МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

“ЗАСТОСУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ”

(для спеціалістів)

Київ 2008

Підготовлено доктором технічних наук, професором кафедри прикладної математики та програмування *І. В. Бейком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики
та програмування (протокол № 1 від 30.08.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Бейко І. В. Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Застосування обчислювального експерименту” (для спеціалістів). — К.: МАУП, 2008. — 24 с.

Методичні рекомендації містять пояснювальну записку, зміст самостійної роботи з дисципліни, а також список літератури.

Призначено для самостійної роботи студентів денної та заочної форм навчання, які вивчають дисципліну “Застосування обчислювального експерименту”.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Самостійна робота студента організаційно і методично планується і спрямовується як його особиста творча праця. При виконанні самостійної роботи студенти отримують індивідуальну консультацію та допомогу з боку викладачів і фахівців деканату. Самостійна робота студента включає роботу на практичних заняттях і над конспектами лекцій, роботу з опрацювання літературних джерел, роботу в бібліотеках, зокрема в електронних бібліотеках Інтернету, вивчення навчального матеріалу за підручниками, навчальними посібниками, а також підготовку доповідей, рефератів, написання курсових робіт; пошукову і науково-дослідну діяльність та самотестування. Самостійна робота студентів з дисципліни "Застосування обчислювального експерименту" здійснюється з використанням навчально-методичних матеріалів та математично-комп'ютерного інструментарію для поглиблення знань і опанування теоретичними знаннями, а також для набуття навичок їх практичного застосування. Завдання викладача на аудиторних заняттях зводиться до того, щоб заохотити студентів до навчання, навчити їх самостійно вчитися, здобувати нові знання та поглиблювати вже здобуті.

Індивідуальна робота студентів з дисципліни "Застосування обчислювального експерименту" концентрується на проблемах сучасної науки застосування математично-комп'ютерного інструментарію до відшукання оптимальних рішень в управлінні сучасними складними системами. У процесі самостійної індивідуальної роботи використовуються тестові та розрахункові завдання. За допомогою тестів визначається рівень засвоєння студентом основних принципів та методичних положень, на які спирається сучасна теорія оптимізації і дослідження операцій. Вивчення курсу включає оглядові лекції, анотації до кожної теми курсу, тестові завдання, практичні завдання та завдання для індивідуальної роботи. Лекційний матеріал призначається для найбільш раціонального спрямування студентів при опануванні нових знань і акцентування уваги на найбільш складних та вузлових питаннях навчальної дисципліни. Конспектування лекції допомагає зберігати студенту важливу інформацію та аналізувати її в подальшому. При підготовці до практичних занять студент використовує конспект лекцій. Якщо у конспекті бракує матеріалу з окремих питань або вони винесені на самостійне вивчення, студент опрацьовує рекомендовані підручники, навчальні посібники та відповідне програмне забезпечення для ПК.

Метою вивчення дисципліни "Застосування обчислювального експерименту є опанування методів обчислювального експерименту для прогнозування керованих процесів, набуття навичок використання обчислювального експерименту для прогнозування складних процесів і систем. У процесі навчання студенти ознайомлюються з принципами, можливостями та особливостями обчислювальних експериментів для дослідження складних процесів і керованих систем з використанням математично-комп'ютерних методів моделювання, прогнозування та оптимізації. *Основне завдання* навчальної дисципліни — дати студентам базове уявлення про області застосування обчислювальних експериментів; сформувати задачі та методи обчислювальних експериментів, що базуються на використанні математично-комп'ютерних моделей; висвітлити теоретичні та практичні питання, пов'язані із застосуванням обчислювальних експериментів.

Самостійна робота з дисципліни "Застосування обчислювального експерименту" залучає студентів до проведення у комп'ютерних класах обчислювальних експериментів при розв'язанні задач прогнозування і оптимізації, зокрема, прикладних задач прогнозування та оптимізації в умовах неповних даних та в реальних умовах конфліктних ситуацій при відшуканні оптимальних стратегій управління ієрархічно керованими системами і процесами.

ЗМІСТ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
з дисципліни
"ЗАСТОСУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ"

Тема 1. Математичні моделі та робочі комп'ютерні моделі для обчислювальних експериментів

Порівняльна характеристика натурних і обчислювальних експериментів. Математичні та робочі комп'ютерні моделі керованих систем. Типи робочих моделей керованих систем. Фазовий простір, допустимі керування, критерії оптимальності. Основні характеристики якості комп'ютерних моделей. Адекватність математичних і робочих моделей. Оптимальні робочі моделі за точністю. Оптимальні робочі моделі за швидкодією. Числові алгоритми для лінійних систем і проблема нелінійних систем. Обчислювальні експерименти у задачах глобальної оптимізації.

Література [1–5; 9]

Тема 2. Методи здійснення обчислювальних експериментів для прогнозування динамічних процесів

Методи комп'ютерного прогнозування динамічних процесів. Обчислювальні експерименти в прогнозуванні та оптимізації динамічних систем.

Література [1–5; 12]

Тема 3. Методи подання та оптимального оцінювання результатів виконаних експериментів

Методи подання результатів експериментів і методи оптимального оцінювання в умовах похибок вимірювань та похибок обчислення. Методи класичної статистики та нової робастної статистики.

Література [2; 5–7; 9]

Тема 4. Методи ідентифікації параметрів математичних моделей

Обчислювальні експерименти в задачах ідентифікації параметрів математичних моделей. Методи ідентифікації параметрів стохастичних моделей. Методи робастної ідентифікації.

Література [1; 2; 7–9]

Тема 5. Обчислювальні експерименти для керованих процесів

Моделі керованих процесів та обчислювальні експерименти для прогнозування в умовах неповних даних. Оптимальні керування і оптимальні стратегії та їх дослідження в обчислювальних експериментах.

Література [1; 2; 7; 8]

Тема 6. Методи ідентифікації функціональних параметрів математичних моделей для динамічних процесів з розподіленими параметрами

Практичні задачі ідентифікації функціональних параметрів. Методи і алгоритми оптимальної ідентифікації функціональних параметрів.

Література [2; 4; 7]

Тема 7. Граф-операторні робочі моделі. Імітаційне моделювання для обчислювальних експериментів

Імітаційні моделі. Оптимізація складних систем і процесів масового обслуговування.

Література [1; 2; 4; 6; 9]

Тема 8. Методи обчислювальних експериментів в умовах неповних даних

Неповні дані і моделювання ризиків. Методи обчислювальних експериментів в задачах мінімаксної та стохастичної оптимізації при неповних даних.

Література [5; 6; 8; 9]

ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ

Приклад 1. Позначимо через $x(t)$ відсоток хворих у момент часу t під час вірусної епідемії, а через $u(t)$ — інтенсивність противірусних заходів. Тоді спрощену математичну модель для прогнозування $x(t)$ при вибраному $u(t)$ можна описати диференціальним рівнянням

$$dx(t)/dt = x(t)(100 - x(t))\, p_1/(p_2 + u(t)). \tag{1}$$

Рівняння (1) називають математичною моделлю динаміки епідемії. За допомогою математичної моделі можна спрогнозувати очікувану кількість хворих $x(t)$ на наступні моменти часу $t \in [0, T]$.

Завдання 1. Для заданої на інтервалі часу $t \in [0, T]$ функції $u(t)$ і для заданих параметрів моделі

$$p_1 = 2, p_2 = 1, x(0) = 2, T = 2$$

спрогнозувати динаміку епідемії, тобто, обчислити траєкторію $x(t)$ на інтервалі часу $t \in [0, T]$.

Для виконання цього завдання можна скористатися методом Рунге — Кутти, за яким прогноз $x(t + h)$ на наступний момент часу $t + h$ обчислюють на основі математичної моделі

$$dx(t)/dt = f(x(t), u(t)).$$

за формулами:

$$k_1 = f(x(t), u(t)),$$
$$k_2 = f(x(t) + hk_1/2, u(t + h/2)),$$
$$k_3 = f(x(t) + hk_2/2, u(t + h/2)),$$

$k_4 = f(x(t) + hk_3, u(t + h))$
$x(t + h) = x(t) + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h/6.$

Завдання 2. За допомогою моделі (1) спрогнозувати величину можливих сумарних збитків від вірусної епідемії на заданому інтервалі часу $t \in [0, T]$ в умовах здійснення довільно вибраних лікувально-профілактичних заходів $u(t)$. Величину $J(u)$ цих сумарних збитків обчислити як значення інтеграла

$$J(u) = \int_0^T (Px(t) + cu(t))dt,$$

де $Px(t)$ — оцінка величини збитків в час t внаслідок тимчасової непрацездатності відсотка хворих $x(t)$, а $cu(t)$ — оцінка величини витрат на здійснення лікувально-профілактичних заходів $u(t)$. Для довільно вибраних двох різних лікувально-профілактичних заходів $u(t) = u_1(t)$ та $u(t) = u_2(t)$ (тобто для довільно вибраних двох різних функцій $u_1(t)$ та $u_2(t)$) знайти менші сумарні збитки серед $J(u_1)$ та $J(u_2)$ за умов $P = 10$, $c = 5$.

Завдання 3. За допомогою обчислювальних експериментів відшукати $u(t)$ з якомога меншим значенням $J(u)$ при обмеженнях $0 <= u(t) <= 4$.

Приклад 2. Якщо $x(t)$ — біомаса риби у водоймі у час t, $g(x(t))$ — інтенсивність приросту біомаси риби, а $u(t)$ — витрати на здійснення вилову з інтенсивністю $u(t)x(t)$, то прогноз $x(t)$ на заданий інтервал часу $t \in [0, T]$ може бути обчислений за допомогою використання математичної моделі

$$dx(t)/dt = g(x(t)) - u(t)x(t).$$

Найбільш ефективне (оптимальне) ведення рибогосподарства на заданому інтервалі часу $t \in [0, T]$ забезпечується вибором такої інтенсивності вилову (тобто такою функцією $u(t)$), яка максимізує прибуток $J(u)$:

$$J(u) = \int_0^T (pu(t)x(t) - cu(t))dt,$$

де p — ціна виловленої риби, а $cu(t)$ — витрати, пов'язані із забезпеченням інтенсивності вилову $u(t)x(t)$.

Функцію $u(t)$, яка максимізує прибуток, називають *оптимальним* керуванням.

Завдання 1. За допомогою обчислювальних експериментів знайти таку функцію $u(t)$, яка забезпечує найбільший прибуток $J(u)$ на інтервалі часу $t \in [0, T]$ за умов $x(0) = 1$, $g(x) = px$, $p = 2$, $c = 1$, $T = 2$.

Завдання 2 (не обов'язкове). Знайти оптимальне керування $u(t)$ на інтервалі часу $t \in [0, T]$ за умов $x(0) = 1$, $g(x) = px$, $p = 2$, $c = 1$, $T = 2$.

Приклад 3. Якщо $x(t)$ — об'єм цінної деревини у лісовому господарстві у час t, $g(x, t)$ — швидкість її приросту, а $u(t)$ — інтенсивність її вирубки, то математична модель

$$dx(t)/dt = g(x(t), t) - u(t)$$

може бути використана для прогнозування $x(t)$ і для прогнозування прибутку

$$J(u) = \int_0^T (Pu(t) - cu(t))dt,$$

де $Pu(t)$ — вартість отриманої в процесі вирубки деревини, а $cu(t)$ — витрати на вирубку з інтенсивністю $u(t)$.

Завдання 1. За допомогою обчислювальних експериментів відшукати $u(t)$, яке максимізує прибуток $J(u)$ на інтервалі часу $t \in [0, T]$ за умов $x(0) = 10$, $P = 2$, $c = 1$, $T = 2$, $g(x, t) = at^{-b}xe^{-rx}$, $a > 0$, $b > 0$, $r > 0$, $u(t) >= 0$, $x(t) >= 0$.

Додаткова інформація. Можна скористатися математичним методом відшукання оптимального керування, який базується на теоремі *принципу максимуму.* Теорема *принципу максимуму* справедлива для широкого класу керованих процесів, які описуються нелінійними системами диференціальних рівнянь загального виду

$$dx(t)/dt = f(x(t), u(t))$$

і справедлива також для широкого класу *критеріїв оптимальності* загального виду $J(u) = F(x(T)) + \int_0^T g(x(t), u(t))dt.$

Теорема *принципу максимуму* стверджує, що серед усіх допустимих керувань $u(t) \in U$, які належать заданій допустимій множині U, оптимальне керування $u^*(t) \in U$ (тобто те керування, яке максимізує значення *критерію оптимальності* $J(u)$) повинно у кожен момент часу t максимізувати функцію виду $(y(t), f(x(t), v)) + g(x(t), v)$. Наведенмо очне формулювання цієї теореми.

Теорема. *У разі існування неперервних похідних* f_x' *та* g_x' *оптимальне керування* $u^*(t)$ *є одним із тих керувань* $u(t)$, *які є розв'язком крайової задачі* (9)–(12):

$$dx(t)/dt = f(x(t), u(t)),$$
$$dy(t)/dt = -[f_x'(x(t), u(t))]^T y(t) - g_x'(x(t), u(t)),$$
$$u(t) = \mathrm{argmax}_{v \in U} [(y(t), f(x(t), v)) + g(x(t), v)], x(0) = x^0, y(T) = $$
$$= F_x'(x(\mathrm{T})).$$

Якщо ця крайова задача має лише один розв'язок $u(t)$, то цей розв'язок є оптимальним керуванням. Очевидно, для його відшукання досить підібрати таке початкове значення $y(0)$, за якого виконається рівність

$$y(T) = F_x'(x(T)).$$

Шукане значення $y(0)$ обчислюють як мінімізатор функції $\|y(T) - F_x'(x(\mathrm{T}))\|$.

Контрольні питання

1. Приклади математичних моделей керованих процесів.
2. Метод Ейлера для прогнозування керованих процесів.
3. Критерій оптимальності і оптимальне керування.
4. Числові експерименти і метод відшукання оптимального керування за допомогою теореми принципу максимуму.

МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Метод найменших квадратів для побудови математичної моделі причинно-наслідкової залежності між причинними факторами x та їх наслідками y за допомогою отриманих даних (x_1, y_1), (x_2, y_2), .., (x_N, y_N), де x_i та y_i є результатом i-го вимірювання значення x та відповідного йому значення y, $i = 1, 2, .., N$.

Завдання. Побудова основних типів математичних моделей (лінійні, лінійно-параметричні, нелінійні, одно- та багатовимірні) для числових значень x_i та y_i або для векторних значень $x_i = (x^i{}_1, x^i{}_2, .., x^i{}_r)$, $y_i = (y^i{}_1, y^i{}_2, .., y^i{}_m)$.

Завдання 1. У випадку числових даних x_i та y_i, $i = 1, 2, .., N$, побудувати методом найменших квадратів *лінійну* математичну модель

$$y = p_0 + p_1 x.$$

Вказівка. Побудова моделі (1) за допомогою методу найменших квадратів зводиться до знаходження таких чисел p_0 та p_1, які мінімізують суму квадратів відхилення:

$J(p_0, p_1) = (y_1 - (p_0 + p_1x_1))^2 + (y_2 - (p_0 + p_1x_2))^2 + ... + (y_N - (p_0 + p_1x_N))^2$.

Довести, що такими числами є

$$p_1 = (\sum_{i=1..N} x_iy_i - NXY)/(\sum_{i=1..N} x_i^2 - NX^2),\ p_0 = Y - p_1X,$$

де

$$X = (\sum_{i=1..N} x_i)/N,\ Y = (\sum_{i=1..N} y_i)/N.$$

Завдання 2. Для випадку числових даних x_i та y_i, $i = 1, 2, .., N$, оцінити методом найменших квадратів значення p^* для невідомого параметра p *нелінійної* математичної моделі

$$y = f(x, p)$$

із заданою параметричною функцією f (із заданою структурою f).

Вказівка. Шукане значення p^* обчислити як мінімізатор суми квадратів відхилення

$$J(p) = (y_1 - f(x_1, p))^2 + (y_2 - f(x_2, p))^2 + ...+ (y_N - f(x_N, p))^2,$$

тобто

$$p^* = argmin_p J(p).$$

Для розв'язання задачі (3) можна скористатися алгоритмом 1.

***Алгоритм* 1**

Початок: вибрати довільні числа $s > 0$, $L1 > 0$, $K1 > 10$, $E > 0$, $k = 1$, вибрати довільне початкове значення p^1 для шуканого p^* і покласти $p^k = p^1$.

Основний цикл: п. 1) $k = k + 1$; обчислити значення $J(p^{k-1})$, обчислити значення похідної $z = J'_p(p^{k-1})$ (якщо p є вектором, то z також є вектором і його i-та координата z_i дорівнює значенню похідної від функції $J(p)$ по i-й координаті вектора p, обчисленій у точці $p = p^{k-1}$); якщо $\|z\| <= E1$, то покласти $k = k - 1$ і перейти до п. 5; покласти $L = 2L$;

п. 2) обчислити $w = p^{k-1} - Lz$;

п. 3) якщо $J(w) >= J(p^{k-1})$, то покласти $L = L/2$; якщо $L > E2$, то повернутися до пункту п. 2 в іншому разі перейти до п. 5;

п. 4) покласти $p^k = w$; якщо $k < K1$, то перейти до п. 1;

п. 5) покласти $p^* = p^k$; кінець.

Завдання 3. Для випадку векторних даних $x_i = (x^i{}_1, x^i{}_2, .., x^i{}_r)$ та числових даних y_i, $i = 1, 2, .., N$, оцінити методом найменших квадратів значення p^* для параметра p *нелінійної* математичної моделі

$$y = f(x_1, x_2, .., x_r, p).$$

Вказівка. Значення p^* мінімізує суму квадратів відхилення

$$J(p) = \sum_{i=1..N} (y_i - f(x_1^i, x_2^i, .., x_r^i, p))^2,$$

і тому p^* є розв'язком оптимізаційної задачі (3) для $f(x_i, p) = f(x^i{}_1, x^i{}_2, .., x^i{}_r, p)$.

Завдання 4. Для випадку векторних даних $x_i = (x_1^i, x_2^i, .., x_r^i)$ та числових даних y_i, $i = 1, 2, .., N$, побудувати методом найменших квадратів *лінійно-параметричну* модель

$$y = p_0 f_0(x) + p_1 f_1(x) + ... + p_q f_q(x). \qquad (4)$$

Вказівка. Побудова моделі (4) за допомогою методу найменших квадратів зводиться до відшукання розв'язку p^* задачі (3) за умови $f(x, p) = p_0 f_0(x) + p_1 f_1(x) + ... + p_q f_q(x)$. Цим розв'язком є вектор $p^* = (p_0, p_1, p_2, .., p_q)$, який обчислюється як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{00}p_0 + a_{01}p_1 + ... + a_{0q}p_q &= b_0, \\ a_{10}p_0 + a_{11}p_1 + ... + a_{1q}p_q &= b_1, \\ &..... \\ a_{q0}p_0 + a_{q1}p_1 + ... + a_{qq}p_q &= b_q, \end{aligned} \qquad (5)$$

де для кожного значення j та для кожного значення k числа a_{jk} та b_j обчислюються за формулами

$$a_{jk} = \sum_{i=1..N} f_j(x_i) f_k(x_i), \quad b_j = \sum_{i=1..N} f_j(x_i) y_i.$$

Завдання 5 (окремний випадок завдання 4). Якщо отримані величини x_i є векторами $x_i = (x_1^i, x_2^i, .., x_{\mathrm{r}}^i)$, а y_i є числами, $i = 1, 2, .., N$, то аналогом одновимірної лінійної моделі (1) є багатовимірна лінійна модель (6):

$$y = p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_r x_r. \qquad (6)$$

На основі отриманих даних побудувати модель (6) методом найменших квадратів, тобто обчислити значення p^* для невідомого вектора $p = (p_0, p_1, .., p_r)$ на основі даних $(x_1, y_1), (x_2, y_2), .., (x_N, y_N)$.

Вказівка. Значення $p^* = (p_0, p_1, p_2, .., p_r)$ є розв'язком задачі (3) за умови $f(x, p) = p_0 + p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_rx_r$ і обчислюється як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} &a_{00}p_0 + a_{01}p_1 + ... + a_{0q}p_r = b_0, \\ &a_{10}p_0 + a_{11}p_1 + ... + a_{1q}p_r = b_1, \\ &\qquad\qquad ..... \\ &a_{r0}p_0 + a_{r1}p_1 + ... + a_{rr}p_r = b_r, \end{aligned} \tag{7}$$

де для кожного значення j та для кожного значення k числа a_{jk} та b_j обчислюються за формулами

$$a_{jk} = \sum_{i=1..N} f_j(x_i) f_k(x_i),\ b_j = \sum_{i=1..N} f_j(x_i) y_i, f_0(x) = 1, f_j(x_i) = x^i_{j.}$$

Завдання 6. Для випадку векторних даних $x_i = (x^i_1, x^i_2, .., x^i_r)$, $y_i = (y^i{}_1, y^i{}_2, .., y^i{}_m)$, $i = 1, 2, .., N$, побудувати методом найменших квадратів багатовимірну нелінійну математичну модель у вигляді

$$\begin{aligned} &y_1 = f_1(x_1, x_2, .., x_r, p), \\ &y_2 = f_2(x_1, x_2, .., x_r, p), \\ &\qquad\qquad ...... \\ &y_m = f_m(x_1, x_2, .., x_r, p); \end{aligned} \tag{8}$$

Вказівка. Побудова моделі (8) за допомогою методу найменших квадратів зводиться до відшукання розв'язку $p^* = \operatorname{argmin}_p J(p)$ для

$$J(p) = \sum_{i=1...m} \sum_{i=1..N} (y^i{}_k - f_k(x^i{}_1, x^i{}_2, .., x^i{}_r, p))^2.$$

ПОБУДОВА ПАРАМЕТРИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ПРОЦЕСІВ

Методи побудови динамічних моделей для прогнозування взаємодіючих процесів $x(t)$ та $u(t)$ на основі даних натурних спостережень у вигляді числових функцій $x_i(t)$, $u_i(t)$ або вектор-функцій $x_i(t) = (x^i{}_1(t), x^i{}_2(t), .., x^i{}_n(t))$, $u_i(t) = (u^i{}_1(t), u^i{}_2(t), .., u^i{}_r(t))$, заданих на інтервалах часу $t \in [t_i^0, t_i^1]$, $i = 1, 2, .., N$.

Завдання. Вибрати структуру параметричної динамічної моделі виду

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), u(t), p)$$

і оцінити значення параметра p за даними спостережень. Виконати завдання 1 (наступні завдання підвищеної трудності є необов'язковими додатковими завданнями).

Завдання 1. Для математичної моделі

$$dx(t)/dt = x(t)(100 - x(t))\, p_1/(p_2 + u(t)),$$

де $x(t)$ — відсоток інфікованих хворих, а $u(t)$ — інтенсивність лікувально-профілактичних заходів (див. приклад 1 на с. 6), оцінити значення параметра p за допомогою виміряних на інтервалі $t \in [0, T]$ даних спостережень $x(t) = X(t)$, $u(t) = U(t)$.

Вказівка. Оцінки невідомого значення p обчислити трьома способами:

1) як розв'язок p_1 оптимізаційної задачі

$$p_1 = \operatorname{argmin}_p \int_0^T (X'(t) - f(t, X(t), U(t), p))^2 dt;$$

2) як розв'язок p_2 оптимізаційної задачі:

$$p_2 = \operatorname{argmin}_p \max_{t \in [0, \mathrm{T}]} |X'(t) - f(t, X(t), U(t), p)|;$$

3) як розв'язок p_3 оптимізаційної задачі:

$$p_3 = \operatorname{argmin}_p \min_a \int_0^T (X(t) - x(t, a, p))^2 dt,$$

де $x(t, a, p)$ — розв'язок задачі Коші:

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), U(t), p) = x(t)(100 - x(t))p - u(t)x(t),\ x(0) = a.$$

Числовими експериментами підтвердити перевагу оцінки p_3 над оцінками p_1 та p_2 у тих випадках, коли дані $X(t)$ отримано із похибками вимірювання.

Додаткове завдання (підвищеної трудності): побудувати програму оцінювання параметра p для багатовимірної динамічної моделі загального вигляду:

$$dx_1(t)/dt = f_1(x_1(t), x_2(t), .., x_m(t), u_1(t), u_2(t), .., u_r(t), p) + w_1(t),$$
$$dx_2(t)/dt = f_2(x_1(t), x_2(t), .., x_m(t), u_1(t), u_2(t), .., u_r(t), p) + w_2(t),$$
......
$$dx_m(t)/dt = f_m(x_1(t), x_2(t), .., x_m(t), u_1(t), u_2(t), .., u_r(t), p) + w_m(t),$$

яка у векторному запису має вигляд:

$dx(t)/dt = f(t, x(t), u(t), p) + w(t),$

де

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), .., x_m(t))$ — m-вимірний стан системи;

$u(t) = (u_1(t), u_2(t), .., u_r(t))$ — r-вимірна вектор-функція керування;

$w(t) = (w_1(t), w_2(t), .., w_m(t))$ — невідома m-вимірна вектор-функція збурень;

$f(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot), .., f_m(\cdot))$ — задана структура математичної моделі.

Дані спостережень подані таблицею чисел t_k, j_k, X_k, $k = 1.. N$, де k — номер вимірювання (номер спостереження); t_k — момент часу, у який проведено k-те вимірювання; j_k — координата вектора $x(t)$, значення X_k якої виміряно у момент часу $t = t(k)$, тобто $x_{jk}(t_k) = X_k$.

Вказівка. Оптимальну оцінку p^* для значення невідомого векторного параметра p обчислити як розв'язок задачі оптимізації

$$p^* = \mathrm{argmin}_{p,\,a} \sum_{k=1...N} (X_k - x_k(t_k, p, a))^2\},$$

де $x_k(t, p, a)$ —є значення k-ї координати розв'язку $x(t)$ задачі Коші:

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), u(t), p), x(0) = a.$$

Контрольні питання

1. Навести приклади математичних моделей для керованих екопроцесів.

2. Дати порівняльну характеристику практичної ефективності оцінок p_1, p_2 та p_3.

МЕТОДИ ПОДАННЯ ТА ОЦІНЮВАННЯ ДАНИХ НАУКОВОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Методи подання та оцінювання даних наукового дослідження:

- на доповнення до класичних методів математичної статистики ознайомитися із методами стійкого оцінювання даних в умовах похибок вимірювань;
- виробити навички практичного використання методів стійкого оцінювання;
- розробити комп'ютерну програму для побудови емпіричної функції розподілу, гістограми вибірки, полігону частот і для обчислення основних характеристик даних.

Етап 1

Підготовка числових даних $x_1, x_2, .., x_N,$ які є реалізацією вибірки із деякої генеральної сукупності.

Етап 2

На основі отриманої реалізації вибірки $x_1, x_2, .., x_N$ побудувати емпіричну функцію розподілу $F_N(x)$, гістограму вибірки, полігон частот $p_N(x)$, а також основні характеристики випадкової величини $z = J$ (додаткове завдання: написати відповідну комп'ютерну програму).

Вказівки:

• *емпіричну функцію розподілу* $F_N(x)$ будують за формулою $F_N(x) = \mathrm{v}(x)/N$, де $\mathrm{v}(x)$ дорівнює кількості тих чисел серед $x_1, x_2, .., x_N,$ які не перевищують числа x (теорема Глівенка стверджує, що з імовірністю 1 значення $F_N(x)$ наближаються при $N \to \propto$ до значення невідомої функції розподілу $F(x)$ випадкової величини $z = J$);

• *варіаційний ряд* $v_1, v_2, .., v_N$ є такою перестановкою чисел $x_1, x_2, .., x_N$, для якої виконуються нерівності $v_k <= v_{k+1}$ при всіх значеннях $k = 1, .., N$ (очевидно, $v(x) = \max k\colon v_k <= x$);

• *гістограма вибірки* — це накреслені на координатній площині прямокутники із основами $[h_1, h_2],[h_2, h_3], ..,[h_s, h_{s+1}]$ і висотами $H_1, H_2, .., H_s$, де $h_1, h_2, .., h_{s+1}$ є довільно вибраними точками на горизонтальній числовій осі, а висоти обчислюються за формулою $H_k. = M_k/N(h_{k+1} - h_k)$, M_k дорівнює кількості тих чисел серед усіх чисел $x_1, x_2, .., x_N$, які належать інтервалу $[h_k, h_{k+1})$ (найчастіше число h_1 вибирають як найменше серед усіх чисел $x_1, x_2, .., x_N$, число h_{s+1} — як найбільше серед усіх чисел $x_1, x_2, .., x_N$, а числа h_k для усіх $k = 2, .., s$ обчислюють за формулою $h_k = h_1 + (k - 1)(h_{s+1} - h_1)/s$);

• *функція щільності* $p(x)$ випадкової величини $z = J$ визначається як така функція, яка задовольняє рівняння $P(J \in [a, b]) = \int_a^b p(x)dx$ на будь-якому відрізку $[a, b]$, тобто для будь-якого інтервалу $[a, b]$ ймовірність події "J належить інтервалу $[a, b]$" дорівнює числовому значенню інтеграла $\int_a^b p(x)dx$,

• *полігон частот* $p_N(x)$ — це кусково-лінійна функція, яка з'єднує точку $((h_{k+1} + h_k)/2, H_k)$ із точкою $((h_{k+2} + h_{k+1})/2, H_k)$ для $k = 1, .., s - 1$ (доведено, що за певних умов для усіх x значення $p_N(x)$ наближаються до невідомих значень $p(x)$ з ймовірністю 1).

Обчислити основні числові характеристики вибірки:

• *середнє арифметичне значення* x_c, $x_c = (\sum x_i)/N$;

• *медіану* x_m (у випадку непарного числа N медіана x_m дорівнює середньому числу варіаційного ряду $v_1, v_2, .., v_N$, а у випадку парного N $x_m = (v_{N/2} + v_{N/2+1})/2$.

• *1/4-квартиль* — це медіана тієї частини варіаційного ряду, яка розміщується між найменшим і середнім числами варіаційного ряду;

• *3/4-квартиль* — це медіана тієї частини варіаційного ряду, яка розташована між найбільшим і середнім числами варіаційного ряду;

• *вибіркову дисперсію* $S^2 = (\sum(x_i - x_c)^2)/N$;

• *вибірковий момент k-го порядку* $X_k = (\sum(x_i)^k)/N$;

• *вибірковий центральний момент k-го порядку* $C_k = (\sum(x_i - x_c)^k)/N$.

Практичне значення перелічених вище числових характеристик вибірки із генеральної сукупності випадкової величини z базується на тому, що у багатьох випадках із збільшенням N:

• значення x_c наближається до *математичного сподівання* Mz,

$$Mz = \int x dF(x);$$

• значення S^2 наближається до *дисперсії* σ^2,

$$\sigma^2 = M(z - Mz)^2 = \int (x - Mz) dF(x);$$

• значення X_k наближається до значення *k-го моменту* α_k:

$$\alpha_k = \int x^k dF(x);\ a$$

• значення C_k наближається до значення *центрального k-го моменту* μ_k:

$$\mu_k = \int (x - Mz) dF(x).$$

Важливими характеристиками графіка щільності розподілу випадкової величини є *коефіцієнт асиметрії*

$$\gamma_1 = \mu_3 \mu_2^{3/2}$$

та *ексцесу*

$$\gamma_2 = \mu_4 \mu_2^2 \ \ (\mu_2^2 = \sigma_2^2).$$

Етап 3

Побудувати *оцінку максимальної вірогідності* X^* для параметра X математичної моделі

$$x_i = X + w_i,$$

тобто *оцінку* X^* для числової величини X побудувати за даними x_i, отриманими при вимірюванні величини X із похибками w_i, вважаючи, що похибки w_i є реалізаціями випадкової величини w з відомою функцією розподілу $p(x)$.

Вказівки:

1) якщо w_i є *нормально розподіленою* випадковою величиною $N(0, a^2)$, тобто

$$p(x) = p_1(x) = (1/(a(2\pi)^{1/2}))\exp(-x^2/2a^2)),$$

то *оцінкою максимальної вірогідності* X^* є величина

$$X^* = X_1 = x_c = N^{-1} \sum x_i;$$

2) якщо w_i є рівномірно розподіленою випадковою величиною $R(0,2a)$, тобто

$$p(x) = p_2(x)\ (p_2(x) = 1/(2a) \text{ для } |x| <= a \text{ і } p_2(x) = 0 \text{ для } |x| > a,$$

то *оцінкою максимальної вірогідності* X^* є величина

$$X^* = X_2 = \arg_X \{ |X - x_i| <= a, i = 1 ... N\};$$

3) якщо w_i є випадковою величиною $L(0, a)$, тобто

$$p(x) = p_3(x) = (1/(2a))\exp(-abs(x)/a)),$$

то *оцінкою максимальної вірогідності* X^* є величина

$$X^* = X_3 = x_m = \mathrm{med}(x_1, x_2, .., x_N);$$

4) якщо w_i є випадковою величиною $C(0, a)$, тобто

$$p(x) = p_4(x) = 1/(2a(1 + x^2/a^2)),$$

то *оцінкою максимальної вірогідності* X^* є величина

$$X^* = X_4 = \mathrm{argmin}_X \sum_{i=1..N} (\log((a) + \log(1 + (X - x_i)^2 / a^2)).$$

Контрольні питання

1. Побудувати варіаційний ряд, функцію розподілу, емпіричну функцію розподілу, гістограму та полігон частот для реалізації вибірки 5,6,2,2,7,33,5,5,10,4,32.
2. Співвідношення між оцінками максимальної вірогідності та оптимальними оцінками для заданого класу функції розподілу похибок вимірювань.
3. Оцінки максимальної вірогідності для заданих функцій розподілу.
4. Оптимальні оцінки в умовах неповних даних.

ПОБУДОВА ЛІНІЙНО-ПАРАМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В УМОВАХ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНИХ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

Методи уточнення причинно-наслідкової залежності між значеннями причинних факторів $X = (x_1, x_2, .., x_M)$ та значеннями Y їх наслідків на основі даних, отриманих в експериментальних дослідженнях. Вважається, що результатом першого експерименту є заміряні числові значення $X_1 = (x_{11}, x_{12}, .., x_{1M})$ та Y_1, результатом i-го експерименту є заміряні значення $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, .., x_{iM})$ та Y_i, а результатом останнього N-го експерименту є заміряні значення $X_N = (x_{N1}, x_{N2}, .., x_{NM})$ та Y_N.

Етап 1. Підготовка числових даних $(Y_i, x_{i1}, x_{i2}, .., x_{iM})$ для кожного $i = 1.. N$.

Етап 2. Обчислення стійкої оцінки для значення параметрів $a = (a_1, a_2, .., a_M)$ математичної моделі

$$Y(a, X) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_Mx_M$$

за умови, коли заміряне у i-му експерименті числове значення Y_i є сумою $Y(a, X_i)$ та випадкової величини w_i, тобто

$$Y_i = a_1x_{i1} + a_2x_{i2} + ... + a_Mx_{iM} + w_i.$$

Вказівка. Вважаючи, що випадкова величина w_i має невідому дисперсію σ^2 і нульове математичне сподівання, обчислити стійку оцінку для шуканого невідомого вектора a як розв'язок $a^1 = (a_1, .., a_M)$ системи нелінійних рівнянь

$$F((Y(X_1) - Y_1)/s)x_{1j} + F((Y(X_2) - Y_2)/s)x(2, j) + ... + F((Y(X_N) - - Y(N))/s)x(N, j) = 0, j = 1.. M,$$

$$s = \text{Median}(|y_i - Y_i|/0{,}6745),$$

$$Y(X_i) = a_1x_{i1} + a_2x_{i2} + ... + a_Mx_{iM}, i = 1.. N.$$

Останнє рівняння зручно записати у матричній формі $Y = XA$. Функцію $F(x)$ вибрати або як функцію Андрюса, або як функцію Губера, або як функцію Гампеля.

У класичній математичній статистиці розв'язується спрощена задача, а саме, вважається що випадкові величини w_i і w_j є незалежними при $i \neq j$, нормально розподіленими із нульовим математичним сподіванням та постійною дисперсією σ^2, а також вважається, що w_i є незалежними від $x(i, j)$, тобто $\text{cov}(w_i, x(i, j)) = 0$.

У даному випадку оптимальна оцінка A для вектора a є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\sum_i (a_i \sum_k x(k, i)x(k, j)) = \sum_k y(k)x(k, j), j = 1, .., M.$$

Матриця A має нормальний розподіл $N(A,\sigma^2(X^*X)^{-1})$, і тому при всіх значеннях α, $0 <= \alpha <= 1$, виконується рівняння

$$P\{-t_{\alpha/2} < (A_i - a_i)/\sigma_{ai} < t_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$$

для t-розподілу Ст'юдента із $N - 2$ ступенями вільності та для отриманої із регресії оцінки σ_{ai} значення дисперсії a_i. Це означає, що з ймовірністю $(1 - \alpha)$ шукане значення a_i належить інтервалу довіри

$$A_i - \sigma_{ai} t_{\alpha/2} < a_i < A_i + \sigma_{ai} t_{\alpha/2.}$$

Наявність суттєвих відхилень між векторами a^1 і A свідчить про наявність серед отриманих даних вибірки $(y_i, x(i,^*))$ викидів, тобто таких значень, які мають надмірно великі похибки і які з цієї причини доцільно відфільтрувати.

Контрольні питання

1. Дати визначення оптимальної моделі лінійної залежності.
2. Дати визначення поняття "стійка оцінка" для параметрів лінійної моделі.
3. Дати якісне обґрунтування числових значень параметрів функцій Андрюса, Губера та Гампеля стосовно задачі побудови лінійної математичної моделі.
4. Обґрунтувати числові алгоритми для розв'язання нелінійної системи стійкого оцінювання.

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методи лінеаризації застосовуються для відшукання розв'язку x^* задачі мінімізації нелінійної функції $f_0(x)$ за обмежень у вигляді рівностей $f_j(x) = 0, j = 1, .., m,$ і нерівностей $f_j(x) \le 0, \quad j = m+1, .., m+l.$

Розв'язок x^* визначається як границя побудованої послідовності $x^0, x^1, .., x^k, x^{k+1}, ...$ Покращене $(k+1)$-е наближення x^{k+1} до розв'язку x^* визначається за допомогою розв'язування значно простішої допоміжної задачі мінімізації функції

$\Delta \nabla$

$$\hat{f}_0(x) \triangleq (\nabla f_0(x^k), x) + \frac{1}{2}\| x - x^k \|^2$$

при лінійних обмеженнях

$$\hat{f}_j(x) = f_j(x^k) + (\ f_j(x^k), x - x^k) \le \varepsilon_k, \quad j \in \Im_{\delta_k} .$$

Допоміжною множиною $\Im_{\delta_k}$ виділяють тільки ті із початкових обмежень, які задовольнять на $(k+1)$-му наближенні x^{k+1} (наприклад, ті з обмежень, які “найбільш порушуються” на k-му наближенні x^k). Квадратична добавка $\frac{1}{2}\| x - x^k \|^2$ гарантує існування розв’язку $z(\varepsilon, \delta_k)$ допоміжної задачі на не порожній допустимій множині. Покращене $(k+1)$-е наближення x^{k+1} обчислюють за формулою

$$x^{k+1} = x^k + \rho_k (z(\varepsilon, \delta_k) - x^k) .$$

Різні способи визначення крокових множників ρ_k і констант ε, δ_k визначають різні варіанти методів лінеаризації.

Обмеження типу нерівностей

Задача 1. Знайти $\arg\min_{x \in X} f_0(x)$ для заданої функції $f_0 : \Re^n \to \Re^1$ і множини

$$X = \{x | f_j(x) \le 0, \quad j \in \Im, \quad x \in \Re^n\},$$

яка визначена даними функціями $f_j : \Re^n \to \Re^1, \quad j \in \Im$.

Припущення 1. ***(i)*** – функції $f_j, j \in \{0\} \cup \Im$ — неперервно диференційовані; ***(ii)*** – градієнти функцій $f_j, j \in \{0\} \cup \Im$ задовольняють умові Ліпшиця

$$\| \nabla f_j(x) - \nabla f_j(y) \| \le \gamma \| x - y \|, \quad j \in \{0\} \cup \Im, \quad \gamma < \infty .$$

Алгоритм 1

Початок. I. Вибрати довільне наближення $x^0 \in \Re^n$.

II. Вибрати достатньо велику константу $\alpha > 0$ і константу $\delta > 0$, які задовольняють умові теореми 1.

III. Вибрати константу $0 < \varepsilon < 1$.

IV. Покласти $k = 0$.

Основний цикл. V. Покласти $x = x^k$.

VI. Знайти множину індексів

$$\Im_\delta(x) = \{j | f_j(x) \ge \max_{j \in \Im} f_j(x) - \delta, \quad j \in \Im\} .$$

VII. Знайти розв'язок $h = h(x)$ задачі квадратичного програмування:

знайти $\arg\min_h \left((\nabla f_0(x), h) + \frac{1}{2} \| h \|^2 \right)$ при обмеженнях

$$\left(\nabla f_j(x), h\right) + f_j(x) \le 0, \quad j \in \Im_\delta(x).$$

VIII. Якщо $h(x) = 0$, то покласти $x^* = x$ і припинити обчислення; інакше перейти на крок IX.

IX. Покласти $i = 0$.

X. Покласти $\rho_k = \left(\frac{1}{2}\right)^i$.

XI. Якщо виконується нерівність

$$f_0(x + \rho_k h(x)) + \alpha \max_{j \in \Im} \{0, f_j(x + \rho_k h(x))\} \le$$

$$\le f_0(x) + \alpha \max_{j \in \Im} \{0, f_j(x)\} - \rho_k \varepsilon \| h(x) \|^2,$$

тоді перейти на крок XII; інакше покласти $i = i + 1$ і перейти на крок X.

XII. Обчислити наближення

$$x^{k+1} = x + \rho_k h(x) \cdot$$

XIII. Покласти $k = k + 1$ і перейти на крок V.

Стохастичний квазіградієнтний метод для розв'язання задач оптимізації

Алгоритм 1

Початок. І. Вибрати початкове наближення $x^0 \in X$.

II. Вибрати натуральне число N_s, задати $N = N_s$.

III. Вибрати довільні дійсні числа z_i^0, $i \in [0:N]$.

IV. Побудувати сітку

$$Y_N = \left\{ y^i \mid y^i \in Y,\ i \in [0:N] \right\}.$$

V. Покласти $k = 0$.

Основний цикл. VI. Знайти індекс i_k з умови

$$z_{i_k}^k = \max_{i \in [0:N]} z_i^k.$$

VII. Обчислити незалежну реалізацію ω^k випадкового параметра ω.

VIII. Обчислити $\nabla_x \varphi(x^k(\omega), y^{i_k}, \omega^k)$.

IX. Обчислити крокові множники ρ_k і σ_k, які задовольняють умовам теореми 1.

X. Обчислити наближення

$$x^{k+1}(\omega) = \pi_X(x^k(\omega) - \rho_k \nabla_x \varphi(x^k(\omega), y^{i_k}, \omega^k)).$$

XI. Обчислити значення функції $\varphi(x^{k+1}(\omega), y^i, \omega^k)$, $i \in [0:N]$.

XII. Обчислити величини

$z_i^{k+1}(\omega) = z_i^k(\omega) + \sigma_k(\varphi(x^{k+1}(\omega), y^i, \omega^k) - z_i^k(\omega))$, $i \in [0:N]$.

XIII. Покласти $k = k+1$ і перейти на крок VI.

Теорема 1. *Якщо функція* $E\varphi(x,y,\omega)$ *опукла вниз по* x, *градієнт функції* $f(x,y) \triangleq E\varphi(x,y,\omega)$ *по* x *задовольняє умові Ліпшиця,*

$$\left\|\nabla_x f(x,y) - \nabla_x f(\bar{x},y)\right\| \le a_1 \left\|x - \bar{x}\right\|,\ y \in Y,\ x, \bar{x} \in X;$$

то в умовах $E\left|\varphi(x,y,\omega)\right|^2 < \infty$, $E\left\|\nabla_x \varphi(x,y,\omega)\right\|^2 < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty$, $\rho_k / \sigma_k \to 0$ *при* $k \to \infty$; $\rho_{k+1}/\rho_k \to 1$ *при* $k \to \infty$, *граничні точки* $\bar{x}^{N_s}$ *послідовності* $\left\{x^k(\omega)\right\}_{k=0}^{\infty}$, *породженої алгоритмом 1, то майже при кожному* ω *точками мінімуму функції* $\max_{i \in [0:N]} E\varphi(x, y^i, \omega)$ *на множині* X.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Бейко І. В.* Методи математичного і комп'ютерного моделювання для відшукання нових знань // Лабораторний та польовий практикум з екології. — К.: Фітосоціоцентр, 2000. — С. 216.
2. *Бейко И. В., Бейко М. Ф.* Численные методы решения задач оптимального управления. — К.: Знание, 1970.
3. *Бейко І. В., Коробко Т. В.* Побудова робочої моделі для прогнозування процесів перенесення екологічних забруднень у річкових басейнах // Вісн. Київ. ун-ту. Кібернетика. — 2002. — Вип. 3. — С. 15–16.
4. *Томашевський В. М.* Імітаційне моделювання систем і процесів: Навч. посіб. — К.: ІСДО, 1994. — 124 с.

5. *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. — К.: Выща шк., 1983. — 512 с.
6. *Томашевський В. М., Данова О. Г., Жолдаков О. О.* Вирішення практичних завдань методами комп'ютерного моделювання: Навч. посіб. — К.: Корнійчук, 2001. — 268 с.
7. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Наука, Физмат, 1997. — 320 с.
8. *Петров А. А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1996.
9. *Томашевський В. М.* Моделювання систем. — К.: Видавнича группа BHV, 2005. — 352 с.
10. *Литвинов В. В., Марянович Т. П.* Методы построения имитационных систем. — К.: Наук. думка, 1991. — 120 с.

Додаткова

11. *Горелик В. А., Кононенко А. Ф.* Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. — М.: Радио и связь, 1982. — 144 с.
12. *Перов А. А., Поспелов И. Г.* Опыт математического моделирования экономики. — М.: Энергоиздат, 1996. — 544 с.
13. *Бейко І. В.* Задачі багатокритеріального розпізнавання та оцінювання і алгоритми їх розв'язання // Комп'ютерна математика: Зб. наук. праць НАН України; Наук. рада НАН України з проблем "Кібернетика". — Т. 2. — К., 2002. — С. 34–40.
14. *Бейко І. В.* Оптимальні математичні моделі та алгоритми оптимального прогнозування і управління // Матер. Всеукр. наук.-метод. конф. "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації", м. Київ — м. Кам'янець-Подільський, 2004. — К.; Кам'янець-Подільський, 2004. — С. 6–13.

ЗМІСТ

Пояснювальна записка 3

Зміст самостійної роботи з дисципліни “Застосування обчислювального експерименту” 4

Приклади задач оптимального керування і прогнозування 6

Метод найменших квадратів для побудови математичних моделей 9

Побудова параметричних динамічних моделей для прогнозування взаємодіючих процесів 12

Методи подання та оцінювання даних наукового дослідження 14

Побудова лінійно-параметричних моделей в умовах нормально розподілених похибок вимірювань 18

Методи обчислення оптимальних розв’язків для задач оптимізації 19

Список літератури 22

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *Л. С. Тоболіч*
Комп’ютерне верстання *К. П. Махиня*

Зам. № ВКЦ-3670

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП