МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

з дисципліни
"ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ"
(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2009

Підготовлено професором кафедри математики *О. Ю. Дюженковою*

Затверджено на засіданні кафедри математики (протокол № 6 від 13.02.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Дюженкова О. Ю. Методичні рекомендації щодо виконання контрольної роботи з дисципліни “Теорія ймовірностей”. — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2009. — 18 с.

У методичній розробці містяться варіанти завдань контрольної роботи з дисципліни “Теорія ймовірностей”, вказівки до її виконання, основні теоретичні відомості з цієї дисципліни, зразки розв’язування завдань, а також список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Завдання контрольної роботи розраховані для студентів усіх форм навчання. Студенти-заочники використовують їх як контрольну роботу, яку необхідно виконати відповідно до навчального плану.

Робота складається з 5 завдань, зміст яких охоплює такі розділи: “Випадкові події” (завдання 1, 2, 3), “Випадкові величини” (завдання 4,5).

Кожне завдання містить 10 варіантів. Студент виконує той із них, номер якого збігається з останньою цифрою номера його залікової книжки (цифра “0” відповідає варіанту 10).

Робота виконується в зошиті або на аркушах паперу формату А4 з полями для позначок викладача, при цьому обов’язково слід вказати номер варіанта та переписати його умову. Розв’язання завдань повинні містити необхідні пояснення та обґрунтування, а також малюнки. У розрахунках потрібно дотримуватися правил наближених обчислень.

При недотриманні студентом зазначених вимог його контрольна робота не перевіряється і не зараховується.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1

1. В ящику лежить 20 м’ячів: 8 зелених і 12 синіх. З ящика навмання виймають один м’яч. Яка ймовірність того, що він

а) зелений; б) синій?

2. У класі навчається 30 учнів: 12 хлопчиків і 18 дівчаток. З класу навмання вибирають учня. Яка ймовірність того, що цей учень

а) хлопчик; б) дівчинка?

3. На поличці розміщено 10 чашок: 4 синіх та 6 червоних. З полички навмання дістають одну чашку. Яка ймовірність того, що ця чашка

а) синя; б) червона?

4. У кошику лежить 25 яблук: 15 зелених і 10 жовтих. З кошика навмання виймають одне яблуко. Яка ймовірність того, що це яблуко

а) зелене; б) жовте?

5. На столі лежить 40 зошитів: 24 в клітинку і 16 в лінійку. Навмання дістають один зошит. Яка ймовірність того, що цей зошит

а) в клітинку; б) в лінійку?

6. Із карток розрізної азбуки складають слово “фінанси”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана буква:

а) “ф”; б) “в”; в) “н”.

7. Із карток розрізної азбуки складають слово “економіка”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана буква:

а) “е”; б) “о”; в) “к”.

8. Із карток розрізної азбуки складають слово “корпорація”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана буква:

а) “ц”; б) “р”; в) “о”.

9. Із карток розрізної азбуки складають слово “ціноутворення”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана буква:

а) “н”; б) “у”; в) “о”.

Завдання 2

1. Два студента прийшли на іспит. Ймовірність успішно скласти іспит для першого становить 0,7, а для другого 0,6. Знайти ймовірність того, що хоча б один із них успішно складе іспит.

2. У ящику міститься 20 деталей, з яких 15 стандартні. Із ящика навмання дістають одну за одною дві деталі. Яка ймовірність того, що обидві вони стандартні?

3. Підприємець проводить переговори з двома постачальниками. Ймовірність укладення вигідної угоди з першим постачальником становить 0,5, а з другим 0,8. Знайти ймовірність того, що підприємець укладе угоду тільки з одним із постачальників.

4. У класі навчаються 25 учнів, серед яких 12 займаються спортом. Із класу навмання вибирають двох учнів. Яка ймовірність того, що обидва вони займаються спортом?

5. Два програмісти перевіряють новостворену програму, в якій є помилка. Ймовірність помітити помилку для першого дорівнює 0,6, а для другого 0,4. Визначити ймовірність того, що хоча б один із них знайде помилку.

6. У коробці перемішані кубики двох кольорів. Хлопчик навмання дістає один за одним два кубики. Яка ймовірність того, що вони одного кольору, якщо в коробці 10 синіх і 20 червоних кубиків?

7. Для уточнення діагнозу хворому роблять два аналізи. Ймовірність позитивного результату першого аналізу становить 0,5, а другого 0,6. Знайти ймовірність того, що жоден з аналізів не дасть позитивного результату.

8. В студентській групі англійську мову вивчають 16 осіб, а решта німецьку. З групи навмання вибирають двох студентів. Знайти ймовірність того, що жоден із них не вивчає німецьку мову, якщо в групі навчається 20 студентів.

9. Зі складу реалізується дві партії товару. Ймовірність вчасної реалізації першої партії становить 0,8, а другої 0, 5. Яка ймовірність того, що вчасно буде реалізовано хоча б одну із партій?

10. У коробці "Асорті" 60 % цукерок містять молочну начинку, а решта шоколадну. Дитина дістає з коробки одну за одною дві цукерки. Яка ймовірність того, що вони містять різну начинку?

Завдання 3

Для контролю якості виготовленої продукції відібрано n виробів. Ймовірність того, що взятий навмання виріб є якісним, дорівнює p. Знайти ймовірність того, що серед вибраних виробів буде не менше m_1 і не більше m_2 якісних, якщо:

1. $n = 6,$ $p = 0,5,$ $m_1 = 2,$ $m_2 = 4;$
2. $n = 8,$ $p = 0,2,$ $m_1 = 1,$ $m_2 = 3;$
3. $n = 5,$ $p = 0,8,$ $m_1 = 3,$ $m_2 = 5;$
4. $n = 7,$ $p = 0,4,$ $m_1 = 2,$ $m_2 = 3;$
5. $n = 9,$ $p = 0,8,$ $m_1 = 7,$ $m_2 = 9;$
6. $n = 4,$ $p = 0,6,$ $m_1 = 1,$ $m_2 = 4;$
7. $n = 8,$ $p = 0,7,$ $m_1 = 5,$ $m_2 = 7;$
8. $n = 6,$ $p = 0,7,$ $m_1 = 4,$ $m_2 = 7;$
9. $n = 9,$ $p = 0,3,$ $m_1 = 3,$ $m_2 = 5;$
10. $n = 7,$ $p = 0,6,$ $m_1 = 4,$ $m_2 = 6.$

Завдання 4

Випадкову величину X, що визначає добовий попит на певний продукт, задано законом розподілу. Знайти параметр a та числові характеристики цієї дискретної випадкової величини:

а) математичне сподівання $M(X)$;

б) дисперсію $D(X)$;

в) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

1.

X	10	20	30	40	50
p	0,1	a	0,42	0,25	0,08

2.

X	100	200	300	400	500
p	0,12	0,25	0,28	a	0,17

3.

X	5	10	15	20	25
p	a	0,35	0,24	0,13	0,12

4.

X	3	10	17	21	24
p	0,2	0,15	a	0,3	0,1

5.

X	1	3	5	7	11
p	0,1	0,15	0,42	0,25	a

6.

X	13	17	19	23	29
p	0,5	0,03	0,25	0,12	a

7.

X	31	37	39	41	43
p	0,2	0,1	0,22	a	0,38

8.

X	47	53	59	61	67
p	0,3	a	0,2	0,15	0,25

9.

X	71	73	79	83	89
p	0,2	0,15	a	0,15	0,1

10.

X	91	97	101	103	107
p	0,1	0,15	0,4	a	0,14

Завдання 5

Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Записати щільність (диференціальну функцію) $f(x)$ розподілу, знайти параметр a та визначити ймовірність попадання величини X в проміжок $(\alpha;\beta)$, якщо:

1. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ax^2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ $\alpha=\dfrac{1}{3}, \beta=\dfrac{1}{2};$

2. $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ a(x-1), & 1\le x\le 3,\\ 1, & x>3,\end{cases}$ $\alpha=2, \beta=2{,}8;$

3. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\sqrt{x}, & 0\le x\le 4,\\ 1, & x>4,\end{cases}$ $\alpha=1, \beta=3;$

4. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ a(x+3), & -3\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ $\alpha=-2, \beta=0;$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ax^3, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ $\alpha=\dfrac{1}{2}, \beta=\dfrac{3}{2};$

6. $F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ a(x-2)^2, & 2\le x\le 4,\\ 1, & x>4,\end{cases}$ $\alpha=2, \beta=3;$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a(x+1)^2, & -1\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ $\alpha=0, \beta=\frac{1}{2};$

8. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\sin x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $\alpha=\frac{\pi}{6}, \beta=\frac{\pi}{4};$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ax^{\frac{3}{2}}, & 0\le x\le 4,\\ 1, & x>4,\end{cases}$ $\alpha=2, \beta=3;$

10. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{2},\\ a\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ $\alpha=-\frac{\pi}{3}, \beta=1;$

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

1. Випадкові події. Означення ймовірності.

Література [1]: Розділ 1; [2]: Розділ 1.

Внаслідок певного випробування може відбутися або не відбутися деяка випадкова подія. Наприклад, при підкиданні монети може випасти герб (подія A) або цифра (подія B). Найпростіший результат випробування називають елементарною подією. Множина всіх таких подій називається простором елементарних подій даного випробування і позначається Ω . Якщо поява елементарної події веде до появи події A, то вона називається сприятливою для A. Наприклад, для випробування, яке полягає в однократному підкиданні грального кубика, простір елементарних подій має вигляд: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ де $\omega_i =$ {випаде i очок}. При цьому події $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ є сприятливими для події A={випаде парне число очок}.

Нехай у даному випробуванні всі елементарні події рівноможливі. Розглянемо класичне означення ймовірності.

Ймовірністю події A називають відношення кількості m сприятливих (для A) елементарних подій до кількості n всіх елементарних подій в даному випробуванні, тобто

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Приклад 1. Із партії виготовленої продукції, яка містить 50 деталей, навмання дістають одну деталь. Знайти ймовірність того, що вона неякісна, якщо в партії 45 якісних деталей, а інші неякісні.

Розв'язання. Розглянемо подію A= {навмання взята деталь — неякісна}. Очевидно, що в партії є 5 неякісних деталей, тому сприятливими для події A є 5 елементарних подій із 50. Отже, за формулою (1) маємо:

$$P(A) = \frac{5}{50} = 0{,}1.$$

Приклад 2. Із карток розрізної азбуки складають слово "математика", після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана буква:

а) "м"; б) "а"; в) "і".

Розв'язання. Оскільки у слові "математика" всього 10 букв, то $n=10.$ Розглянемо події A={вибрано букву "м"}, B={вибрано букву "а"}, C={вибрано букву "і"}. Оскільки в слові дві букви "м", три букви "а" і жодної букви "і", то за формулою (1) дістаємо:

$$P(A)=\frac{2}{10}=0,2,\quad P(A)=\frac{3}{10}=0,3,\quad P(A)=\frac{0}{10}=0.$$

2. Основні формули додавання і множення ймовірностей.

Література [1]: Розділ 3; [2]: Розділ 2.

Сума двох подій A і B — це подія, яка полягає в тому, що відбувається хоча б одна з подій: A або B.

Добуток двох подій A і B — це подія, яка полягає в тому, що відбуваються обидві події A і B.

Подію $\overline{A}$ називають *протилежною* до події A, якщо вона відбувається тоді, коли не відбувається подія в даному випробуванні.

Ймовірність суми двох довільних випадкових подій A і B визначають за формулою: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$ (2)

Події A і B називаються *несумісними*, якщо вони не можуть відбуватись одночасно в одному випробуванні.

Для *несумісних* подій має місце рівність:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{3}$$

Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несумісні, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює сумі їх ймовірностей, тобто $P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$ Зокрема, для протилежних подій А і $\overline{A}$ виконується рівність: .

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{4}$$

Події A і B є незалежними, якщо поява однієї з них не залежить від появи іншої. Ймовірність добутку для незалежних подій визначають за формулою: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$ (5)

Для *залежних* подій розглядають умовні ймовірності. Умовну ймовірність події B за умови появи події A позначають $P(B/A)$. Аналогічно вводиться умовна ймовірність події A за умови появи події B, яку позначають $P(A/B).$.

Ймовірність добутку для довільних подій A і B визначають за формулою: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$ (6)

Приклад 3. Два студента зайшли в бібліотеку. Ймовірність отримання потрібної книжки для першого дорівнює 0,6, а для другого 0,8. Знайти ймовірність того, що: а) хоча б один з них отримає потрібну книжку; б) обидва отримають потрібні книжки;

в) жоден з них не отримає книжки.

Розв'язання. Розглянемо події: A={перший студент отримав потрібну книжку}, B={другий студент отримав потрібну книжку}.

а) Розглянемо $A+B$ ={хоча б один з них отримав книжку}. Оскільки події А і В сумісні і незалежні, то за формулами (2) і (5), знаходимо шукану ймовірність: $P(A+B)=0,6+0,8-0,6\cdot 0,8=0,92.$

б) Очевидно, що $A\cdot B$ ={обидва студенти отримали книжки}, тому за формулою (5) дістаємо: $P(A\cdot B)=0,6\cdot 0,8=0,48.$

в) Жоден із студентів не отримає книжки, якщо не відбудеться ні подія А, ні подія В, а отже, відбудуться події $\overline{A}$ і $\overline{B}$. За формулами (4) і (5) знаходимо шукану ймовірність:

$$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=(1-P(A))\cdot(1-P(B))=(1-0,6)\cdot(1-0,8)=0,08.$$

Зауважимо, що останню ймовірність можна знайти простіше, оскільки події $\overline{A}\cdot\overline{B}$ і $A+B$ є протилежними, тому

$$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-P(A+B)=1-0,92=0,08.$$

Приклад 4. Виконуючи домашнє завдання, учень підготував 6 із 10 питань. На уроці вчитель ставить йому два питання. Яка ймовірність того, що він правильно відповість: на обидва питання; тільки на одне питання?

Розв'язання. Учень правильно відповість на обидва питання (подія A), якщо він дасть правильну відповідь як на перше (подія A_1), так і на друге питання (подія A_2). Оскільки учень підготував 6 із 10 питань, то $P(A_1)=\dfrac{6}{10}$. Подія A_2 залежить від A_1, тому що після першої правильної відповіді залишилось 5 підготовлених із 9 питань. Отже, за формулою (6) дістаємо: $P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)=\dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{3}$.

Учень правильно відповість тільки на одне питання (подія B), якщо дасть правильну відповідь тільки на перше (I випадок) або тільки на друге питання (II випадок), тобто $B = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2$. Подія $\overline{A}_2$ залежить від A_1, тому що після першої правильної відповіді залишились 4 непідготовлені питання із 9. Аналогічно розглядається II випадок. Тому за формулами (3) і (6) маємо:

$$P(B) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2 / A_1) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2 / \overline{A}_1) =$$
$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}.$$

3. Незалежні повторні випробування. Формула Бернуллі.

Література [1]: Розділ 5; [2]: Розділ 3.

Нехай проводиться серія n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A однакова і дорівнює p. Отже, подія A може відбутися з ймовірністю p і не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$ в кожному з випробувань.

Ймовірність того, що *подія A відбудеться m разів* у серії n випробувань визначають за *формулою Бернуллі*:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{7}$$

де $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ число сполучень із n елементів по k, а функція $n!$ (n-факторіал) визначається як добуток перших n натуральних чисел, тобто $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, при цьому покладають: $0! = 1$.

Ймовірність появи події A *не менше* m_1 і *не більше* m_2 разів у n випробуваннях визначають так:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1 + 1) + ... + P_n(m_2), \tag{8}$$

де кожен із доданків обчислюють за формулою Бернуллі.

Ймовірність появи події A *хоча б один раз* в n випробуваннях обчислюють за формулою $P_n(m \ge 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n$.

Приклад 5. Для контролю якості виготовленої продукції відібрано 6 виробів. Ймовірність того, що взятий навмання виріб є якісним, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що серед вибраних виробів буде не менше 4 і не більше 6 якісних.

Розв'язання. Розглянемо кожен виріб як незалежне випробування, в результаті якого може відбутися подія A (виріб якісний) з ймовірністю 0,9. Позначимо $n=6,\ p=0{,}9,\ m_1=4,\ m_2=6,$ тоді $q=1-0{,}9=0{,}1.$ Шукану ймовірність визначимо за рівністю (8), тобто $P_6(4\le m\le 6)=P_6(4)+P_6(5)+P_6(6).$ За формулою Бернуллі (7) знаходимо:

$$P_6(4)=C_6^4(0{,}9)^4\cdot(0{,}1)^2=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0{,}6561\cdot 0{,}01\approx\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!\cdot 2}\cdot 0{,}0066\approx 0{,}098,$$

$$P_6(5)=C_6^5(0{,}9)^6\cdot(0{,}1)=\frac{6!}{5!\cdot 1!}\cdot 0{,}5905\cdot 0{,}1\approx\frac{5!\cdot 6}{5!}\cdot 0{,}059=0{,}354,$$

$$P_6(6)=C_6^6(0{,}9)^6\cdot(0{,}1)^0\approx\frac{6!}{6!\cdot 0!}\cdot 0{,}5314\cdot 1\approx 0{,}531,$$

Отже, $P_6(4\le m\le 6)=0{,}098+0{,}354+0{,}531=0{,}983.$

4. Дискретні випадкові величини та їх числові характеристики.
Література [1]: Розділи 6, 8; [2]: Розділ 4.

Випадкова величина X в експерименті може набувати певних значень, причому наперед невідомо яких. Якщо множина її значень є скінченою або зчисленою, то вона називається *дискретною випадковою величиною* (ДВВ). *Законом розподілу* ДВВ називають відповідність між можливими значеннями $x_1,x_2,\ldots,x_n$ величини X та відповідними їм ймовірностями $p_1,p_2,\ldots,p_n$, де $p_i=P(X=x_i)$, $i=\overline{1,n}.$ Закон розподілу зручно записувати у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

При цьому $\sum_{i=1}^{n}p_i=p_1+p_2+\ldots+p_n=1.$

Для дискретної випадкової величини розглянемо такі числові характеристики: математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Математичне сподівання $M(X)$ величини X визначають так:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2\, p_2 + \ldots + x_n p_n. \quad (9)$$

Дисперсією $D(X)$ величини X називають математичне сподівання величини $(X-M(X))^2$, тобто $D(X)=(X-M(X))^2$. Зручніше обчислювати дисперсію за формулою:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i - (M(X))^2. \quad (10)$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ визначають так:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \quad (11)$$

Приклад 6. Випадкову величину X, що визначає добовий попит на певний продукт, задано законом розподілу. Знайти параметр a та числові характеристики цієї дискретної випадкової величини, якщо:

X	5	10	15	20	25
p	a	0,1	0,2	0,25	0,3

Розв'язання. Значення параметра a знаходимо, користуючись рівністю $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Оскільки $\sum_{i=1}^{n} p_i = a+0,1+0,2+0,25+0,3=1$, то $a=1-0,85=0,15$. Отже, $p_1=0,15$. За допомогою формул (9) (11) визначимо числові характеристики даної випадкової величини:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 5\cdot 0,15+10\cdot 0,1+15\cdot 0,2+20\cdot 0,25+25\cdot 0,3=17,25;$$

$$D(X)=(5^2\cdot 0,15+10^2\cdot 0,1+15^2\cdot 0,2+20^2\cdot 0,25+25^2\cdot 0,3)-(17,25)^2\approx 48,69;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{48,69}\approx 6,98.$$

5. Неперервні випадкові величини. Функція і щільність розподілу.

Література [1]: Розділи 7, 8; [2]: Розділ 4.

Випадкова величина X називається *неперервною* (НВВ), якщо її функція розподілу $F(x)$ є неперервною функцією. Множиною значень НВВ є скінчений або нескінчений проміжок. Неперервна випадкова величина задається або функцією розподілу $F(x)$ або щільністю розподілу $f(x)$. *Функція розподілу (інтегральна функція розподілу)* $F(x)$ визначає ймовірність того, що випадкова величина X набуває значень, менших за x, тобто $F(x) = P(X < x), x \in \mathbb{R}$. Тоді ймовірність попадання величини X в деякий проміжок $(a;b]$ можна обчислити за формулою:

$$P(X \in (a;b]) = F(b) - F(a). \qquad (12)$$

Зауважимо, що для неперервної випадкової величини ймовірність того, що вона набуде конкретного значення x, дорівнює нулю. Тому рівність (12) можна записати так:

$$P(X \in (a;b)) = P(X \in [a;b]) = P(X \in [a;b)) = P(X \in (a;b]) =$$
$$= F(b) - F(a). \qquad (13)$$

Щільністю розподілу (диференціальною функцією розподілу) $f(x)$ називають функцію, для якої $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Тоді для кожної точки x, в якій функція $f(x)$ є неперервною, виконується рівність:

$$f(x) = F'(x). \qquad (14)$$

Розглянемо важливу властивість щільності: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$ Якщо всі значення величини X належать проміжку $[a;b]$, то має місце рівність:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1. \qquad (15)$$

Для неперервної випадкової величини розглядають ті самі числові характеристики, що й для дискретної величини.

Приклад 7. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Записати щільність (диференціальну функцію) $f(x)$ розподілу, знайти параметр a та визначити ймовірність попадання величини X в інтервал $(-2;0)$, якщо:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ a(x+3)^2, & -3 \le x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Визначимо спочатку щільність розподілу $f(x)$, а потім знайдемо параметр a. Для цього обчислимо похідну $F'(x)$. Враховуючи правила та формули диференціювання (див. напр., [10] ст. 110–111), знаходимо:

$$(0)'=0,\ (1)'=0,\ (a(x+3)^2)'=a\cdot 2(x+3)\cdot(x+3)'=$$
$$=2a(x+3)\cdot(1+0)=2a(x+3).$$

Отже, $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ 2a(x+3), & -3\le x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

Оскільки випадкова величина X розподілена на проміжку $[-3;0]$, то за рівністю (15) (властивістю щільності) знаходимо параметр a. При цьому користуємось властивостями і таблицею інтегралів та формулою Ньютона Лейбниця (див. напр., [10] ст. 144, 163). Дістаємо:

$$1=\int_a^b f(x)dx=\int_{-3}^0 2a(x+3)dx=2a\int_{-3}^0(x+3)dx=2a\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{-3}^0=$$

$$=2a\left(\frac{0^2}{2}+3\cdot 0-\frac{(-3)^2}{2}-3\cdot(-3)\right)=2a\cdot\frac{9}{2}=9a. \quad\Rightarrow\quad a=\frac{1}{9}.$$

Зауважимо, що параметр a можна знайти, користуючись неперервністю функції $F(x)$, а саме:

$$F(0)=1\ \Rightarrow\ a(0+3)^2=1\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{9}.$$

Таким чином, функція і щільність розподілу мають вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ \dfrac{(x+3)^2}{9}, & -3\le x\le 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ \dfrac{2(x+3)}{9}, & -3\le x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

Ймовірність попадання величини X в проміжок $(-2;0)$ визначимо за формулою

(13): $P(X\in(-2;0)) = F(0) - F(-2) = 1 - \frac{(-2+3)^2}{9} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Практикум* з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Р. К. Чорней, О. Ю. Дюженкова, О. Б. Жильцов та ін.; За ред. Р. К. Чорнея. — К.: МАУП, 2003. — 328 с.
2. *Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К.* Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика. — К., 1999. — 447 с.
3. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк., 2002. — 405 с.
4. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. шк. 1999. — 400 с.
5. *Горбань С. Ф., Снижко Н. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: МАУП, 1999. — 168 с.
6. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Теорія ймовірностей із елементами математичної статистики. — К.: НМК ВО, 1991.
7. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Практикум з курсу “Теорія ймовірностей і математична статистика”. — К.: КІНГ, 1991.
8. *Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О.* Вища математика: Приклади і задачі: Посібник. — К.: Академія, 2003. — 624 с.
9. *Вища* математика. — Ч. 2: Навч. посіб. / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, В. С. Дронь, О. С. Кондур.—Чернівці: Рута, 2002. — 208 с.
10. *Практикум* з вищої математики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / І. І. Юртин, О. Ю. Дюженкова, О. Б. Жильцов та ін.; За ред. І. І. Юртина. — К.: МАУП, 2003. — 248 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленко*
Комп'ютерне верстання *А. М. Голянда*

Зам. № ВКЦ-3847

Підп. до друку 20.05.09. Формат 60x84/$_{16.}$ Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний.
Ум. друк. арк 0,87. Обл.-вид. арк. 0,70. Наклад 50 пр.
Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП
ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, пр. Червонозоряний, 119, літ. XX
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008