МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

“ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ”

(для бакалаврів)

Київ 2008

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики та програмування
Р. К. Чорнеєм

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики
та програмування (протокол № 1 від 30.08.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Чорней Р. К. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни "Основи дискретної математики" (для бакалаврів). — К.: МАУП, 2008. — 34 с.

Методичні матеріали містять пояснювальну записку, зміст самостійної роботи з дисципліни "Основи дискретної математики", приклади розв'язання типових задач, теми для самостійного вивчення, питання для самоконтролю, задачі та вправи для самостійного розв'язання, список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета і основні завдання самостійної роботи студентів — сприяти засвоєнню в повному обсязі навчальної програми дисципліни "Основи дискретної математики" та формуванню самостійності як особистісної риси і важливої професійної якості, сутність якої полягає в умінні систематизувати, планувати та контролювати власну діяльність.

Зміст самостійної роботи: опрацювання та конспектування навчального матеріалу посібника, розв'язування практичних завдань.

ЗМІСТ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
з дисципліни
"ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ"

Змістовий модуль І. Математична логіка

Тема 1. Елементи математичної логіки

1. Числення висловлювань. Операції над висловлюваннями та їх властивості.
2. Основні тавтології.
3. Булеві функції, операції над ними.
4. Застосування булевих функцій до побудови релейно-контактних схем.
5. Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми.
6. Мінімізація ДНФ булевих функцій.
7. Метод Квайна побудови скороченої ДНФ.
8. Метод Петріка побудови всіх тупикових ДНФ. Метод Блейка.
9. Числення предикатів. Операції над предикатами та їх властивості.

Література [1–4; 8; 9]

Завдання для самостійного розв'язання

1. Наведене складне речення розкласти на прості висловлювання і записати за допомогою логічних зв'язок:

а) ведмідь зможе поїсти меду тоді і тільки тоді, коли він полізе на дерево, і на цьому дереві будуть жити дикі бджоли;

б) якщо я піду в ліс і побачу там ведмедя, то сильно злякаюсь, а якщо я сильно злякаюсь, то забуду про зустріч з другом, отже, щоб не забути про зустріч з другом, я не піду до лісу.

2. Побудувавши таблиці істинності, перевірити, чи будуть такі формули тавтологіями:

а) $(d \leftrightarrow c) \to (d \to c)$;

б) $(c \to \neg d) \to (d \to \neg c)$;

в) $((c \to d) \to c) \to d$;

г) $(a \to b) \to ((a \vee c) \to b)$;

д) $(a \to (b \to c)) \leftrightarrow (b \to (a \to c))$.

3. Методом від супротивного пересвідчитися, чи будуть тавтологіями такі формули:

а) $(a \to b) \to ((a \vee c) \to (b \vee c))$;

б) $((\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)) \to ((a \to (b \vee c)) \to (a \to c))$;

в) $(a \to b) \to ((b \to a) \to (a \leftrightarrow b))$;

г) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \vee c) \to (b \vee d))$;

д) $((a \to b) \wedge (c \to b) \wedge (d \to b)) \to ((a \wedge c \wedge \neg d) \to b)$;

е) $((a \to b) \vee (a \to c) \vee (a \to d)) \to (a \to (b \vee c \vee d))$.

4. Чи є логічними такі міркування:

а) якщо Петров є членом нашої команди, то він обов'язково хоробрий і добре володіє технікою удару. Але він не належить до нашої команди. Отже, він або не хоробрий, або ж не володіє технікою удару;

б) у спортивному клубі міста Кумертау є такі правила: той, хто не займається в шаховій секції, не може займатись у секції плавання. Кожен, хто відвідує заняття з шахів, повинен відвідувати також секцію плавання і спортивної гімнастики. Отже, кожен, хто займається в секції плавання в цьому клубі, повинен відвідувати заняття зі спортивної гімнастики;

в) студент не складе екзамену, якщо погано до нього підготується. Якщо ж він не складе екзамену, то не отримуватиме стипендії. Отже, якщо студент погано підготується до екзамену, то він не матиме стипендії;

г) намічена атака пройде вдало, якщо почнеться несподівано для суперника або якщо його позиції будуть погано захищені. Захопити його зненацька можна лише тоді, коли він досить безпечний. Але якщо його позиції погано захищені, то він не буде безпечним. Отже, атака не вдасться.

5. Чи буде повною така схема логічних зв'язок $\{\wedge, \leftrightarrow, 0\}$?

6. Використовуючи перетворення в алгебрі логіки, пересвідчитися, що формули

а) $(\neg(a\vee b)\to(a\wedge b\wedge c))\vee\neg(a\wedge c)$;

б) $((a\to b)\wedge(c\to d)\wedge(e\to f))\to((a\wedge c\wedge e)\to(b\wedge d\wedge f))$;

в) $((a\vee b\vee c)\to(\neg a\wedge\neg b))\vee(a\wedge(b\vee((c\vee d)\wedge b)))$

є тавтологіями.

7. Перетворити формули алгебри логіки:

а) $((a\to b)\wedge(a\vee(b\wedge c))\wedge(a\to c))\vee\neg c$;

б) $((a\wedge b)\vee c)\to(a\to(b\vee c))$,

звівши кількість дій до однієї.

8. Чи правильно стоїть знак $\Rightarrow$ у співвідношеннях:

а) $a\to b, b\to c, c\to d\Rightarrow a\to d$;

б) $a\wedge b\wedge\neg c, b\to c, b\to a\Rightarrow b\to(a\vee c)$;

в) $(a\wedge b)\to c, (a\vee b)\to\neg c\Rightarrow a\wedge b\wedge c$?

9. Чи будуть суперечливими такі набори формул:

а) $a\leftrightarrow\neg b, \neg a\to\neg c, a\vee c, c\to b$;

б) $(a\vee b)\to c, \neg a\wedge b\wedge c$?

10. Дехто A тримає в руці (невідомо, в правій чи лівій) монету. Відомо, що A завжди або обманює, або говорить правду (але невідомо, що саме). Яке питання потрібно поставити A, щоб дізнатися, в якій руці у нього монета?

11. Якщо формули $A\vee B$ і $\neg A\vee C$ є тавтологіями, то $B\vee C$ — також. Довести це.

12. За допомогою таблиць істинності побудувати ДДНФ та ДКНФ для формул алгебри логіки:

а) $((a\to b)\leftrightarrow(c\vee a))\to a$;

б) $((a\wedge b)\to\neg c)\vee(a\wedge(\neg b\to c))$;

в) $(a\leftrightarrow((c\wedge b)\to a))\vee(b\wedge\neg c)$;

г) $((a\leftrightarrow(b\vee c))\to(b\wedge\neg a))\to(b\vee\neg c)$.

13. Застосовуючи алгоритм зведення до ДНФ та КНФ, побудувати ДНФ та КНФ, рівносильні формулам:

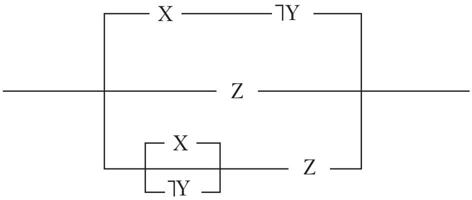
а) $(a\wedge(b\vee\neg(c\to d)))\leftrightarrow(a\vee(\neg b\leftrightarrow c))$;

б) $(a\wedge(b\vee\neg(c\to d)))\leftrightarrow(b\to(\neg d\leftrightarrow a))$;

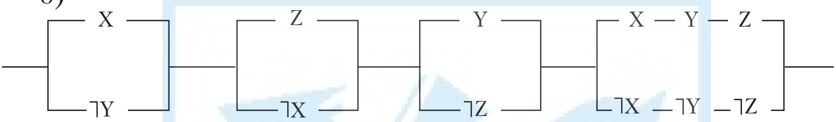
в) $(a\wedge\neg(c\leftrightarrow b))\to(a\to(\neg b\vee a))$.

14. Спростити схему:

а)



б)



15. Побудувати мінімальну (таку, що містить найменш можливу кількість змінних) ДНФ, яка рівносильна формулі:

а) $\left(\left(a \wedge b\right) \to c\right) \leftrightarrow a$;

б) $\left(\left(a \vee c\right) \leftrightarrow b\right) \to \neg a$.

16. Між поверхами двоповерхового будинку є одна лампа. Побудувати схему так, щоб на кожному поверсі можна було вимикачем вмикати і вимикати світло незалежно від положення іншого вимикача.

17. Потрібно, щоб у великому залі можна було вмикати і вимикати світло за допомогою будь-якого з чотирьох вимикачів, що розташовані на чотирьох стінах залу. Скласти схему.

18. Комітет складається з п'яти осіб, рішення приймається більшістю голосів. Якщо голова голосує проти, рішення не приймається. Скласти таку схему, щоб голосування відбувалося натисканням на кнопку, і у разі, коли рішення прийнято, вмикалася лампа.

19. Записати мовою числення предикатів такі твердження:

а) жодному лисому не потрібен гребінець;

б) не всі двієчники ледачі;

в) деякі митці не є неробами;

г) деякі нероби не є митцями;

д) той, хто вміє приборкувати крокодилів, заслуговує на повагу;

е) деякі свині не є орлами;

є) квадратні корені з деяких раціональних чисел — ірраціональні;

ж) простих чисел, більших за $10^{10^{10}}$, не існує;

з) деякі людожери — погані люди.

20. Нехай на множині людей задано предикати: Б(x, y) = “x батько y”, М(x, y) = “x мати y”, С(x, y) = “x син у”, Д(x, y) = “x дочка y”. Виразити через них такі предикати:

а) “x брат y”;

б) “x тітка y”;

в) “x сестра y”;

г) “x вуйко y”;

д) “x дід y з боку батька”.

21. Нехай предикати Т(x) = “x — точка”, П(x) = “x — пряма”, ТП(x, y) = “точка x належить прямій y” визначені на множині точок і прямих площини. Виразити через них предикати:

а) “прямі x і y перетинаються”;

б) “точки x, y і z лежать на одній прямій”;

в) “точки x і y лежать на прямій, паралельній до прямої z”;

г) “прямі x і y — паралельні”.

22. Записати формулою в сигнатурі Т, П, ТП попереднього завдання твердження:

а) “через кожну точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну до даної”;

б) “дві прямі перетинаються не більш як в одній точці”;

в) “через кожні дві точки можна провести тільки одну пряму”.

23. Використовуючи поняття логічного наслідку для логіки предикатів, пересвідчитися, чи будуть правильними такі міркування:

а) якщо функція диференційована на даному проміжку, то вона неперервна на ньому. Функція $y = \sin x$ диференційована на проміжку $[0, \pi]$. Отже, вона неперервна на ньому;

б) якби хто-небудь міг розв’язати цю логічну задачу, то й студент Іванов розв’язав би її. Але він її не розв’язав. Отже, ця задача нерозв’язна;

в) якщо кожен з двох людей є родичем третього, то вони також родичі. Іванов і Петров — родичі Сидорова. Отже, Іванов є родичем Петрова;

г) якщо число розкладається на добуток s різних простих чисел, то воно має 2^s різних дільників. Дане число має точно 2^s різних дільників. Отже, воно розкладається на добуток s різних простих чисел.

Питання для самоконтролю

1. Що таке висловлювання?
2. Що таке інтерпретація висловлювання?
3. Прості і складені висловлювання. Приклади.
4. Що таке область істинності?
5. Запишіть таблиці істинності основних операцій над висловлюваннями: диз'юнкції, кон'юнкції, імплікації, еквівалентності, заперечення, виключного або, штриха Шефера, стрілки Пірса.
6. Вкажіть правила синтаксису числення висловлювань.
7. Що таке синтаксичне дерево?
8. Наведіть означення тотожно-істинної, тотожно-хибної, виконливої формул.
9. Що таке модель формули?
10. Дайте означення логічного наслідку формули.
11. Сформулюйте та доведіть основні типи логічних наслідків: *modus ponens, modus tollens*, правило силогізму, метод резолюцій, правила введення диз'юнкції і кон'юнкції, правила зняття подвійного заперечення і його введення.
12. Еквівалентність формул. Теорема про еквівалентність тверджень. Вивести за допомогою таблиць істинності основні еквівалентності: ідемпотентність, комутативність, асоціативність, дистрибутивність, доповнювальність, виключення імплікації та еквівалентності, закони де Моргана.
13. Сформулюйте принцип двоїстості числення висловлювань.
14. Що таке елементарна диз'юнкція? Елементарна кон'юнкція?
15. Дайте означення диз'юнктивної та кон'юнктивної нормальної форми. Чи будь-яка формула числення висловлювань еквівалентна деякій ДНФ і КНФ? Доведіть.
16. Скільки існує булевих векторів розмірності n? А булевих функцій від n змінних?
17. Який набір логічних зв'язок називається повним? Сформулюйте теорему Поста.
18. Що таке досконала ДНФ і КНФ? Виведіть алгоритм отримання ДДНФ та ДКНФ для заданої формули числення висловлювань.
19. Як будуються релейно-контактні схеми?
20. Що таке висловлювальна форма? У чому полягає відмінність числення висловлювань та числення висловлювальних форм?

21. Дайте означення предиката. Операції над предикатами.
22. Синтаксис і семантика числення висловлювальних форм.

Тема 2. Рекурентні співвідношення

1. Метод математичної індукції.
2. Задачі, що приводять до рекурентних співвідношень.
3. Розв’язування деяких класів рекурентностей.

Література [1–5; 9]

Завдання для самостійного розв’язання

1. Довести тотожності:

а) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+2)}{6}, \quad \forall n\in\mathbb{N};$

б) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \forall n\in\mathbb{N};$

в) $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1), \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

2. Довести, що число a ділиться на число b, якщо:

а) $a=n^3-7n, \; b=6, \quad \forall n\in\mathbb{Z};$

б) $a=6^{2n-1}+1, \; b=7, \quad \forall n\in\mathbb{N};$

в) $a=7^{n+1}+8^{2n-1}, \; b=19, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

3. Довести нерівності:

а) $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}<\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \forall n\in\mathbb{N};$

б) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}>\dfrac{4^n}{n+1}, \quad \forall n>1;$

в) $2^n>n^3, \quad \forall n>9;$

г) $2^{n-1}\left(a^n+b^n\right)>(a+b)^n, a>0, b>0, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

4. На площині довільним чином проведено n прямих. Довести, що чорною і білою фарбами можна так замалювати площину, що будь-які дві частини, які мають спільну сторону, матимуть різний колір.

5. Довести, що функції $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ і $S_n(x)=\sin((2n+1)\arcsin x)$, визначені на відрізку $[-1;1]$, збігаються з деякими многочленами степенів n і $2n+1$ відповідно.

6. На скільки частин розбивають площину n прямих, з яких жодні дві не паралельні і жодні три не проходять через одну точку?

7. На скільки частин розбивають площину n гострих однакових кутів, причому жодні два промені не паралельні і жодні три не проходять через одну точку?

8. Довести тотожності:

а) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}, \quad \forall n\in\mathbb{N};$

б) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad \forall n\in\mathbb{N};$

в) $5+45+\ldots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n5^n, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

9. Довести, що $\forall n\in\mathbb{N}$ число a ділиться на число b, якщо:

а) $a=1+3^{3n+1}+9^{3n+1}, b=13$;

б) $a=2n^3+3n^2+7n, b=6$;

в) $a=5^n-3^n+2n, b=4$.

10. Довести, що будь-яке число, більше як 7, можна розкласти на суму трійок і п’ятірок.

11. На площині проведено n кіл так, що кожні два з них перетинаються у двох точках і жодні три не мають спільної точки. На скільки частин розіб’ється при цьому площина?

12. Розв’язати рекурентність:

а) $a_0=1, a_1=3, a_n=4a_{n-1}-3a_{n-2}$;
б) $a_0=1, a_1=5, a_n=4a_{n-1}+5a_{n-2}$;
в) $a_0=1, a_1=4, a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2}$;
г) $a_0=1, a_1=2, a_n=-10a_{n-1}-25a_{n-2}$.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте у термінах числення висловлювальних форм метод математичної індукції та доведіть його.
2. Доведіть за допомогою методу математичної індукції нерівності Бернуллі та Коші.
3. Як задається рекурентне співвідношення? Розв’яжіть задачу про Ханойську вежу?
4. Лінійні рекурентні співвідношення другого порядку. Їх розв’язання.
5. Розв’яжіть рекурентність Фібоначчі.

Змістовий модуль II. Теорія множин

Тема 3. Основи теорії множин. Комбінаторика

1. Основні поняття теорії множин.
2. Парадокс Рассела.
3. Операції над множинами та їх властивості.
4. Закони де Моргана.
5. Декартів добуток множин.
6. Поняття автомата як моделі роботи комп'ютера.
7. Основні принципи комбінаторики.
8. Розміщення, перестановки, комбінації (з повтореннями і без).
9. Біноміальні коефіцієнти та їх інтерпретації.
10. Поліноміальні коефіцієнти.
11. Формули включень і виключень.
12. Генератриса та її застосування в комбінаториці.
13. Поняття про класичну ймовірність.
14. Зліченні та незліченні множини, основні теореми.
15. Зліченність множини раціональних чисел та незліченність множини двійкових послідовностей.
16. Порівняння потужностей множин та їх булеана.
17. Поняття про кардинальні числа.

Література [1–6; 9]

Завдання для самостійного розв'язання

1. Для заданих множин A, B і C обчислити $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup C) \cap B$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$, $(A \setminus C) \cap (A \setminus B)$, якщо:

а) $A = \{1,3,5,6\}, B = \{1,2,3,5,7\}, C = \{2,4,7\}$;

б) $A = \{x \in \mathrm{P} \mid x^2 + x - 2 \le 0\}, B = \{y \in \Theta \mid y^2 + y - 2 = 0\}$,

$C = \{x \in \mathrm{P} \mid x^2 > 0\}$.

2. Про групу студентів у 30 осіб відомо, що 19 студентів вивчають математику, 17 — музику, 11 — історію, 12 — математику і музику, 7 — історію та математику, 5 — музику та історію, 2 — математику, історію та музику. Скільки студентів вивчає історію, але не вивчає математики?

3. Відомо, що кожен учень школи вивчає принаймні одну іноземну мову. 28 учнів вивчають англійську мову, 23 учні — французьку, 23 — німецьку, 12 — англійську та французьку, 11 — англійську та німецьку, 8 — французьку та німецьку, 5 — всі три мови. Скільки учнів вчиться в школі?

4. У жорстокому бою не менше 70 % піратів втратили одне око, не менше 75 % — одне вухо, не менше 80 % — одну руку та не менше 85 % — одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, що втратили одночасно і око, і ногу, і вухо, і руку?

5. Завербований Москвою американський дипломат повідомив: "У вищих колах армії США деградація та розклад. З 75 чотиризіркових генералів 30 алкоголіків, 28 наркоманів і аж 35 розпусників. 6 є і алкоголіками, і наркоманами одночасно, 11 — наркомани та розпусники, 8 — алкоголіки та розпусники. Немає жодного генерала без якоїсь з цих хиб!". Доведіть, що це дезінформація.

6. У трансконтинентальному літаку перебувають: 9 хлопчиків, 5 українських дітей, 9 дорослих чоловіків, 7 іноземних хлопчиків, 14 українців, 6 українців чоловічої статі та 7 іноземок жіночої статі. Скільки всього осіб було в літаку?

7. Одного разу під час розмови за кавою в клубі міжгалактичних мандрівників знаменитий член цього клубу, Мюнхгаузен космічної ери, Йон Тихий, мандрівки якого описані Station Лемом у "Зоряних щоденниках Йона Тихого", розповідав: "Висадка на планету Гесиод була дуже важкою. Та коли я опинився на поверхні, то пожалкував, що вирішив тут приземлитися: на ній жили чудовиська ще страшніші, ніж ті, що змальовані в грецьких міфах. Назустріч мені вийшла делегація з 1000 жителів планети. У 811 з них було одне око, як у велетня Полифема, у 752 — замість волосся були змії, як у Медузи Горгони, а 418 мали риб'ячий хвіст. При цьому 570 створінь були одноокі зі зміїним волоссям, 356 — одноокі та з риб'ячим хвостом, 348 — зі зміїним волоссям та з риб'ячим хвостом, а 297 — одноокі зі зміїним волоссям та риб'ячим хвостом. Старший з них звернувся до мене і сказав...". У цей момент професор Тарантота миттєво виконав якісь обчислення і вигукнув: "Любий Йоне! Я готовий повірити, що на цій планеті жили істоти з одним оком, зі зміями замість волосся і з риб'ячими хвостами. Тобі доводилось зустрічати і більш дивних потвор — згадай про курдлів. Та я сподіваюся, що закони математики ще не перетворилися на міфи". Що мав на увазі професор Тарантота?

8. Довести рівність множин:

а) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$;

б) $A \Delta B = \left(A \cap \bar{B}\right) \cup \left(\bar{A} \cap B\right)$;

в) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

г) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

д) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

е) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$;

є) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$;

ж) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

з) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

и) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

9. Використовуючи основні теоретико-множинні тотожності, довести наведені рівності шляхом рівносильних перетворень:

а) $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \Omega$;

б) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$;

в) $A \cap \left(\overline{(A \cup \bar{B})} \cup \overline{(\bar{A} \cup B)} \right) \cup \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} = A$;

г) $(\bar{B} \setminus A) \cup (A \setminus C) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap C) = \Omega$.

10. Скільки є п’ятизначних чисел, які діляться на 5?
11. Учні вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?
12. Скільки є чисел у системи числення за основою *n*, для запису яких потрібно використати точно *k* знаків?
13. Скільки є п’ятизначних чисел, у яких кожна наступна цифра більша попередньої?
14. Скільки існує п’ятизначних чисел, які діляться на 3?
15. З точки проведено *n* променів. Скільки кутів вони утворюють?
16. На залізничній станції *n* семафорів, кожен з яких може знаходитися в одному з 3 положень. Скільки можна дати різних сигналів одночасно?
17. Скільки є натуральних чисел, менших 100, цифри яких ідуть у зростаючому порядку?
18. Скільки існує камінців у грі доміно? Скількома способами можна вибрати два камінці, які можна прикласти один до одного?
19. Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не могли бити одна одну?
20. Скількома способами *n* людей можуть стати в коло?
21. Скільки є способів складання намиста із *k* різних предметів?
22. Скількома способами можна поставити дві тури на шахову дошку так, щоб одна не била іншої?
23. Скількома способами можна поставити два ферзі на шахову дошку так, щоб один не бив іншого?

24. Скількома способами можна з 7 осіб вибрати комісію, яка складається з 3 осіб?
25. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?
26. На площині дано n точок, причому m точок лежать на одній прямій. Скільки існує невироджених трикутників зі стороною, що лежить на цій прямій?
27. У чемпіонаті з футболу беруть участь 16 команд. Будемо говорити, що результати двох чемпіонатів з футболу тотожні, якщо в результаті цих чемпіонатів однакові команди отримують золоту, срібну, бронзову медалі і залишають вищу лігу (4 команди). Скільки є різних, не тотожних чемпіонатів?
28. На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на другій m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено прямими з точками на протилежній стороні. На скільки частин поділиться трикутник цими прямими?
29. Скільки можна зробити перестановок із n елементів, у яких дані 2 елементи стоять поруч?
30. Скількома способами можна розставити 10 книг на полиці, щоб певні 3 книги не стояли поруч?
31. З колоди у 52 карти вибрали 10 карт.
   а) У скількох випадках серед цих карт є хоча б один туз?
   б) У скількох випадках серед цих карт був рівно один туз і дві карти бубнової масті?
   в) У скількох випадках серед цих карт було не менше двох тузів?
   г) У скількох випадках серед цих карт є рівно два тузи і рівно 3 карти хрестової масті?
32. Скількома способами можна вибрати 5 свідків з 12 осіб, що сиділи в одному ряду, так, щоб свідки не сиділи поруч?
33. На площині є n різних точок. Кожні дві точки сполучаються відрізком. Скільки відрізків утвориться при цьому?
34. Скільки існує цілочисельних трикутників, довжина максимальної сторони яких дорівнює n?
35. Скільки існує цілочисельних трикутників, периметр яких дорівнює n?
36. 6 ящиків пронумеровано від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 20 однакових куль так, щоб жоден ящик не виявився порожнім?

37. 12 п’ятаків розклали по 5 різних гаманцях так, щоб жоден гаманець не виявився порожнім. Яка ймовірність того, що в першому гаманці буде 7 монет?
38. Скількома способами можна розкласти намисто, що складається з 30 різних бусинок, на 8 частин (різати можна тільки між бусинками)?
39. На поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити в ньому:
 а) 12 листівок;
 б) 8 листівок;
 в) 8 різних листівок?
40. У гаманці лежать по 20 монет вартістю 10, 25 і 50 копійок. Яка ймовірність того, що серед вибраних 20 монет з цих 60 є 10 монет вартістю 50 копійок?
41. Скількома способами можна розкласти в 6 різних ящиків 4 чорні, 4 білі і 4 сині кулі?
42. У 9 різних лузах розташували 7 білих і 2 чорні кулі (деякі лузи можуть бути порожніми). Яка ймовірність того, що обидві чорні кулі опиняться в одній лузі?
43. Виклали в ряд 5 червоних, 5 синіх і 5 зелених куль. Яка ймовірність того, що дві сині кулі не лежать поряд?
44. У квітковому магазині під кінець робочого дня залишилося 7 троянд білого кольору, 8 червоного і по 9 рожевого і жовтого. Скількома способами можна скласти букет з 5 квітів, якщо троянди одного кольору не відрізняються?
45. У класі 28 учнів — 16 дівчаток і 12 хлопчиків, які сидять за 15 партами.
 а) Скількома способами можна розсадити дітей за партами?
 б) Скількома способами можна розсадити учнів так, щоб кожен хлопчик сидів з дівчинкою?
 в) Скількома способами можна розсадити дітей так, щоб жоден хлопчик не сидів з дівчинкою?
46. Є кубики червоного, помаранчевого, білого і синього кольорів. Скількома способами дитина може скласти башту з 6 кубиків?
47. У Петра 6 друзів, і кожен день протягом кількох днів він запрошує до себе в гості трьох з них так, що компанія жодного разу не повторюється. Скільки днів Петро може так запрошувати до себе гостей і скількома способами це можна зробити?

48. По пустелі іде караван верблюдів. Після перепочинку верблюдів переставили так, щоб попереду кожного верблюда йшов інший верблюд, ніж раніше. Скількома способами можна це зробити?

49. Розкрити дужки:

а) $(2x+y)^6$;

б) $(x+y+z)^4$.

50. У розкладі $(1+x)^n$ коефіцієнти при x^5 і x^{12} однакові. Знайти n.

51. Чому дорівнює коефіцієнт у розкладі $\left(x+y^2+z\right)^{15}$:

а) при $x^6y^{10}z^4$;

б) при $x^4y^8z^6$?

52. 7 монет кинули на стіл. Скільки є можливих варіантів їх падіння, якщо:

а) всі монети різної вартості;

б) всі монети однакові?

53. Скільки є чисел, більших 1 і менших 10000, які не діляться хоча б на одне з чисел 2, 5, 3?

54. Скільки є десятизначних чисел, у яких сума цифр дорівнює трьом?

55. Скільки різних десятизначних чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, причому цифра 3 вживається рівно двічі?

56. Скількома нулями закінчується число “100!”?

57. На конференції повинні виступити доповідачі *A, B, C, D* і *E*, причому *A* не може виступати раніше за *B*. Скількома способами можна це здійснити?

58. На колі помічено 1000 білих і 1 чорну точки. Яких фігур більше — трикутників, у яких всі вершини білі, чи чотирикутників, у яких одна вершина чорна, а решта білі?

59. Чи справедливі такі твердження:

а) якщо для множин A і B справедливо $A=B$, то $A\sim B$;

б) якщо $A\sim B$, то $A=B$?

60. Довести, що будь-які два інтервали (a,b) і (c,d) рівнопотужні.

61. Довести, що множина всіх нескінченних булевих векторів рівнопотужна множині всіх підмножин множини $\mathbb{N}$.

62. Довести, що множина всіх цілих чисел є зліченною.

63. Довести, що множина всіх раціональних чисел є зліченною.

64. Довести, що множина всіх простих чисел є зліченною.

65. Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини є зліченною.
66. Довести, що будь-яка множина відкритих інтервалів на дійсній прямій, що попарно не перетинаються, є скінченною або зліченною.
67. Довести, що множина точок розриву монотонної функції на дійсній прямій є скінченною або зліченною.
68. Якою є потужність множини всіх многочленів від n змінних з раціональними коефіцієнтами?
69. Якою є потужність множини всіх алгебраїчних чисел?
70. Якою є множина всіх ірраціональних чисел?
71. Якою є множина всіх трансцендентних (неалгебраїчних) чисел?
72. Чи будуть рівнопотужними такі множини:
 а) множина всіх скінченних підмножин множини дійсних чисел і множина всіх нескінченних підмножин множини дійсних чисел;
 б) множина всіх скінченних підмножин множини раціональних чисел і множина всіх нескінченних підмножин множини раціональних чисел;
 в) множина всіх прямих на площині і множина всіх точок на площині?
73. Довести, що множина всіх ірраціональних чисел з $(0,1)$ є незліченною.

Питання для самоконтролю

1. Дайте наївне означення множини. У чому його вади? Сформулюйте парадокс Рассела.
2. Рівність множин. Підмножина. Власна підмножина. Який зв'язок мають перелічені поняття?
3. Що таке функція? Дайте означення образа та прообраза. Чим відрізняється прообраз від повного прообраза? А область визначення від області значень?
4. Дайте означення ін'єкції, сюр'єкції та бієкції.
5. Як задається характеристична функція множини?
6. Операції над множинами: об'єднання, перетин, різниця, доповнення, симетрична різниця. Властивості операцій над множинами: ідемпотентність, комутативність, асоціативність, дистрибутивність, доповнюваність, правила де Моргана.

7. Сформулюйте узагальнені закони дистрибутивності та де Моргана.
8. Що таке декартів добуток множин? Дайте означення графіка функції.
9. Декартів добуток сукупності множин. Проекція. Означення та зв'язок.
10. Відображення декартових добутків.
11. Що таке булеан множини?
12. Чим займається комбінаторика?
13. Сформулюйте основні правила комбінаторики: правило суми (розбиття), добутку, узагальнені правила суми та добутку.
14. Що таке розміщення та перестановки? Виведіть формули для підрахунку кількості розміщень і перестановок.
15. Чим комбінації відрізняються від розміщень? Як підрахувати кількість комбінацій?
16. Наведіть та доведіть властивості чисел C_n^k. Біном Ньютона.
17. За якою формулою знаходять поліноміальні коефіцієнти?
18. Що таке перестановка з повтореннями? Як визначається їх кількість? Доведіть.
19. Сформулюйте та доведіть формулу включень і виключень.
20. Потужність множин. Сформулюйте та доведіть теорему Кантора — Бернштейна.
21. Дайте означення зліченної множини. Властивості зліченних множин.
22. Незліченні множини. Теорема про незліченність булеана множини натуральних чисел.
23. Що таке кардинальні числа? Сформулюйте континуум-гіпотезу.

Тема 4. Відношення та відповідності

1. Відношення та предикати, основні операції над ними.
2. Спеціальні типи відношень: функціональні відношення, відношення еквівалентності (поняття фактор-множини), відношення часткового порядку, поняття решітки.

Література [3; 4; 9]

Завдання для самостійного розв'язання

1. Нехай $M=\{1,2,3,4,5\}$. Для заданого відношення R на множині M визначити $\mathrm{Pr}_1 R$, $\mathrm{Pr}_2 R$, R^{-1}, $R\circ R$, $R\circ R^{-1}$ і $R^{-1}\circ R$:

а) $R=\{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$;

б) $R=\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,1),(5,4)\}$;

в) $R=\{(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(5,2)\}$;

г) $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,2),(4,3),(5,1),(5,5)\}$.

2. Для заданого відношення R на множині $\mathbb{N}$ визначити $\mathrm{Pr}_1 R$, $\mathrm{Pr}_2 R$, R^{-1}, $R\circ R$, $R\circ R^{-1}$, $R^{-1}\circ R$ і $\bar{R}$, якщо:

а) $R=\{(m,n)\mid n \text{ ділиться на } m\}$;

б) $R=\{(m,n)\mid m-n \text{ ділиться на } k, k\in\mathbb{N}\}$.

Визначити, чи будуть ці відношення рефлексивними, антирефлексивними, симетричними, антисиметричними, транзитивними.

3. Довести, що для будь-яких відношень виконується:

а) $(R\cup R)\cap R=R$;

б) $\left(R^{-1}\right)^{-1}=R$;

в) $(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$.

4. На множині $\mathbb{Z}$ задано відношення:

а) $(m,n)\in R_1 \Leftrightarrow m-n$ парне число;

б) $(m,n)\in R_2 \Leftrightarrow m+n$ парне число;

в) $(m,n)\in R_3 \Leftrightarrow m-n\le 100$;

г) $(m,n)\in R_4 \Leftrightarrow m-n$ непарне число;

д) $(m,n)\in R_5 \Leftrightarrow m+n$ непарне число;

е) $(m,n)\in R_6 \Leftrightarrow m/n$ парне число;

є) $(m,n)\in R_7 \Leftrightarrow m/n$ непарне число;

ж) $(m,n)\in R_8 \Leftrightarrow m\cdot n$ парне число;

з) $(m,n)\in R_9 \Leftrightarrow m\cdot n$ непарне число;

и) $(m,n)\in R_{11} \Leftrightarrow m-n$ є степенем числа 2;

і) $(m,n)\in R_{10} \Leftrightarrow m-n$ мають спільний дільник, відмінний від 1.

Визначити, які з них є:

а) рефлексивними;

б) антирефлексивними;

в) симетричними;

г) антисиметричними;

д) транзитивними.

5. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ двох антирефлексивних відношень R_1 і R_2 може не бути антирефлексивним відношенням.

6. Довести, що для симетричних відношень R_1 і R_2 будуть симетричними відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}, $R_1 \circ R_1^{-1}$.

7. Побудувати два симетричні відношення R_1 і R_2 на множині $M = \{1,2,3,4\}$, композиція яких $R_1 \circ R_2$ не буде симетричним відношенням.

8. Навести приклад транзитивних відношень R_1 і R_2 на множині $M = \{1,2,3,4\}$ таких, що:

а) $R_1 \circ R_2$ нетранзитивне;

б) $R_1 \circ R_2$ транзитивне;

в) $R_1 \circ R_2 \neq R_1$;

г) $R_1 \circ R_2 = R_1$.

9. Побудувати відношення:

а) симетричне, транзитивне, нерефлексивне;

б) рефлексивне, симетричне, нетранзитивне;

в) рефлексивне, антисиметричне, нетранзитивне;

г) рефлексивне, симетричне, транзитивне;

д) несиметричне, неантисиметричне;

е) нерефлексивне, неантирефлексивне, несиметричне, транзитивне.

10. Побудувати транзитивні, рефлексивні і симетричні замикання R^* відношень з прикладу 1 цього розділу.

11. Скільки є рефлексивних відношень на множині з n елементів? Скільки антирефлексивних?

12. Нехай M множина всіх прямих на площині. Чи будуть відношеннями еквівалентності на M такі відношення:

а) паралельність прямих;

б) перпендикулярність прямих?

13. Навести приклад двох відношень еквівалентності R_1 і R_2 на множині $M = \{1,2,3,4\}$ таких, що $R_1 \circ R_2$ не є відношенням еквівалентності на M.

14. Нехай задано довільне відношення R на множині M. Сформулювати алгоритм, який за допомогою основних операцій над відношеннями дозволяє побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M таке, що $R \subseteq Q$.

15. Побудувати фактор-множини за відношеннями еквівалентності з прикладів 1, 2. Визначити їх індекси.

16. Довести, що множина всіх підмножин (булеан) даної множини частково впорядкована за відношенням включення.

17. Нехай $a \le b \Leftrightarrow a,b \in \mathbb{N}$ і a ділить b. Довести, що $\le$ — частковий порядок на $\mathbb{N}$.

18. Означимо на множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел відношення T: aTb тоді і тільки тоді, коли $\frac{a}{a^2+1} \le \frac{b}{b^2+1}$, $a,b \in \mathbb{R}$. Довести, що:

а) T не є відношенням часткового порядку на всій множині $\mathbb{R}$;

б) T є відношенням часткового порядку на множині дійсних чисел з інтервалу $(1,\infty)$;

в) T є відношенням часткового порядку на множині дійсних чисел з інтервалу $(-\infty,-1)$.

19. Побудувати всі неізоморфні відношення часткового порядку на множині:

а) $M = \{a,b\}$;

б) $M = \{a,b,c\}$;

в) $M = \{a,b,c,d\}$.

20. Перелічити усі неізоморфні частково-впорядковані 6-елементні множини з найбільшим і чотирма мінімальними елементами.

21. Перелічити усі неізоморфні частково-впорядковані 5-елементні множини з найменшим і найбільшим елементами.

22. Побудувати приклад частково впорядкованої множини, яка має:

а) точно один мінімальний елемент, але не має найменшого елемента;

б) точно один максимальний елемент, але не має найбільшого елемента;

в) один мінімальний і один максимальний елементи, але не має найменшого і найбільшого елементів;

г) не має жодного мінімального і максимального елементів, та не має найменшого і найбільшого елементів.

23. Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

24. Лінійно впорядкована множина називається цілком впорядкованою, якщо кожна її непорожня підмножина має мінімальний елемент. Довести, що:

а) множина N, де $0 < 2 < 4 < \ldots < 1 < 3 < 5 < \ldots$ є цілком впорядкованою;

б) множина N, де $\ldots < 4 < 3 < 2 < 1$ не є цілком впорядкованою;

в) множина Z, де $1 < 2 < 3 < \ldots < 0 < -1 < -2 < \ldots$ є цілком впорядкованою.

25. Довести, що частково впорядкована за відношенням включення $\subseteq$ множина $\beta(M)$ всіх підмножин M є решіткою.

26. Довести, що множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел з відношенням часткового порядку "ділить" є решіткою.

27. Розглянемо множину $\mathbb{R}^n$ кортежів дійсних чисел довжини n з відношенням часткового порядку, означеним так: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \le b_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots n$. Довести, що частково впорядкована у такий спосіб множина $\mathbb{R}^n$ є решіткою.

28. Довести, що в будь-якій скінченній решітці існує найбільший та найменший елементи.

29. Навести приклади решіток:

а) без найбільшого елемента, але з найменшим елементом;

б) без найменшого елемента, але з найбільшим елементом;

в) без найбільшого і найменшого елементів.

30. Чи утворюватиме повну решітку впорядкована за відношенням включення множина:

а) всіх рефлексивних;

б) всіх антирефлексивних;

в) всіх симетричних;

г) всіх антисиметричних;

д) всіх транзитивних

відношень на даній множині M?

31. Довести, що множина всіх дільників натурального числа n, частково впорядкована за відношенням "ділить", є повною решіткою.

32. Нехай на множині $L = \{a, b, c, d, e\}$ задано відношення $R = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,e), (c,e), (d,e)\}$. Чи буде множина L:

а) частково впорядкованою множиною;

б) решіткою;

в) повною решіткою ?

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення відношення та характеристичного предиката. Операції над відношеннями.

2. Сформулюйте означення рефлексивного, антирефлексивного, симетричного, антисиметричного, транзитивного відношень. Що таке замикання відношення? Яке відношення називається відношенням еквівалентності?
3. Що таке фактор-множина? Що таке сукупність представників класів еквівалентності? Дайте означення лишків за модулем n.
4. Сформулюйте та доведіть малу теорему Ферма.
5. Відношення строгого та нестрогого часткового порядку. Частково-впорядкована множина.
6. Відношення лінійного або повного порядку. Ізоморфні множини. Прямий та зворотний лексикографічний порядок.
7. Наведіть приклади решіток.

Змістовий модуль III. Теорія графів і теорія автоматів

Тема 5. Теорія графів

1. Графи, способи задання графів. Степені вершин. Ізоморфізм графів.
2. Маршрути (шляхи) у графі. Зв'язність графів.
3. Дерева та їх властивості.
4. Двочасткові графи.
5. Планарні графи, критерії планарності графів.
6. Розфарбування графів.
7. Обходи графів.
8. Ейлерові та гамільтонові графи.
9. Орієнтовані графи.
10. Застосування теорії графів.

Література [1–4; 7; 9]

Завдання для самостійного розв'язання

1. Нехай задано граф $G=(V,E)$.

а) $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{(1,3),(2,3),(3,4),(4,1),(4,2)\}$;

б) $V=\{1,2,3,4,5\}$, $E=\{(1,5),(1,4),(2,4),(3,5),(5,2)\}$.

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності для кожного із заданих графів.

2. Чому дорівнює степінь кожної вершини у повному графі з n вершинами?

3. Скільки ребер містить повний граф із n вершинами?

4. Графи G_1 і G_2, визначені на множинах $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ і $V=\{a',b',c',d',e',f'\}$ відповідно, задані матрицями суміжностей A_1 і A_2 відповідно. Побудувати діаграми графів $G_1 \cup G_2$, $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, якщо:

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$A_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

5. Довести, що доповненням графа $\bar{G}$ є граф G.

6. Як за допомогою матриці суміжності A графа G визначити:

а) кількість вершин графа G;

б) кількість ребер графа G;

в) степінь деякої вершини графа G;

г) чи є граф G повним графом;

д) чи є граф G дводольним графом?

7. Нехай у графі G з n вершинами і m ребрами є p вершин степеня t, а всі інші вершини мають степінь $t+1$. Довести, що $p=(t+1)n-2m$.

8. Чи існує граф з n вершинами, усі вершини якого є кінцевими, якщо:

а) $n=10$;

б) $n=11$;

в) $n=2k$;

г) $n=2k+1$.

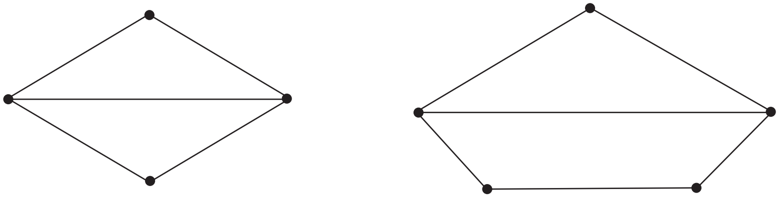
9. Побудувати кубічний граф, що має:

а) 6 вершин;

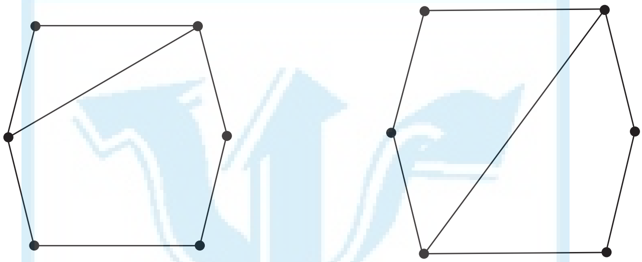
б) 4 вершини;

в) 8 вершин.

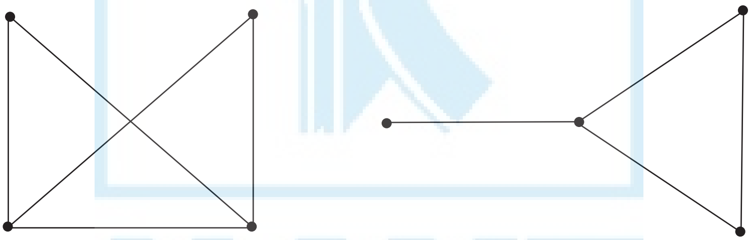
10. Визначити, чи є серед пар графів, зображених на рисунках, ізоморфні.



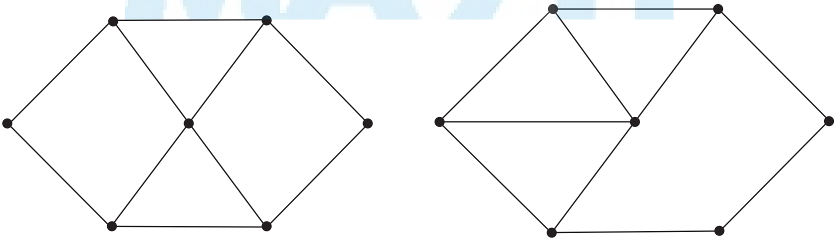
а)



б)



в)



г)

11. Довести, що ізоморфізм є відношенням еквівалентності на множині всіх графів.

12. Побудувати чотири попарно неізоморфні самодоповнювальні (тобто такі, що ізоморфні своєму доповненню) графи з 8 вершинами.

13. Перевірити, чи будуть ізоморфними графи G_1 і G_2, задані матрицями суміжності A_1 і A_2 відповідно, якщо:

а) $$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

б) $$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Зобразити всі попарно неізоморфні графи з n вершинами, якщо:

а) $n = 2$;

б) $n = 3$;

в) $n = 4$;

г) $n = 5$.

15. Знайти в графі K_5 цикли довжини:

а) 3;

б) 4;

в) 6;

г) 9;

д) 10.

Які з цих циклів є простими?

16. Довести, що зв'язний граф є простим циклом тоді і тільки тоді, коли степінь кожної вершини дорівнює 2.

17. Скільки ребер містить:

а) простий ланцюг із k вершин;

б) простий цикл із k вершин;

в) найкоротший простий цикл?

18. Зобразити кубічний граф з $2n$ вершинами ($n \geq 3$), який не має трикутників.

19. Довести, що граф є дводольним тоді і тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.

20. Довести, що для довільного графа G або він сам, або його доповнення $\bar{G}$ є зв'язним графом.

21. Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають:

а) 6 вершин, 7 ребер і 2 компоненти зв'язності;

б) 8 вершин, 6 ребер і 2 компоненти зв'язності;

в) 8 вершин, 6 ребер і 3 компоненти зв'язності?

22. Побудувати три попарно неізоморфні графи з 8 вершинами, які мають ейлерові цикли.

23. Перевірити, чи будуть графи з прикладу 13 ейлеровими, напівейлеровими, гамільтоновими, напівгамільтоновими.

24. Побудувати граф із 8 вершинами, який не має ейлеревого циклу, але має ейлерів ланцюг.

25. Довести, що в повному графі K_n, $n \geq 3$, існує гамільтонів цикл. Якщо пронумерувати вершини цього графа, то скільки різних гамільтонових циклів має K_n? Скільки ейлерових?

26. Навести приклад графа, що є ейлеровим і не є гамільтоновим, а також приклад гамільтонового графа, що не є ейлеровим.

27. Охарактеризувати графи, що є одночасно ейлеровими і гамільтоновими.

28. Побудувати всі попарно неізоморфні зв'язні графи без циклів з 5 вершинами.

29. Побудувати всі попарно неізоморфні зв'язні графи без циклів з 6 вершинами.

30. Побудувати всі попарно неізоморфні дерева з 3, 4 і 5 вершинами.

31. Побудувати всі попарно неізоморфні дерева, що мають:

а) 6 ребер і 3 кінцеві вершини;

б) 6 ребер і 4 кінцеві вершини;

в) 8 вершин і 3 вершини степеня 3.

32. Довести, що будь-яке дерево має принаймні 2 кінцеві вершини.

33. Довести, що дерево має тільки 2 кінцеві вершини тоді і тільки тоді, коли воно є простим ланцюгом.

34. Описати всі дерева, доповнення яких також є деревами.

35. Побудувати кістякові дерева для графів з прикладу 13.

36. Обчислити циклічний ранг графів.

37. Довести, що в дереві кожне ребро є мостом.

38. Про групу з 50 студентів відомо, що серед довільної четвірки студентів завжди знайдеться один студент, знайомий з трьома іншими. Довести, що тоді обов'язково знайдеться студент, знайомий з кожним з групи.

Питання для самоконтролю

1. Що таке загальний орієнтований граф? Неорієнтований?
2. Дайте означення таким термінам: простий, цілком незв'язний граф, суміжні вершини, інцидентне ребро, степінь або валентність ребра, регулярний граф.
3. Наведіть і доведіть лему про рукопотискання.
4. Вкажіть способи задання графів.
5. Ізоморфні, дводольні графи. За яких умов цикл є дводольним графом?
6. Операції над графами: об'єднання, з'єднання (конкатенація), доповнення. Зв'язний граф.
7. Дайте означення маршруту, ланцюга, замкненого ланцюга, простого ланцюга, простого циклу.
8. Сформулюйте та доведіть лему про існування циклу.
9. Що таке компоненти зв'язності графа? Яке ребро графа називається мостом?
10. Дайте означення ейлеревого та напівейлерового графа.
11. Дайте означення гамільтонового та напівгамільтонового графа.
12. Сформулюйте та доведіть теорему Діріка.
13. Ліс і дерева. Циклічний ранг, кістяковий ліс (дерево).
14. У чому полягає задача розфарбування графа?
15. Яке число називають хроматичним?
16. Сформулюйте та доведіть лему про хроматичне число графа.
17. У чому полягає особливість розфарбування планарних графів?
18. Сформулюйте та доведіть теорему Ейлера про зв'язні планарні графи.

19. Гомеоморфність графів. Теорема Кураторського про планарність графів.
20. Сформулюйте та доведіть теорему про п'ять фарб.

Тема 6. Теорія автоматів

1. Поняття скінченного автомата. Методи задання автоматів.
2. Автоматичне відображення.
3. Гомоморфізм, ізоморфізм і невідрізнюваність (еквівалентність) автоматів.
4. Мінімальний автомат. Алгоритм мінімізації скінченного автомата.
5. Автомати Мілі та Мура.
6. Аналіз і синтез автоматів-перетворювачів.
7. Зображення подій в автоматах. Алгебра регулярних подій.
8. Події і джерела.
9. Синтез автоматів-розпізнавачів.
10. Аналіз автоматів-розпізнавачів. Теорема Кліні.

Література [1; 2; 4; 9]

Завдання для самостійного розв'язання

1. Що таке багатовимірна випадкова величина?

2. Побудувати таблиці переходів і виходів, граф, матриці переходів і виходів автомата Z, що реалізує три операції зсуву трирозрядного війкового коду на одну позицію. Вхідні сигнали визначають характер операції зсуву:

x_1 — логічний зсув вліво (або вправо);

x_2 — арифметичний зсув вправо;

x_3 — циклічний зсув вправо (або вліво).

Вихідним є сигнал, що виходить за межі розрядної сітки.

Стани відповідають восьми можливим варіантам кодів.

3. Побудувати таблиці переходів і виходів, граф, матриці переходів і виходів автомата P, що за допомогою своїх станів запам'ятовує три останні символи (війкові розряди), які було подано на його вхід. Вихідним сигналом є останній символ, що "забувається".

4. Побудувати автомат затримки, тобто автомат, вихідний сигнал якого в момент часу $t+1$ дорівнює вхідному сигналу в момент часу t, $X=Y=\{0,1\}$, $y(0)=0$.

5. Побудувати автомат для $X=Y=\{0,1\}$, на виході якого з'являється сигнал 1 тоді й лише тоді, коли чотирма останніми вхідними сигналами є 0110.

6. Побудувати “генератор парності”, тобто автомат, що функціонує в алфавітах $X = Y = \{0,1\}$ і реалізує такий алгоритм. На його вхід надходять слова, в яких після кожної трійки символів стоїть 0. На виході автомат повинен повторити вхідну трійку символів, замінивши розділовий 0 на 2 тоді й лише тоді, коли кількість одиниць у цій трійці парна.

7. Побудувати автомат для $X = Y = \{0,1\}$, що порівнює за величиною два додатні війкові числа однакової розрядності. Пари розрядів порівнюваних чисел подаються на вхід автомата починаючи зі старших розрядів. Вихідним словом повинно бути більше з цих чисел.

8. Побудувати автомат, що керує роботою ліфта в чотириповерховому будинку. Станами автомата є номери поверхів. Вхідний сигнал — це номер потрібного поверху, вихідний — напрямок руху (вгору, вниз, не рухатися).

9. Довести умови автоматності для автоматичного відображення φ_A.

10. Довести, що коли існує гомоморфізм у автомата $A_1 = (X, Y, U_1, \delta_1, \lambda_1)$ на автомат $A_2 = (X, Y, U_2, \delta_2, \lambda_2)$, то автомати A_1 і A_2 невідрізнювані.

11. Довести, що ізоморфні автомати є невідрізнюваними (еквівалентними) між собою.

12. Побудувати приклад двох невідрізнюваних автоматів, жоден з яких не є гомоморфним образом іншого.

13. Побудувати приклад невідрізнюваних автоматів, жоден з яких не є ізоморфним.

14. Перевірити невідрізнюваність (еквівалентність) двох заданих суміщеними таблицями переходів/виходів скінченних автоматів A_1 і A_2:

а) A_1

δ_1 / λ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	3/1	3/2	3/2	5/2	3/1	1/2	8/2	3/1	3/2
x_2	6/1	7/1	7/2	6/2	7/1	6/2	7/2	4/1	4/1
x_3	3/2	6/2	3/1	2/1	3/2	9/1	2/1	3/2	4/2

A_2

δ_2/λ_2	1	2	3	4	5	6	7
x_1	7/2	6/2	7/2	7/2	6/2	6/2	6/1
x_2	1/2	1/1	4/2	3/2	4/1	1/2	4/1
x_3	5/1	3/2	2/1	2/1	1/2	6/1	6/2

б) A_1

δ_1/λ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	3/2	8/1	7/1	2/2	9/2	3/2	3/2	2/2	8/1
x_2	4/1	7/2	7/2	1/1	5/1	1/1	7/1	8/1	8/2
x_3	9/1	1/2	6/2	3/1	9/1	2/1	1/1	4/1	6/2

A_2

δ_2/λ_2	1	2	3	4	5	6	7
x_1	4/2	7/2	4/2	2/1	4/2	4/2	3/1
x_2	1/1	2/1	6/1	5/2	6/1	3/1	2/2
x_3	7/1	1/1	1/1	1/2	1/1	1/1	1/2

15. Довести, що у множині K всіх невідрізнюваних між собою скінченних автоматів існує один і з точністю до ізоморфізму тільки один мінімальний автомат Z. Для кожного автомата $A \in K$ існує гомоморфізм γ на автомат Z.

16. Довести, що мінімальний автомат Z має найменшу можливу кількість станів серед усіх автоматів класу K.

17. Довести, що мінімальні автомати з того самого класу K невідрізнюваних автоматів ізоморфні між собою.

18. Довести, що мінімальні автомати невідрізнювані тоді й тільки тоді, коли вони ізоморфні.

Питання для самоконтролю

1. Що таке скінченний автомат? Запишіть канонічні рівняння автомата.
2. Способи задання автомата: табличний, графічний, матричний.
3. Яку відповідність називають автоматичним відображенням?
4. Сформулюйте умови автоматності відображення.
5. Яке відображення називається гомоморфізмом?
6. Які автомати називаються невідрізнюваними?
7. Наведіть алгоритм мінімізації скінченного автомата.
8. Дайте означення автоматів Мілі та Мура.
9. Що таке автомат-перетворювач, автомат-розпізнавач, автомат-акцептор?
10. Яким чином зображуються події в автоматах?
11. Дайте означення регулярних операцій: об'єднання, множення (конкатенація), ітерація.
12. Що таке алгебра подій? Які вирази в алгебрі подій називають рівносильними?
13. Які події називаються елементарними, регулярними?
14. Опишіть індикативну процедуру побудови регулярного виразу для події, що зображується в заданому скінченному автоматі?
15. Сформулюйте та доведіть теорему Кліні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Трохимчук Р. М.* Основи дискретної математики: Практикум. — К.: МАУП, 2004. — 168 с.
2. *Грэм З., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998. — 703 с.
3. *Оленко А. Я., Ядренко М. Й.* Дискретна математика: Навч.-метод. посіб. — К.: НаУКМА, 1996.

Додаткова

4. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. — СПб.: Питер, 2000. — 304 с.
5. *Виленкин Н. Я.* Индукция. Комбинаторика. — М.: Просвещение, 1976.
6. *Холл М.* Комбинаторика. — М.: Мир, 1970. — 212 с.
7. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1977. — 208 с.

8. *Столл Р.* Множества, логика, аксиоматические теории. — М.: Просвещение, 1963. — 232 с.
9. *Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К.* Основи дискретної математики. — К.: Наук. думка, 2002. — 578 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *Л. С. Тоболіч*
Комп'ютерне верстання *Т. Г. Замура*

Зам. № ВКЦ-3685

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП