1; 6–10; 16]

Практичне заняття 5. Розв’язати методом Кранка-Ніколсона рівняння

$$u_t = c_2\, u_{xx},\ 0 < x < 1,\ 0 < t < 0{,}1; \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = (x) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \text{ для } t = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

і граничними умовами

$$u(0,t) = g_1(t) \equiv 0 \text{ для } x = 0, \quad 0 \le t \le 1,$$
$$u(1,t) = g_2(t) \equiv 0 \text{ для } x = 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

Неявна різницева схема Кранка-Ніколсона для рівняння (1) має вигляд

$$\frac{v_i^{n+1} + v_i^n}{\tau} = c^2 \frac{v_{i-1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_i^{n+1} + v_{i-1}^n - 2v_i^n + v_{i+1}^n}{2h^2},$$

i=*2*,..., I–*1*, n = *2*, ..., N–*1*. *(2)*

Позначимо $r = c^2\tau / h^2$. *Після нескладних перетворень представимо (2) як*

$$-rv_{i-1}^{n+1} + (2+2r)v_i^{n+1} - rv_i^{n+1} = (2-2r)v_i^n + r(v_{i-1}^n + v_{i+1}^n)\,. \qquad (3)$$

Для простоти візьмемо коефіцієнт $c^2 = 1$, кроки Δx = h = 0,1 і Δt = τ = 0,01. При цьому r = 1, I = 11, N = 11, а схема (3) набуває простого вигляду

$$-v_{i-1}^{n+1} + 4v_i^{n+1} - v_i^{n+1} = v_{i-1}^n + v_{i+1}^n\,,$$ i=*2*,..., *10*, n = *2*, ..., *10*. (4)

Розв’яжемо отриману задачу методом прогону відносно $v(x_i, t_n)$ (табл.).

Таблиця

Значення $u(xi, tj)$, отримані методом Кранка-Ніколсона для tn $(n = 2, ..., 11)$

	$x_2 = 0{,}1$	$x_3 = 0{,}2$	$x_4 = 0{,}3$	$x_5 = 0{,}4$	$x_6 = 0{,}5$	$x_7 = 0{,}6$	$x_8 = 0{,}7$	$x_9 = 0{,}8$	$x_{10} = 0{,}9$
t_1	1,118034	1,538842	1,118034	0,363271	0,000000	0,363271	1,118034	1,538842	1,118034
t_2	0,616905	0,928778	0,862137	0,617659	0,490465	0,617659	0,862137	0,928778	0,616905
t_3	0,394184	0,647957	0,718601	0,680009	0,648834	0,680009	0,718601	0,647957	0,394184
t_4	0,288660	0,506682	0,625285	0,666493	0,673251	0,666493	0,625285	0,506682	0,288660
t_5	0,233112	0,425766	0,556006	0,625082	0,645788	0,625082	0,556006	0,425766	0,233112
t_6	0,199450	0,372035	0,499571	0,575402	0,600242	0,575402	0,499571	0,372035	0,199450
t_7	0,175881	0,331490	0,451058	0,525306	0,550354	0,525306	0,451058	0,331490	0,175881
t_8	0,157405	0,298131	0,408178	0,477784	0,501545	0,477784	0,408178	0,298131	0,157405
t_9	0,141858	0,269300	0,369759	0,433821	0,455802	0,433821	0,369759	0,269300	0,141858
t_{10}	0,128262	0,243749	0,335117	0,393597	0,413709	0,393597	0,335117	0,243749	0,128262
t_{11}	0,116144	0,220827	0,303787	0,356974	0,375286	0,356974	0,303787	0,220827	0,116144

Для порівняння чисельних значень останнього часового шару наведено істинні значення аналітичного розв'язку $u(x,t)$ = $\sin(\pi x)+\sin(3\pi x)\exp(9\pi^2 t)$:

t_{11}: 0,115285; 0,219204; 0,301570; 0,354385; 0,372569; 0,354385; 0,301570; 0,219204; 0,115285

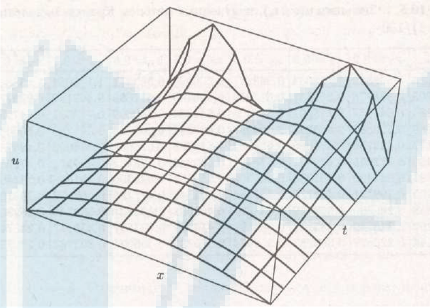

Рис. Тривимірне зображення даних з табл.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати методом Кранка-Ніколсона рівняння

$u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $0 < t < 0{,}1$;

з початковою умовою

$u(x,0) = (x) = 2\{\sin(\pi x) + \sin(3\pi x)\}$ для $t = 0, \quad 0 \le x \le 1$

і граничними умовами

$u(0,t) = g_1(t) \equiv 1$ для $x = 0, \quad 0 \le t \le 1,$

$u(1,t) = g_2(t) \equiv 0$ для $x = 1, \quad 0 \le t \le 1.$

Питання для самоконтролю

1. Розкажіть про явні та неявні схеми для параболічного рівняння.
2. Запишіть схему Кранка-Ніколсона для параболічного рівняння.
3. Дослідіть схему Кранка-Ніколсона на стійкість методом Неймана.
4. Випишіть схему Дюфорта-Франкела для параболічного рівняння і вкажіть на її властивості. Дослідіть на стійкість.

Література [1; 6–10; 16]

Тема 7. Економічні різницеві схеми для багатовимірної параболічної задачі. Схема змінних напрямків

Різницеві методи розв'язання мішаної задачі для параболічного рівняння з двома просторовими змінними. Явні й неявні різницеві схеми. Схеми змінних напрямків для багатовимірної задачі. Метод Пісмена-Речфорада.

Література [1; 3–10; 12]

***Практичне заняття* 6.** Розв’язування двовимірної крайової задачі

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2},\quad 0\le x,y\le 1,\quad 0<t<T,$$

$$u\{x, y, 0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y), \qquad (1)$$
$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0,$$
$$u(x, 0, t) - u(x, 1, t) = 0.$$

Пакет “Matematica” не має стандартного оператора для розв’язання двовимірних крайових задач, тому необхідно складати програми реалізації відповідного алгоритму. Запишемо локально-одновимірну різницеву схему у вигляді, зручному для розв’язування методом прогону. Спочатку здійснюється прогін за умови зміни індексу m для кожного фіксованого n:

$$\begin{cases} v_{0,n}=0, \\ sv_{m-1,n}-(1+2s)v_{m,n}+v_{m+1,n}=-u^k_{m,n}, \\ v_{M-1,n}=0. \end{cases}$$

$m = 1,\dots M - 2$, $n = 1,\dots, M - 1$, $s = a^2\tau/h^2$,

де $v_{m,n}$ — проміжні значения схеми розщеплення.

Потім здійснюється прогін за умови зміни індексу n для кожного фіксованого m:

$$\begin{cases} u^k_{m,0}=0, \\ su^{k+1}_{m,n-1}-(1+2s)u^{k+1}_{m,n}+u^{k+1}_{m,n+1}=-v_{m,n}, \\ v_{m,N-1}=0. \end{cases}$$

$n = 1,\dots, M - 2$.

Скористаємося програмою розв’язання задачі (1) за допомогою локально-одновимірної різницевої схеми. Введемо початкові дані й обчислимо початкові умови у вузлах сітки

In[]: = *m* = 20; *k* = 10;

Array[*u*, {*m*, *m*}, 0]; Array[*v*, {*m*, *m*}, 0];

h = 1/(*m* — 1); *a* =1; *t* = 0,25 *h*^2/*a*; *s* = *a t*/*h*^2; *s*1 — 1 + 2 *s*;

*D*0 [*u*[*i*, *j*] = *N*[Sin[*Pi* i *h*] Sin[*P*1 *j h*]], {*i*,0, *m*-1}, {*j*,0, *m*-1}];

```
U = Arraytu, {m, m}, 0];
ListPlot3D[U]
```

На рис.1 зображено поверхню, що відповідає початковим умовам задачі. Крайова задача (1) має аналітичний розв'язок, який записується такою формулою:

$$u(x, y, 0) = \exp(-2a^2\pi^2 t)\,\sin(\pi x)\sin(\pi y). \qquad (2)$$

Тому наближений чисельний розв'язок можна буде порівняти з точним.

Фрагмент програми розрахунку значень сіткової функції $u^k_{m,\,n}$ послідовно на заданих часових шарах за формулами локально-одновимірної схеми наводиться нижче:

```
In[]:= Do [v[0, j] = 0; v[m-1. j] = 0; {j. O. m-1}];
Do [v[1,0] = 0; v[1, m-1] = 0,{i,0, m-1]];
Array[l, m, 0]; Array[n, m, 0];
[0] = 0; n[0] = 0;
Do [Do [Do [d = s1 — s l[j–l]; l[j] = s/d; n[j] = (u[i, j] + s n[j–1])/d,{j,1, m–2}];
Do [v[i, m–j] = l [m–j] v[i, m–j + 1] + n[m–j], {j, 2, m–l}], (i, l. m–2}];
Do [Do [d = s1–s l[i–1]; l[i] = s/d; n[i] = (v[i, j] + s n[i–1])/d,{I,1, m–2}];
Do [u[m–i, j] = l[m–i] u[m–i + 1, j] <– n[m–i], {i,2, m–l}], {j,1, m–2}];
U = Array[u,{m, m},0]; ListPlot3D[U];
anmax = N[u[m/2, m/2]; gmax = N[Exp[-2 Pi^k1 t a]];
Print["k = ", k1," ", anmax," ", gmax," eps = ". gmax-anmax], {k1, 1, k)].
```

Ця програма виводить на екран комп'ютера графіки поверхні розв'язку на всіх часових шарах, одна з яких наведена на рис 1.

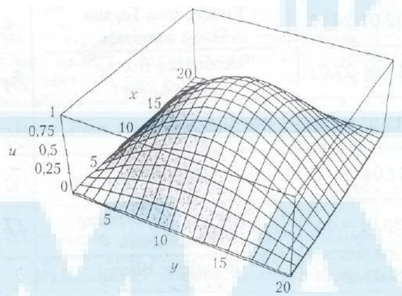

Рис. 1. Розв'язок крайової задачі (1), що відповідає початковим умовам

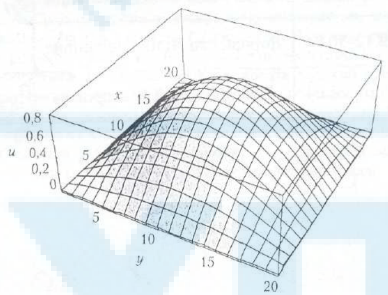

Рис. 2. Розв'язок крайової задачі для t = 10τ

У табл. 1 подано значення наближеного і точного розв'язків у точці, де функція досягає максимуму, і похибки для цієї точки.

Таблиця 1. Значения чисельного розв'язку крайової задачі

k	u^k_{mn}	$u(x, y, t)$	ε	k	u^k_{mn}	$u(x, y, t)$	ε
1	0,979772	0,986423	0,006650	6	0,915397	0,921255	0,005857
2	0,966545	0,973031	0,006485	7	0,903039	0,908747	0,005707
3	0,953496	0,95982	0,006323	8	0,903039	0,908747	0,005708
4	0,940624	0,946789	0,006165	9	0,878821	0,884239	0,005418
5	0,927925	0,933934	0,00601	10	0,866956	0,872233	0,005277

Завдання для самостійної роботи

Побудуйте різницевий аналог задачі

$u_{xx} + u_{yy} = -4\,u$ при $(x, y) \in G = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$;

$u(x, y) = \sin 2y + \cos x$ при $(x, y) \in \Gamma = \{(x, y)\colon (0 \le x \le 1, 0); (0 \le x \le 1, 1); (0, 0 \le y \le 1); (1, 0 \le y \le 1)\}$.

Запишіть обчислюваний алгоритм для знаходження наближеного розв'язку різницевого аналога задачі, побудуйте блок-схему реалізації алгоритму на еом, знайдіть розв'язок.

Питання для самоконтролю

1. Розкажіть про явні та неявні схеми для параболічного рівняння з двома змінними.
2. Різницеві схеми розщеплення, їх побудова, властивості та сфери застосування.
3. У чому полягає сутність методу Пісмена-Речфорда для багатовимірних нестаціонарних задач? Яка його ефективність?
4. Доведіть стійкість різницевої задачі Діріхле для рівняння Пуассона.
5. Поясніть сутність та вкажіть сферу застосування методу установлення.
6. Що ви знаєте про метод прямих та сфери його застосування?

Література [1; 6; 8; 12]

Тема 8. Розв'язування задач для рівняння Пуассона

Задача Діріхле для одновимірного рівняння Пуассона. Одновимірна задача Неймана. Задача Діріхле для двовимірного рівняння Пуассона. Метод установлення для розв'язання задач еліптичного типу.

Література [1; 3–10; 16; 17]

Розділи тем змістового модуля II для самостійного вивчення

Тема 4. Поняття апроксимації, рахункової стійкості та збіжності різницевих схем

Методи дослідження стійкості різних схем.

Література [1; 3–10; 16; 17]

Тема 5. Різницеві методи розв'язання мішаної задачі для параболічного рівняння з однією просторовою змінною

Апроксимація параболічного рівняння. Розробка обчислювальних алгоритмів для розв'язання практичних задач.

Література [1; 3–10; 16; 17]

Тема 6. Різницеві схеми підвищеної точності

Дослідження на стійкість схеми Дюфорта-Франкела. Неявні багатошарові схеми.

Література [1; 6–10]

Тема 7. Економічні різницеві схеми для багатовимірної параболічної задачі. Схема змінних напрямків

Розв'язання багатовимірних задач за схемою змінних напрямків.

Література [1; 3–10; 12; 17]

Тема 8. Розв'язання задач для рівняння Пуассона

Розв'язання задачі Неймана для двовимірного рівняння Пуассона методом установлення.

Література [1; 3–10; 16]

Змістовий модуль III. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь гіперболічного типу та інтегральних рівнянь

Тема 9. Різницеві схеми розв'язання хвильового рівняння

Явна різницева схема та її збіжність і стійкість. Неявна різницева схема, її збіжність і стійкість.

Література [1; 3–10; 16]

***Практичне заняття* 7.** Розв'язання різницевим методом задачі коливання струни:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le 1, \quad t > 0$$

з початковими даними

$$u(x,t) = \sin(\pi x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

і граничними умовами

$$u(0,t) = 0\ ,\ u(1,t) = 0\ .$$

Завдання для самостійної роботи

Дослідити на стійкість явної різницевої схеми для рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le 1, \quad t > 0\ .$$

Питання для самоконтролю

1. Постановка різницевої задачі для хвильового рівняння. Обчислення похибок апроксимації.
2. Умова Куранта для різницевої схеми “хрест”.
3. Різницеві аналоги рівняння переносу та їх особливості.
4. Дивергентні схеми для рівняння переносу.

Література [1; 3–10; 13; 16; 17]

Тема 10. Різницеві схеми для рівняння переносу

Одновимірне рівняння руху. Поняття схемної в’язкості. Різницеві схеми для двовимірного рівняння переносу зі змінними коефіцієнтами.

Література [6; 8; 10; 13]

Тема 11. Метод характеристик

Сутність методу. Чисельні методи розв’язання системи гіперболічних диференціальних рівнянь першого порядку. Розв’язання задачі Коші. Розв’язання задачі Гурса. Перша мішана задача. Друга мішана задача. Приклади.

Література [6; 8; 10; 13]

Тема 12. Чисельні методи розв’язання інтегральних рівнянь

Основні класи інтегральних рівнянь. Чисельне розв’язання рівняння з виродженим ядром. Метод квадратурних сум. Метод послідовних наближень. Метод апроксимуючих функцій. Метод колокацій. Метод найменших квадратів. Метод моментів. Висновки.

Література [2; 4; 10]

Практичне заняття 8. Знаходження наближених розв'язків інтегральних рівнянь методом квадратурних сум із використанням квадратурних формул чисельного інтегрування прямокутників, трапецій, формули Сімпсона:

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 xt^2\varphi(t)dt;$$

$$\varphi(x) = x + 4^* \int_0^1 x^2t^2\varphi(t)dt;$$

$$\varphi(x) = (5/6)x + 1/2\int_0^1 xt\varphi(t)dt.$$

Здійснення аналізу одержаних результатів.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайдіть наближений розв'язок інтегральних рівнянь методом квадратурних сум із використанням квадратурної формули Сімпсона:

$$\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2)\varphi(t)dt;$$

$$\varphi(x) = 1 + (4/3)x + \int_{-1}^1 x\ t^2 - x\varphi(t)dt.$$

2. Знайдіть наближений розв'язок інтегральних рівнянь методом послідовних наближень. Розв'язок визначте з точністю не меншою ніж 0,01:

$$\varphi(x) = (1/2)(e^{-x} + 3x - 1) + \int_0^1 (e^{-t} - 1)x\varphi(t)dt;$$

$$\varphi(x) = x + \cos(x) + \int_0^1 x(\sin(t) - 1)\varphi(t)dt;$$

$$\varphi(x) = \sin(x) + \int_0^1 (1 - x(\cos(t) - 1)\varphi(t)dt.$$

3. Знайдіть наближений розв'язок інтегральних рівнянь методом колокацій, найменших квадратів і моментів:

$$\varphi(x) = 1 - x + \int_0^1 x\varphi(t)dt;$$

$$\varphi(x) = x + \int_0^1 x^2t\varphi(t)dt.$$

Питання для самоконтролю

1. На які класи поділяються інтегральні рівняння?
2. Розкажіть про основні сфери застосування інтегральних рівнянь.
3. У чому полягає сутність методу квадратурних сум?
4. Прямі та ітераційні методи розв'язання інтегральних рівнянь.
5. Розкажіть про основні методи апроксимуючих функцій, що використовуються для наближеного розв'язання інтегральних рівнянь.
6. Як залежить збіжність наближеного розв'язку від вибору апроксимуючих функцій?

Література [2; 4; 10]

Розділи тем змістового модуля III для самостійного вивчення

Тема 9. Різницеві схеми розв'язування хвильового рівняння

Неявні різницеві схеми, їхня збіжність і стійкість.

Література [1; 3–10; 13; 17]

Тема 10. Різницеві схеми для рівняння переносу

Одновимірне рівняння руху. Поняття схемної в'язкості. Різницеві схеми для двовимірного рівняння переносу зі змінними коефіцієнтами.

Література [6; 10; 13]

Тема 11. Метод характеристик

Сутність методу. Чисельні методи розв'язання системи гіперболічних диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язання задачі Коші. Розв'язання задачі Гурса. Перша мішана задача. Друга мішана задача. Приклади.

Література [6; 10; 13]

Тема 12. Чисельні методи розв'язування інтегральних рівнянь

Основні класи інтегральних рівнянь. Чисельне розв'язання рівняння з виродженим ядром. Метод квадратурних сум. Метод послідовних наближень. Метод апроксимуючих функцій. Метод колокацій. Метод найменших квадратів. Метод моментів. Висновки.

Література [2; 4; 10]

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Наука, 1987.
2. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные равнения: методы, алгоритмы, программы. — К.: Наук. думка, 1986.
3. *Годунов С. К., Рябенький Д. С.* Разностные схемы. — М.: Наука, 1977.
4. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. — М.: Гостехиздат, 1962.
5. *Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А.* Методы вычислений.— К.: Вища шк., 1977.
6. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.— М.: Наука, 1982.
8. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. — М.: Наука, 1982.
9. *Самарский А. А, Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука. 1978.
10. *Фельдман. Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А.* Чисельні методи в інформатиці. — К., 2006.

Додаткова

11. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.
12. *Марчук Г. И.* Методы расщепления. — М.: Наука, 1981.
13. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. — М.: Наука, 1975.
14. *Сильвестр П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. — М.: Мир, 1986.
15. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.— М.: Физматгиз, 1963.
16. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1985.
17. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.— Новосибирск: Наука, 1967.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *Т. Д. Станішевська*
Комп'ютерне верстання *А. А. Кучерук*

Зам. № ВКЦ-4023

Підп. до друку 23.02.09. Формат $60\times84/_{16}$. Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний. Ум. друк. арк. 1,4. Обл.-вид. арк. 1,23.
Наклад 50 пр.
Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП
ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008