

МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ
РОБОТИ СТУДЕНТІВ**

з дисципліни

**“МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
ТА МОДЕЛІ СТРАХУВАННЯ”**

(для спеціалістів)

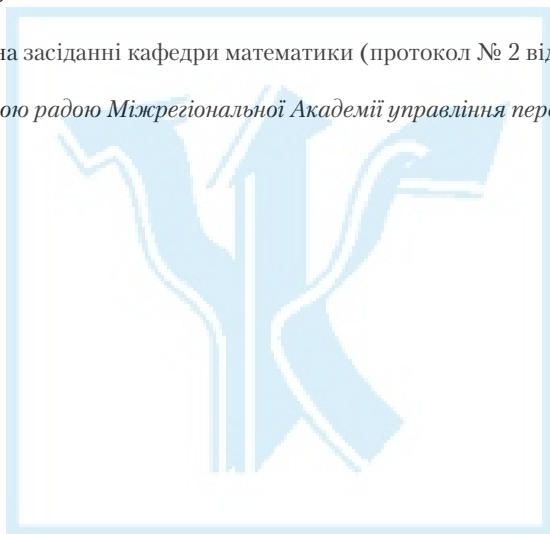
МАУП

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2008

Підготовлено доцентом кафедри фінансів та статистики
Г. М. Черномаз

Затверджено на засіданні кафедри математики (протокол № 2 від 26.10.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом



МАУП

Черномаз Г. М. Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Математичні методи та моделі страхування” (для спеціалістів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2008. — 60 с.

Методичні рекомендації містять пояснювальну записку, задачі до тем, додатки, формули, відповіді до задач, а також список літератури.

- © Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2008
- © ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Методичне забезпечення самостійної роботи студентів складається з таких розділів:

- мета та задачі для самостійної роботи;
- задачі до тем;
- додатки;
- формули;
- відповіді до задач;
- список рекомендованої літератури.

Метою самостійної роботи студентів з дисципліни “Математичні методи та моделі страхування” є:

- ознайомитися з моделями страхування кількох осіб з однією причиною вибуття — смертю; засвоєння поняття статусу дожиття для групи з кількох осіб, критерія його збереження і втрати; навчитися розраховувати актуарні функції для статусів, пов'язаних з кількома особами;
- ознайомитися з моделями страхування для однієї особи з кількома причинами вибуття; навчитися будувати таблиці вибуття з кількох причин, розраховувати актуарні функції для зазначених моделей і, зокрема, актуарні теперішні вартості виплат і внесків стосовно типового учасника пенсійної схеми; навчитися розраховувати нетто-премії та нетто-резерви.

Для досягнення поставленої мети необхідно самостійно опрацювати такі теми, передбачені навчальною програмою:

1. Актуарні функції для кількох осіб.
 - 1.1. Статус дожиття всіх осіб з групи.
 - 1.2. Статус дожиття останньої особи в групі.
 - 1.3. Складні статуси.
 - 1.4. Загальний статус.
 - 1.5. Функції, які залежать від порядку смертності членів групи.
 - 1.5.1. Імовірності, які пов'язані із порядком смертності членів групи.
 - 1.5.2. Оцінювання ймовірностей, пов'язаних із порядком смертності членів групи.
 - 1.5.3. Страхові функції, які залежать від порядку смертності членів групи.
 - 1.5.4. Оцінювання страховок, які залежать від порядку смертності.

- 1.5.5. Щорічні премії і резерви.
- 1.5.6. Спеціальні функції, які залежать від порядку смертності.
- 2. Моделі вибуття з кількох причин.
 - 2.1. Таблиці з кількома факторами вибування.
 - 2.1.1. Імовірність вибування.
 - 2.1.2. Центральні рівні вибування.
 - 2.1.3. Сила вибування.
 - 2.1.4. Відповідні таблиці з одним фактором вибування.
 - 2.1.5. Побудова таблиць з багатьма факторами вибування, виходячи з відповідних таблиць з одним фактором вибування.
 - 2.2. Таблиці із вторинними факторами вибування.
 - 2.2.1. Первинні та вторинні фактори вибування.
 - 2.2.2. Інвалідність і смертність.
 - 2.2.3. Шлюб і смертність.

ЗАДАЧІ ДО ТЕМ

Тема 1. Актуарні функції для кількох осіб

1.1. Статус дожиття всіх осіб з групи

1. Виразити кожну із нижченаведених ймовірностей через імовірності для одного життя ${}_n p_x$ і ${}_n p_y$:
 - а) імовірність того, що обидві особи (x) і (y) проживуть n років, тобто спільне життя (xy) проіснує n років;
 - б) імовірність того, що рівно одне життя із (x) або (y) триватиме n років;
 - в) імовірність того, що як мінімум одне життя із (x) або (y) триватиме n років;
 - г) імовірність того, що (xy) перестане існувати упродовж n років;
 - д) імовірність того, що як мінімум одна із осіб помре упродовж n років;
 - е) імовірність того, що обидві особи помруть упродовж n років.
2. Виразити кожну із нижченаведених імовірностей через ${}_n|q_x$; ${}_n|q_y$; ${}_n|q_z$:

- а) імовірність того, що всі три особи (x), (y), (z) помруть у $(n+1)$ -й рік;
- б) імовірність того, що ніхто із них не помре в $(n+1)$ -му році;
- в) імовірність того, що як мінімум одна з осіб помре в $(n+1)$ -му році;
3. Доведіть, що імовірність того, що (x) проживе n років, а (y) проживе $(n-1)$ рік, може бути виражена як $\frac{{}_n p_{x:y-1}}{p_{y-1}}$ або як $p_x \cdot {}_{n-1} p_{x+1:y}$.
4. Доведіть, що імовірність того, що обидві особи (30) і (40) помруть в одному віці (вираженому в цілих роках), може бути виражена як ${}_{10} p_{30} \cdot (1 + e_{40:40}) - 2 \cdot {}_{11} p_{30} \cdot (1 + e_{40:41}) + p_{40} \cdot {}_{11} p_{30} (1 + e_{41:41})$.
5. Доведіть, що імовірність того, що дві особи (30) і (40) помруть в одному і тому ж році, може бути виражена як $1 + e_{30:40} - p_{30}(1 + e_{31:40}) - p_{40}(1 + e_{30:41}) + p_{30:41} \cdot (1 + e_{31:41})$.
6. Обчислити:
- $$\int_0^n t p_{xx} \cdot \mu_{xx}(t) dt.$$
7. Які з нижченаведених співвідношень є правильними:
- а) $d_{xy} = k \cdot d_x \cdot d_y$;
- б) $\mu_{xy} = k \cdot \mu_x \cdot \mu_y$;
- в) $p_{xy} = p_x \cdot p_y$;
- г) $q_{xy} = k \cdot q_x \cdot q_y$;
8. Якщо спеціальна таблиця смертності будується на основі стандартної таблиці з використанням співвідношення $\mu'_x = k \cdot \mu_x$; де k — ціле число, то доведіть, що ${}_t p'_x = {}_t p_{xx \dots (k)}$.
9. Доведіть, що:
- а) $D_{xy} = k \cdot (1+i)^{-\frac{x+y}{2}} \cdot D_x \cdot D_y$;
- б) $C_{xy} = v \cdot D_{xy} - D_{x+1:y+1}$;
- в) $D_{xy} = \sqrt{D_{xx} \cdot D_{yy}}$.
10. Знайдіть похідні по x від:
- а) $\ln {}_t p_{xx}$;
- б) θ_{xx} .

11. Якщо функції оцінки резервів Феклера $u_{xx} = \frac{D_{xx}}{D_{x+1:x+1}}$ і $k_{xx} = \frac{C_{xx}}{D_{x+1:x+1}}$ розраховані для певного віку y на основі певної смертності з $i = 0,03$, то відомо, що $u_{yy} = 4k_{yy}$. Знайдіть p_y .
12. Обчислити $e_{25:25}^0$, якщо $\mu_x = 1/(100 - x)$, $0 \leq x < 100$.
13. Вам відомі нижченаведені імовірності:
- імовірність того, що три особи віком 20, 30 та 40 років проживуть 10 років, дорівнює 0,758;
 - імовірність того, що 45-річна особа помре протягом 5 років, у той час, коли друга 40-річна особа буде жива наприкінці наступних 5 років, дорівнює 0,063;
 - імовірність того, що чотири особи віком 20, 25, 30, 35 років проживуть ще 5 років, у той час, як п'ята особа віком 40 років не буде жива наприкінці наступних 5 років, дорівнює 0,045.
- Знайдіть імовірність того, що 20-річна особа буде жива наприкінці наступних 25 років.
14. Нехай $\mu_x = 1/(100 - x)$ для $0 \leq x < 100$.
Обчислити:
- ${}_{10}p_{40:50}$
 - $e_{40:50}^0$
15. Для незалежних осіб (x) і (y):
- $q_x = 0,05$;
 - $q_y = 0,10$;
 - смерті кожної із осіб розподілені рівномірно упродовж року.
- Обчислити ${}_{0,75}q_{xy}$.
16. Сміт, Браун і Грін купують довічний страховий анuitет — пост-нумерандо із щорічними виплатами в розмірі 1 гр. од., який здійснюється, поки хоча б двоє із них живі. Вік на 01.01.89: Сміт — x ; Браун — y ; Грін — z . Який з нижченаведених виразів є виразом для актуарної теперішньої вартості страхового анuitету на дату 01.01.89?
- $a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} - 2a_{xyz}$;
 - $a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} - a_{xyz}$;
 - $a_x + a_y + a_z - a_{xy} - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz}$;

$$\Gamma) a_x + a_y + a_z - 2a_{xy} - 2a_{xz} - 2a_{yz} + 3a_{xyz};$$

$$\text{д) } 3a_x + 3a_y + 3a_z - 2a_{xy} - 2a_{xz} - 2a_{yz} + a_{xyz}.$$

17. Спільний анuitет для трьох осіб, вік кожної з яких становить x , складається з таких виплат:

- 1000 на місяць, якщо всі троє живі (по 1/3 кожному);
- 750 на місяць, якщо живі тільки двоє (по 1/2 кожному);
- 400 на місяць, якщо жива тільки одна особа.

Вибіркові значення актуарних платежів вартостей анuitетів:

$$\ddot{a}_{xxx}^{(12)} = 6,258; \quad \ddot{a}_{xx}^{(12)} = 7,354; \quad \ddot{a}_x^{(12)} = 9,194.$$

Обчислити вартість наданого анuitету.

1.2. Статус дожиття останньої особи в групі

18. Доведіть, що $q_{xy} = q_x \cdot q_y$ і запишіть альтернативний вираз через

$$q_x, q_y, q_{xy}.$$

19. Виразіть кожен з нижченаведених виразів через функції для життя однієї особи і для спільного життя:

а) $\bar{a}_{wxyz};$

б) $P_{xy} \cdot \bar{n}|.$

20. Знайдіть імовірність того, що як мінімум одна з двох осіб (x) і (y) помре в $(n+1)$ -му році. Чи є це тим самим, що і ${}_n|q_{xy}$? Поясніть.

21. Опишіть виплату, для якої чистий одноразовий внесок дорівнює

$${}_n|a_{xy}. \text{ Покажіть, що } {}_n|a_{xy} \text{ не еквівалентно ні } v^n \cdot {}_n p_{xy} \cdot a_{\overline{x+n:y+n}},$$

$$\text{ні } v^n \cdot {}_n p_{xy} \cdot a_{\overline{x+n:y+n}}. \text{ Наведіть правильний вираз для } {}_n|a_{xy}.$$

22. Нехай $\mu = 1/(100 - x)$ для $0 \leq x < 100$.

Обчислити:

а) $10 P_{40:50};$

б) $e_{\overline{40:50}}^0.$

23. Для групового договору страхування життя з виплатою у розмірі 10000 гр. од. для незалежних осіб віком (70) і (80) за принципом останнього виживаючого відомо, що:

- страхова виплата відбудеться наприкінці року смерті, якщо друга смерть станеться протягом 5-го року;

- $i = 3 \%$;
- смертність відповідає ілюстрованій таблиці смертності, наведеній нижче:

Таблиця 1.1

x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x
66	7373338	70	6616155	74	5664051	78	4530360	82	3284542	86	2066090
67	7201635	71	6396609	75	5396081	79	4225163	83	2970496	87	1787299
68	7018432	72	6164663	76	5117152	80	3914365	84	2660734	88	1524758
69	6823367	73	5920394	77	4828182	81	3600038	85	2358246	89	1281083

Обчислити актуарну теперішню вартість зазначеної страховки.

24. Нехай 01.01.92 – дата початку виплат за довічним страховим анuitетом із статусом останнього доживаючого. Умови анuitету:

- 1000 виплачується на початку кожного місяця, якщо обидва застраховані живі;
- 750 виплачується на початок кожного місяця, якщо живий тільки один застрахований.

Дані для застрахованих на 01.01.92:

Таблиця 1.2

Ім'я	Сміт	Браун
Вік	60	65
Стать	жінка	чоловік

Вибіркові значення актуарної теперішньої вартості анuitетів:

- для Сміт (F): $\ddot{a}_{60}^{(12)} = 11,2993$; $\ddot{a}_{65}^{(12)} = 10,1047$;
- для Брауна (M): $\ddot{a}_{60}^{(12)} = 10,5959$; $\ddot{a}_{65}^{(12)} = 9,3452$.

$$\ddot{a}_{60F:65M}^{(12)} = 8,1620.$$

Обчислити актуарну теперішню вартість заданого анuitету на 01.01.92.

25. Дві особи (x) і (y) мають однакову очікувану смертність. Крім цього, відомо:

- $p_x = p_y = 0,1$;
- $p_{xy} = 0,06$, де p_{xy} – щорічний чистий внесок для страхової виплати у розмірі 1 для (xy), виплата відбувається наприкінці року смерті;
- $d = 6 \%$.

Знайти чисту премію p_{xy} для страхової виплати у розмірі 1 для (xy) , яка має постійний розмір і виплачується наприкінці року смерті.

26. Для незалежних осіб віком 50 і 60 років

$$\mu_x = 1/(100 - x), \quad 0 \leq x < 100. \quad \text{Знайти: } e_{50:60}^0.$$

1.3. Складні статуси

27. Описати виплату, для якої чистий разовий внесок позначається

$$A_{\overline{x:\bar{n}}}. \quad \text{Доведіть, що } A_{\overline{x:\bar{n}}} = A_x - A_{x:\bar{n}} + v^n.$$

28. Доведіть, що $a_{\overline{wz:yz}} = a_{\overline{wz}} + a_{\overline{yz}} - a_{\overline{wxyz}}$ і дайте логічне пояснення.

29. Доведіть, що $a_{\overline{xy:n}} = a_{\overline{n}} + n|a_{xy}$. Опишіть цю виплату.

30. Виразити $a_{\overline{abc:xyz}}$ через ануїтети для спільного життя.

31. Виразити через символи ануїтетів приведену вартість щорічних виплат у розмірі 1, які здійснюються наприкінці кожного року до моменту, поки:

а) хоча б одна із осіб віком 25 і 30 років доживе до 50 років;

б) остання жива із цих осіб помирає у віці до 50 років.

32. Виразити через символи ануїтетів вартість відкладеного до віку 50 років ануїтету у розмірі 1, який виплачується, поки або (25), або (30) залишається живим після 50 років.

33. Записати вираз для оцінки $a_{\overline{xy:n}}$ через фінансовий ануїтет і ануїтети для одного життя і спільного життя.

1.4. Загальний статус

34. Доведіть, що формула ${}_n p \frac{r}{xy\dots z} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r}$ може бути отримана

$$\text{шляхом додавання по } s \text{ формули } {}_n p \frac{[s]}{xy\dots z} = \frac{Z^s}{(1+Z)^{s+1}}.$$

35. Виразити через імовірність для одного і спільного життя:

а) ${}_n p \frac{2}{xyz};$

б) ${}_n p \frac{[1]}{xyz}.$

36. Запишіть вираз для чистого разового внеску для анuitету, який виплачується наприкінці року, коли тільки три із чотирьох осіб $(w), (x), (y), (z)$ живі, через значення анuitету для спільного життя.
37. Знайти значення $a \frac{[4]}{xxxxxx}$, якщо відомо, що $a_{xxxx} = 11,9$, $a_{xxxxx} = 10,750$, $a_{xxxxx} = 9,675$.
38. Довести математично і логічно, що
- $$a \frac{1}{xyz} - a \frac{[1]}{xyz} = a \frac{2}{xyz}.$$
39. Записати вираз для чистого разового внеску для страховки, яка виплачується наприкінці року смерті третьої із чотирьох осіб $(w), (x), (y), (z)$ через значення анuitетів і ставку дисконту.
40. Знайти вираз для оцінки $\ddot{a}_{w:xyz}^2$ анuitету постнумерандо, який виплачується, коли живий (w) і, як мінімум, дві із трьох осіб $(x), (y), (z)$.

1.5. Додаткові задачі

41. П'ятеро осіб віком x організували партнерство. Обчислити:
- імовірність того, що не більш як три початкові партнери будуть живі наприкінці n років;
 - імовірність того, що не більш як один початковий партнер помре в n -й рік.
42. Фрагмент з таблиці анuitетів для спільного життя, оцінених при $3\frac{1}{2}\%$, показує таке:

Таблиця 1.3

Вік людей	Чистий разовий внесок для анuitету постнумерандо для спільного життя
26:20:28	14,40
29:26:20	14,30
28:29:26	13,80
20:28:29	14,00
29:26:28:20	12,50

Знайти чистий разовий внесок для страховки у розмірі 1000 гр.од., яка виплачується наприкінці року смерті другої особи із чотирьох віком 20, 26, 28, 29.

43. Ануїтет у розмірі 1 виплачується (x) і (y) по принципу останнього доживаючого. Ануїтет починається наприкінці ($m+k$) років за припущення, що обидві особи будуть живі через m років. Довести, що приведена вартість ануїтету дорівнює

$${}_m p_y \cdot {}_{k+m-1|} a_x + {}_m p_x \cdot {}_{k+m-1|} a_y - {}_{k+m-1|} a_{xy}.$$

44. Ануїтет у розмірі 1 виплачується щорічно (x), поки він живий разом з (y), і упродовж n років після смерті (y). Однак жодних виплат не відбувається через m років з поточного моменту, $m > n$. Показати, що приведена вартість ануїтету дорівнює

$$a_{\overline{x}|} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot a_{\overline{x+n:y:m-n}|}$$

45. Страхівка у розмірі 1 виплачуватиметься у тому разі, якщо (x) помирає до досягнення віку ($x+n$) і (y) помирає до досягнення віку ($y+m$), де $m < n$ і страхова сума виплачується наприкінці року другої смерті. Довести, що приведена вартість може бути виражена як

$$A_{\overline{xy:m}|}^1 + v^m \cdot {}_m p_x \cdot (1 - {}_m p_y) \cdot A_{\overline{x+m}|}^1$$

і що чистий річний внесок буде визначений діленням на

$$\ddot{a}_{\overline{xy:m}|} + v^m \cdot {}_m p_x \cdot (1 - {}_m p_y) \cdot \ddot{a}_{\overline{x+m}|}.$$

46. Ануїтети для останнього доживаючого часто передбачають зниження виплат після першої смерті. Ануїтет пренумерандо тривалістю n років виплачується для (xy) і передбачає річні виплати у розмірі 1, якщо обидві особи живі, зменшившись до $\frac{1}{2}$ у разі смерті (x) і до $\frac{1}{3}$ — у разі смерті (y). Виразити приведену вартість через символи ануїтетів.
47. Щорічний ануїтет буде виплачуватись, якщо хто-небудь із (w), (x), (y) або (z) живий. Після кожної смерті ануїтетна виплата зменшується на 50 % від виплати, яка здійснювалась до смерті. Знайти спрощений вираз, який містить тільки ануїтети для однієї особи і для спільного життя, для вартості такого страхового контракту на одиницю початкової ануїтетної виплати.
48. Знайти вираз через символи ануїтетів для чистої разової премії для безперервного ануїтету у розмірі 1 за рік, який виплачується, поки, як мінімум, одна із двох осіб (40) і (50) жива і старша 60 років. Однак виплати не відбуваються, якщо хто-небудь із них молодший 55 років.

1.6. Функції, які залежать від порядку смертності членів групи

1.6.1. Імовірності, які пов'язані із порядком смертності членів групи

49. Довести, що ${}_{\infty}q_{xx:x}^2 = 2/3$.
50. Кожний із трьох осіб A, B, C знаходиться у віці x . Виразити в термінах ${}_n p_x$ імовірність того, що A і B помруть упродовж n років, причому A раніше за B , а C через n років буде ще живий.
51. Відомо, що ${}_{\infty}q_{xy}^2 = 0,4$; ${}_{\infty}q_{xz}^2 = 0,5$; ${}_{\infty}q_{xyz}^2 = 0,3$. Знайти числове значення ${}_{\infty}q_{xyz}^3$.
52. Виразити ${}_{\infty}q_{wxyz}^2$ через імовірності, які залежать від першої смерті.

1.6.2. Оцінювання ймовірностей, пов'язаних із порядком смертності членів групи

53. Користуючись тим, що $\frac{\partial e_{xy}}{\partial x} = \mu_x \cdot e_{xy} - {}_{\infty}q_{xy}^1$, довести таку наближену формулу: ${}_{\infty}q_{xy}^1 \approx \mu_x \cdot e_{xy} + \frac{1}{2}(e_{x-1;y} - e_{x+1;y})$.
54. а) Нехай для всіх значень t

$$\mu_{x+t} \approx \frac{1}{2l_{x+t}} \cdot (l_{x+t-1} - l_{x+t+1}).$$

Довести, що ${}_{\infty}q_{xy}^1 \approx \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ e_{x-1;y} - p_x \cdot e_{x+y} \\ p_{x-1} \end{array} \right\}$.

б) Визначити, чи старший (x) за (y), якщо відомо, що:

$$e_{x-1;y} = 10,682, \quad l_{x-1;y} = 10250000,$$

$$e_{x+1;y} = 10,000, \quad l_{x;y} = 10000000,$$

$$l_{x+1;y} = 9740000.$$

1.6.3. Страхові функції, які залежать від порядку смертності членів групи

55. Довести, що актуарна вартість страховки, за якою виплачується 1 наприкінці року смерті (x), за умови, що в момент виплати (y) буде живий, дорівнює

$$v \cdot p_y \cdot \ddot{a}_{x:y+1} - a_{xy}.$$

56. Довести, що, виходячи із загальних міркувань, $A_{xy}^1 - A_{xy}^2 \geq 0$. Чи справедливо це при $i = 0$? Пояснити.

57. Показати, що

$$A_{xy}^2 = A_y - A_{xy} + A_{xy}^1.$$

58. Довести, що

$$a) \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{xy} \cdot \mu_{y+t} \cdot {}_n E_{x+t} dt = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \bar{A}_{x+n:y}^1;$$

$$б) \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{xy} \cdot \mu_{y+t} \cdot n | \bar{A}_{x+t} dt = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot (\bar{A}_{x+n} - \bar{A}_{x+n:y}^1).$$

У кожному випадку описати виплату.

59. Виразити $\bar{A}_{\overline{wxyz}}^3$ у термінах страховки, яка залежить від першої смерті.

1.6.4. Оцінювання страховок, які залежать від порядку смертності

60. Описати страхову виплату, яка позначається символом $A_{x:y:\overline{n}}^{\frac{1}{2}}$ і написати для неї формулу через комутаційні функції.

61. Відомо, що $\mu_x = 0,002 + 10^{-5} \cdot c^x$ і $c^{10} = 3$. Виразити $\bar{A}_{40:50}^1$ у термінах $A_{40:50}$ і $\bar{a}_{40:50}$.

62. Довести, що $\frac{\partial \bar{a}_{xy}}{\partial x} = \mu_x \cdot \bar{a}_{xy} - \bar{A}_{xy}^1$ і звідси вивести таку наближену формулу: $\bar{A}_{xy}^1 \approx \mu_x \cdot \bar{a}_{xy} + \frac{1}{2} \cdot (\bar{a}_{x-1:y} - \bar{a}_{x+1:y})$.

63. Нехай для всіх значень t

$$\mu_{x+t} \approx \frac{1}{2 \cdot l_{x+t}} (l_{x+t-1} - l_{x+t+1}).$$

Довести, що $\bar{A}_{xy}^1 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{a}_{x-1:y}}{p_{x-1}} - p_x \cdot \bar{a}_{x+1:y} \right)$.

Яка відповідна формула для $\bar{A}_{x:yz}^1$?

64. Нехай для всіх значень t має місце $\mu_{x+t} \approx q_{x+t}$.

Довести, що $\bar{A}_{xy}^1 \approx \bar{a}_{x:y} - p_x \cdot \bar{a}_{x+1:y}$.

1.6.5. Щорічні премії і резерви

65. Написати формули для tV_{xyz}^2 в припущенні, що щорічна премія вноситься упродовж спільного життя (x) і хоча б однієї із осіб (y) і (z), що вижили.
66. Поліс страхує 40-річного чоловіка і його 35-річну дружину. Якщо особа віком 35 років помре першою, то виплата за полісом становитиме 1000. Якщо ж особа віком 40 років помре першою, то упродовж першого року дії поліса виплата становитиме 10000; потім виплата буде зменшуватися на 100 на початку кожного наступного року дії поліса, поки не досягне 8000 і після цього залишається незмінною. Написати формулу для чистої щорічної премії в термінах комутаційних функцій.

1.6.6. Спеціальні функції, які залежать від порядку смертності

67. Для трьох осіб віком 70, 75 і 79 імовірність того, що упродовж 5 років виживуть тільки дві особи, дорівнює 0,45, а імовірність того, що, як мінімум, одна особа помре упродовж 5 років, дорівнює 0,775. За умови, що $\frac{1}{5p_{79}}, \frac{1}{5p_{75}}$ і $\frac{1}{5p_{70}}$ утворюють арифметичну прогресію і що ${}_∞q_{70:80}^1 = 0,3$, знайдіть імовірність того, що особи віком 70 і 75 років помруть з інтервалом не більш як 5 років.
68. Довести, що чистий щорічний внесок за страховку на дожиття, за якою виплачується 1, якщо (x) проживе n років після смерті (y), обчислюється за формулою

$$\frac{\overline{A}_{x+n:y}^1}{\ddot{s}_{:x:n} + \ddot{a}_{x+n:y}}$$

69. Розглянемо відкладений на m років ануїтет із виплатою 1 на початку року. Виплати за ануїтетом відбуваються в тому разі, якщо на момент виплати (x) живий, а (y) або живий, або мертвий менш як n років ($m > n$). Яка актуарна вартість цього ануїтету?

70. Знайти приведену вартість 1, яка виплачується в момент смерті (50) за умови, що (20) до того часу помре або досягне віку 40 років.
71. Вивести і спростити формулу в позначеннях, пов'язаних з разовими внесками, для приведеної вартості страховки, яка виплачується негайно після смерті (x), якщо смерть (x) настала після смерті (y), за умови, що (y) помре протягом n років, які передували смерті (x).

1.6.7. Додаткові задачі

72. Знайти разовий валовий внесок з навантаженням $7\frac{1}{2}\%$ на чистий разовий внесок за поліс, по якому виплачується страховка в тому разі, якщо (30) помирає раніше (60) або упродовж 5 років після смерті (60), з поверненням разового внеску без відсотків, якщо через 5 років після смерті (60) особа (30) ще жива.
73. Знайти значення виразу: $\int_0^{\infty} t q_{x:\overline{2}|} \cdot t p_{xx} \cdot \mu_{x+t} dt$.
74. Страховка повинна бути виплачена в момент смерті особи (x), якщо вона пережила (y). Виплата дорівнює кількості років, які минули з моменту страхування до моменту смерті (y), включаючи дрібні частини року. Записати чистий разовий внесок через визначений інтеграл.
75. Вивести формулу, яка не містить інтегралів, для чистого разового внеску за страховку, по якій виплачується 1 через 10 років після смерті (x), якщо хоча б один із (y) або (z) пережив (x) та вони обоє помирають упродовж 10 років після смерті (x).
76. 50-річний президент корпорації і два віце-президенти віком 48 і 45 років бажають придбати таку страховку: якщо президент помре першим, то 1000 гр. од. повинні бути виплачені негайно і 2000 гр. од. повинні бути виплачені в момент першої смерті серед обох віце-президентів. Якщо ж першим помре один із віце-президентів, то нічого не виплачуватиметься до другої смерті серед трьох посадових осіб, після чого негайно буде виплачено 3000 гр. од.

Обчислити чистий разовий внесок за цю страховку, припускаючи негайне погашення виплат. Використати такі значення (під 2,5 %) із таблиці смертності:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{50:48} &= 10,95; & \ddot{a}_{48:45} &= 11,46; \\ \ddot{a}_{50:45} &= 11,26; & \ddot{a}_{50:48:45} &= 9,30. \end{aligned}$$

Тема 2. Моделі вибуття з кількох причин

2.1. Таблиці з кількома факторами вибування

2.1.1. Імовірність вибування

1. Надано фрагмент таблиці з двома факторами вибування.

Таблиця 2.1

Вік x	$l_x^{(T)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
24	901020	299	92762
25	807959	314	86632
26	721013	324	80385
27	640304	329	74117
28	565858	329	67909
29	497620	324	61839

Виходячи із наведених табличних даних, обчислити:

- імовірність того, що 26-річна особа піде з життя протягом року в результаті дії першої причини смерті після святкування свого 29-го дня народження;
 - імовірність того, що 24-річна особа доживе до свого 26-річчя і помре упродовж наступних двох років у результаті дії другої причини смерті.
2. Дворічний коледж розраховує, що його студенти будуть вибувати із коледжу згідно із нижченаведеними ймовірностями.

Таблиця 2.2

Клас	Ймовірність																		
	Академічна неуспішність	Відрахування з інших причин																	
Перший рік	0,10	0,30																	
Другий рік	0,05	0,20																	

- а) Скільки нових студентів необхідно приймати на початку кожного навчального року, якщо коледж хоче випустити 180 студентів щорічно?
- б) Скільки нових студентів необхідно приймати на початку кожного навчального року, щоб загальна кількість студентів дорівнювала 800?

2.1.2. Центральні рівні вибування

3. У табл. 2.1 оцінити значення центрального рівня вибування за причиною 2 для віку 25.
4. Доповнити табл. 2.1 для віку 30, якщо $m_{30}^{(1)} = 0,0008$ і $m_{30}^{(2)} = 0,1374$. Використати стандартні наближення.
5. Припускаємо, що для першого року польотів після тренувального періоду центральні рівні смертності і виключення пілотів дорівнюють a і b відповідно. Чому дорівнює ймовірність того, що пілот, який щойно закінчив тренінг, все ще буде активним пілотом наприкінці першого року польотів? Використайте стандартні наближення.

2.1.3. Сила вибування

6. У таблиці із двома факторами вибування $\mu_{x+t}^{(1)} = j$, $\mu_{x+t}^{(2)} = k$, $0 \leq t \leq 1$, де j, k – константи. Обчислити точне значення $q_x^{(1)}$.
7. У таблиці з кількома факторами вибування для певної популяції зазначені три інтенсивності вибування $\mu_x^{(1)}$, $\mu_x^{(2)}$, $\mu_x^{(3)}$, де $\mu_x^{(k)} = \frac{3}{11 \cdot k \cdot (100 - x)}$. Чому дорівнює ймовірність того, що 10-річна особа залишиться серед живих до 60 років?
8. Виходячи із формули $l_x^{(T)} = (a - x^2) \cdot e^{-x}$ та $d_x^{(1)} = 2 \cdot [e^{-x}(x+1) - e^{-x-1} \cdot (x+2)]$, вивести точний алгебраїчний вираз для $\mu_x^{(1)}$.
9. Виходячи із формул $\mu_x^{(1)} = \frac{1}{a-x}$ та $\mu_x^{(2)} = 1$, виведіть точний алгебраїчний вираз для $l_x^{(T)}$, $d_x^{(1)}$, $d_x^{(2)}$, припускаючи, що $l_0^{(T)} = a$.

2.1.4. Відповідні таблиці з одним фактором вибування

10. Розгляньте однокрементні таблиці, які відповідають табл. 2.1. Припускаючи, що $l_{24}^{(1)} = l_{24}^{(2)} = l_{24}^{(t)}$, розрахувати значення $d_{24}^{(1)}$ та $d_{24}^{(2)}$. Використайте стандартні наближення.
11. Кількість живих скорочується з двох причин. Використовуючи стандартні наближення, виразіть $q_x^{(1)}$ через $q_x^{(w)}$ та $q_x^{(T)}$.
12. У таблиці з двома факторами вибування, які включають смертність d_x і виключення w_x , вибування так розподілено протягом року, що дійсні такі рівні вибування:

$$q_x^{(d)} = \frac{d_x}{l_x^{(T)} - 0,8w_x}, \quad q_x^{(w)} = \frac{w_x}{l_x^{(T)} - 0,5d_x}.$$

Для певного віку x , $l_x^{(T)} = 1000$, $l_{x+1}^{(T)} = 900$, $q_x^{(w)} = 0,080$.

Знайти величину $q_x^{(d)}$.

2.1.5. Побудова таблиць з багатьма факторами вибування, виходячи з відповідних таблиць з одним фактором вибування

13. Дві таблиці з одним фактором вибування визначаються за формулами: $l_x^{(1)} = a - x$ та $l_x^{(2)} = c \cdot e^{-x}$. Знайти вирази для $l_x^{(T)}$, $d_x^{(1)}$ та $d_x^{(2)}$ у відповідних таблицях з двома факторами вибування, якщо $l_0^{(T)} = a$.
14. Виходячи із $q_{25}^{(1)} = 22/61$, $q_{25}^{(2)} = 2/201$, $q_{25}^{(3)} = 6/403$ та $q_{25}^{(4)} = 14/407$, розрахувати значення для $d_{25}^{(1)}$, $d_{25}^{(2)}$, $d_{25}^{(3)}$, $d_{25}^{(4)}$ з урахуванням $l_{25}^{(T)} = 10000$. Використайте стандартне наближення.
15. Компанія, в офісі якої працює велика кількість жінок, щойно побудувала таблицю, де зазначено кількість жінок віком x . Працівниці повинні звільнитися у разі заміжжя. Вони також вибувають і з інших причин. Відомі такі величини: $l_{20}^{(T)} = 10000$, $l_{21}^{(T)} = 8600$, $l_{22}^{(T)} = 7400$. Якщо рівень заміжжя в кожному із цих віків дорівнює 10 % і якщо середньорічний рівень смертності в кожному віці 1 %, розрахуйте (із використанням стандартних наближень) кількість смертей, шлюбів і вибувань з інших причин для віків 20 і 21.

16. Якщо в таблиці з двома факторами вибування $q_x^{(1)} = 0,080$ і $m_x^{(2)} = 3 \cdot m_x^{(1)}$, то розрахуйте значення $q_x^{(T)}$ з використанням стандартних наближень.

2.1.6. Додаткові задачі

17. Доведіть, що $\mu_{x+1/2}^{(k)}$ дорівнює $m_x^{(k)}$ умові рівномірного розподілу вибувань.
18. Виходячи із відомих імовірностей смертності, рівня виходу на пенсію (відношення кількості тих, хто вийшов на пенсію, до загальної кількості осіб) і середньорічного рівня звільнення, знайти наближені формули для ймовірності звільнення і ймовірності виходу на пенсію, виразивши їх в термінах заданих функцій.
19. Нижче наведено незаповнену частину із табл. 2.3 обліку робітників, в якій враховуються дві причини вибування – смерть і звільнення.

Таблиця 2.3

x	$l_x^{(t)}$	$d_x^{(w)}$	$d_x^{(d)}$	$q_x^{(d)}$
20	10000		41	
21	9100			0,0046
22	8328			

Використовуючи дані табл. 2.3 і стандартні наближення (де необхідно), знайти:

- значення для $d_{20}^{(w)}$, $d_{21}^{(w)}$, $d_{21}^{(d)}$;
- імовірність того, що 20-річний робітник буде звільнений упродовж 2 років;
- середньорічний рівень смертності у віці 21 рік;
- ставку звільнення у віці 21 рік;
- неокруглену очікувану тривалість зайнятості, обмежену 2 роками, для віку 20, тобто $e_{20:\overline{2}}^{(T)}$.

20. Для студентів, які вступають до юридичного технікуму терміном навчання 3 роки, відома така інформація:

- дводекрементна таблиця ймовірностей провалу на іспитах, відрахування з інших причин, переведення на наступний курс (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Академічний рік	Для студентів на початку відповідного академічного року ймовірність ...		
	... провалу на іспитах	... відрахування з іншої причини	... залишитись у числі студентів упродовж академічного року
1	0,40	0,20	—
2	—	0,30	—
3	—	—	0,60

- б) кількість студентів, які складають незадовільно іспити упродовж 3-го року в 10 разів менша, ніж кількість тих, хто залишається в числі студентів упродовж 2-го року;
- в) кількість студентів, які складають незадовільно іспити упродовж 2-го року, становить 40 % від кількості молоді, що залишилося студентами упродовж 2-го року.

Заповнити таблицю і розрахувати ймовірність того, що студент, який вступив до технікуму, залишить навчання, тобто буде відрахований з іншої причини, ніж провал на іспитах.

21. Для дводекрементної моделі:

- у відповідній однодекрементній моделі (1)-го декременту, $q_{40}^{(1)} = 0,100$ і кожний щорічний декремент рівномірно розподілений упродовж року;
- у відповідній однодекрементній моделі (2)-го декременту, $q_{40}^{(2)} = 0,125$ і кожний щорічний декремент відбувається точно в момент часу 0,7. Розрахувати $q_{40}^{(2)}$.

22. У табл. 2.5 надано вибірккові значення із певної дводекрементної таблиці:

Таблиця 2.5

x	$l_x^{(T)}$	$d_x^{(mortality)}$
25	807959	314
26	721013	324
27	640304	329

Значення $l_{25}^{(T)}$ із відповідної однодекрементної таблиці дорівнює 1000000. Знайти $l_{26}^{(T)}$.

23. У табл. 2.6 надано вибіркові значення із певної дводекрементної таблиці з $l_{40}^{(T)} = 2000$. Знайти $l_{42}^{(T)}$.

Таблиця 2.6

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
40	0,24	0,10	0,25	y
41			0,20	$2y$

24. Із тридекрементної таблиці із декрементами смерті (d), інвалідності (i) і звільнення (w) відомо:

- загальний декремент рівномірно розподілений упродовж року;
- $l_x^{(T)} = 25000$;
- $l_{x+1}^{(T)} = 23000$;
- $m_x^{(d)} = 0,02$;
- $m_x^{(w)} = 0,05$.

Знайти q_x^i .

2.2. Таблиці із вторинними факторами вибування

2.2.1. Первинні та вторинні фактори вибування

25. З наведеної табл. 2.7 знайти значення $q_{30}^{(Th)}$:

- а) використовуючи рівність $q_x^{(Th)} = \frac{(hd)_x - (hl)_x \cdot (hq)_x}{l_x^{(T)}}$;
- б) використовуючи рівність:

$$q_x^{(Th)} \approx \int_0^1 \frac{d_x^{(h)}}{l_x^{(T)}} \cdot (1-t) \cdot (hq)_x dt = \frac{1}{2} \frac{d_x^{(h)}}{l_x^{(T)}} \cdot (hq)_x = \frac{1}{2} \cdot q_x^{(h)} \cdot (hq)_x.$$

Таблиця 2.7

Вік	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
x	$l_x^{(T)}$	$d_x^{(d)}$	$d_x^{(h)}$	$(hl)_x$	$(hd)_x$
30	32176	506	2203	52066	489
31	29467	494	2014	53780	527

26. Знайти вираз для ймовірності того, що 30-річний у стані (T) доживе до віку 31 рік у стані (h) і помре до віку 32 роки.

27. Розрахуйте значення параметрів табл. 2.7 для віку 32 роки за умови, що $q_{32}^{(d)} = 0,020$ і $q_{32}^{(h)} = 0,060$, а також за умови, що став-

ка смертності у віці 32 роки для живих осіб у стані (h) дорівнює ставці смертності для живих у стані (T).

28. Знайти точний вираз для $\int_0^1 t p_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(h)} \cdot {}_{1-t}(hp)_{x+t} dt$ через функції, які базуються на моделі вищезазначеної табл. 2.7.

2.2.2. Інвалідність і смертність

29. Довести, що $p_x^{ai} < r_x < r'_x$.
30. Вивести формулу для оцінки p_x^a із комбінованої таблиці інвалідності і смертності.
31. Використовуючи дані з табл. 2.8, знайти d_{15}^{aa} , d_{16}^{ii} , l_{17}^{ii} , припускаючи, що $l_{15}^{ii} = 0$.

Таблиця 2.8

x	$l_x^{aa} + l_x^{ii}$	i_x	q_x^i
15	96285	57	0,267
16	95550	56	0,254

32. Які із нижченаведених виразів абсолютно еквівалентні один одному?
- а) $q_x^{ai} + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i$;
- б) $r_x - p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i$;
- в) $\frac{d_x^{ii} + d_{x+1}^{ii}}{l_x^{aa}}$;
- г) $\int_0^2 t p_x^{ai} \cdot \mu_{x+t}^i dt$, де μ_x^i — інтенсивність смерті серед інвалідів.

2.2.3. Шлюб і смертність

33. Використовуючи комбіновану табл. 2.9 шлюбу і смертності для чоловіків, знайти числові значення для:
- а) рівня смертності для 33-річного одруженого чоловіка;
- б) імовірності того, що 33-річний одружений чоловік буде живий у 34 роки;
- в) імовірності того, що 33-річний неодружений буде живий у 34 роки.

Таблиця 2.9

Вік x	Живі холостяки $(bl)_x$	Померлі холостяки $(bd)_x$	Холостяки, що одружилися $(bm)_x$	Живі одружені $(ml)_x$	Померлі одружені $(md)_x$
33	51002	376	4335	29711	207
34	46291	345	4027	33839	240
35	41919	320	3773	37626	273
36	37826	—	—	41126	—

34. Нехай у табл. 2.9 інтенсивність смертності і шлюбу буде позначено $\mu^{(bd)}$ і $\mu^{(bm)}$ відповідно, а рівень смертності серед одружених — $q^{(m)}$. Запишіть визначений інтеграл для ймовірності того, що 34-річний холостяк помре упродовж 2 років.

35. Для кожного віку із 57–59 включно відомі такі величини:

- рівень одруження серед самотніх жінок;
- рівень смертності серед заміжніх жінок;
- середньорічний рівень смертності серед самотніх жінок.

Якщо $(ml)_{57} = 0$, то побудуйте комбіновану таблицю смертності і шлюбу для віку 57–59.

2.2.4. Додаткові задачі

36. Використовуючи табл. 2.10, знайти ймовірність того, що 40-річний співробітник міліції (статистику наведено нижче), помре у віці між 41 і 42 роками. Припускаємо, що рівень смертності серед звільнених співробітників дорівнює смертності ще працюючих. Навести формулу, не здійснюючи розрахунків.

Таблиця 2.10

Вік, x	l_x^T	d_x	w_x
40	10000	76	1290
41	8634	80	1268

37. а) Поясніть, як ви побудуєте комбіновану таблицю інвалідності і смертності, якщо відомі рівні смертності і інвалідності для здорових людей і рівні смертності для інвалідів за умови, що інвалідність залишається назавжди.

б) Виведіть формулу, яка базується на таблиці із пункту (а), для чистого щорічного внеску, який здійснюється особою у віці x до настання смерті або інвалідності для полісу, за яким виплачується:

- 10 у разі смерті здоровим;
- 5 у випадку отримання інвалідності;
- 1 наприкінці кожного року після отримання інвалідності;
- 5 у разі смерті інвалідом.

Припускаємо, що всі страхові виплати відбуваються наприкінці року. Відповідь виразити через необхідні комутаційні колонки.

38. У табл. 2.11 надано вибіркві значення із певної комбінованої таблиці шлюбу і смертності для чоловіків.

Таблиця 2.11

Вік x	Живі холостяки $(bl)_x$	Померлі холостяки $(bd)_x$	Холостяки, що одружилися $(bm)_x$	Живі чоловіки у шлюбі $(hl)_x$	Померлі чоловіки, що були у шлюбі $(hd)_x$
35	83838	640	7546	75252	546
36	75652	—	—	82252	—

Припускаємо рівномірний розподіл шлюбів і смертей упродовж кожного року. Знайти ймовірність того, що живий чоловік, який перебуває в шлюбі, доживе до віку 36 років.

39. Наведена табл. 2.12 первинного і вторинного декрементів для смертності та інвалідності. Припустимо, що здоров'я інвалідів не покращується, а декременти розподіляються рівномірно.

Таблиця 2.12

Вік x	l_x^{aa}	d_x^{aa}	i_x	l_x^{ii}	d_x^{ii}
35	85000	700	140	1000	30
36	84160			1110	

Яка імовірність того, що 35-річний інвалід доживе до віку 36 років?

ДОДАТКИ

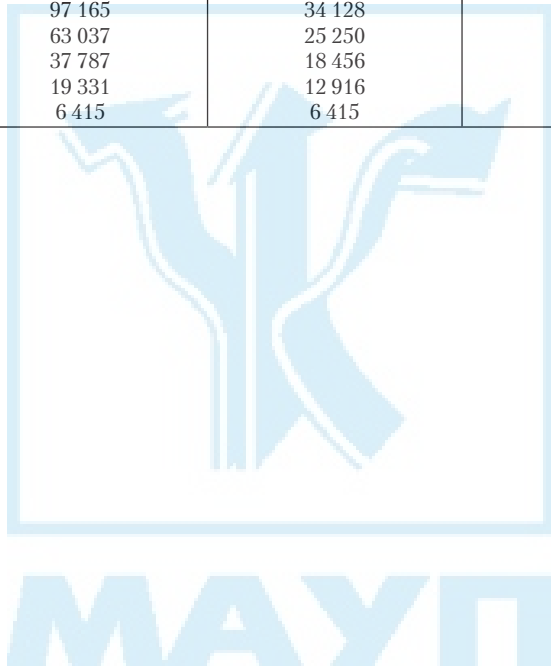
Додаток 1

Таблиця смертності

x	l_x	d_x	$1000 q_x$
0	10 000 000	70 800	7,08
1	9 929 200	17 475	1,76
2	9 911 725	15 066	1,52
3	9 896 659	14 449	1,46
4	9 882 210	13 835	1,40
5	9 868 375	13 322	1,35
6	9 855 053	12 812	1,30
7	9 842 241	12 401	1,26
8	9 829 840	12 091	1,23
9	9 817 749	11 879	1,21
10	9 805 870	11 865	1,21
11	9 794 005	12 047	1,23
12	9 781 958	12 325	1,26
13	9 769 633	12 896	1,32
14	9 756 737	13 562	1,39
15	9 743 175	14 225	1,46
16	9 728 950	14 983	1,54
17	9 713 967	15 737	1,62
18	9 698 230	16 390	1,69
19	9 681 840	16 846	1,74
20	9 664 994	17 300	1,79
21	9 647 694	17 655	1,83
22	9 630 039	17 912	1,86
23	9 612 127	18 167	1,89
24	9 593 960	18 324	1,91
25	9 575 636	18 481	1,93
26	9 557 155	18 732	1,96
27	9 538 423	18 981	1,99
28	9 519 442	19 324	2,03
29	9 500 118	19 760	2,08
30	9 480 358	20 193	2,13
31	9 460 165	20 718	2,19
32	9 439 447	21 239	2,25
33	9 418 208	21 850	2,32
34	9 396 358	22 551	2,40
35	9 373 807	23 528	2,51
36	9 350 279	24 685	2,64
37	9 325 594	26 112	2,80
38	9 299 482	27 991	3,01
39	9 271 491	30 132	3,25
40	9 241 359	32 622	3,53

x	l_x	d_x	$1000 q_x$
41	9 208 737	35 362	3,84
42	9 173 375	38 253	4,17
43	9 135 122	41 382	4,53
44	9 093 740	44 741	4,92
45	9 048 999	48 412	5,35
46	9 000 587	52 473	5,83
47	8 948 114	56 910	6,36
48	8 891 204	61 794	6,95
49	8 829 410	67 104	7,60
50	8 762 306	72 902	8,32
51	8 689 404	79 160	9,11
52	8 610 244	85 758	9,96
53	8 524 486	92 832	10,89
54	8 431 654	100 337	11,90
55	8 331 317	108 307	13,00
56	8 223 010	116 849	14,21
57	8 106 161	125 970	15,54
58	7 980 191	135 663	17,00
59	7 844 528	145 830	18,59
60	7 698 698	156 592	20,34
61	7 542 106	167 736	22,24
62	7 374 370	179 271	24,31
63	7 195 099	191 174	26,57
64	7 003 925	203 394	29,04
65	6 800 531	215 917	31,75
66	6 584 614	228 749	34,74
67	6 355 865	241 777	38,04
68	6 114 088	254 835	41,68
69	5 859 253	267 241	45,61
70	5 592 012	278 426	49,79
71	5 313 586	287 731	54,15
72	5 025 855	294 766	58,65
73	4 731 089	299 289	63,26
74	4 431 800	301 894	68,12
75	4 129 906	303 011	73,37
76	3 826 895	303 014	79,18
77	3 523 881	301 997	85,70
78	3 221 884	299 829	93,06
79	2 922 055	295 683	101,19
80	2 626 372	288 848	109,98
81	2 337 524	278 983	119,35
82	2 058 541	265 902	129,17
83	1 792 639	249 858	139,38
84	1 542 781	231 433	150,01
85	1 311 348	211 311	161,14

x	l_x	d_x	$1000 q_x$
86	1 100 037	190 108	172,82
87	909 929	168 455	185,13
88	741 474	146 997	198,25
89	594 477	126 303	212,46
90	468 174	106 809	228,14
91	361 365	88 813	245,77
92	272 552	72 480	265,93
93	200 072	57 881	289,30
94	142 191	45 026	316,66
95	97 165	34 128	351,24
96	63 037	25 250	400,56
97	37 787	18 456	488,42
98	19 331	12 916	668,15
99	6 415	6 415	1000,00



Таблиця комутаційних функцій, $i = 3 \%$

x	D_x	N_x	S_x	x
0	10 000 000,0	288 963 016,7	6 979 643 888,8	0
1	9 640 000,0	278 963 016,7	6 690 680 872,1	1
2	9 342 751,4	269 323 016,7	6 441 717 855,4	2
3	9 056 844,9	259 980 265,3	6 142 394 838,7	3
4	8 780 215,6	250 923 420,4	5 882 414 573,4	4
5	8 512 546,9	242 143 204,8	5 631 491 153,0	5
6	8 253 451,8	233 630 657,9	5 389 347 948,2	6
7	8 002 642,6	225 377 206,1	5 155 717 290,3	7
8	7 759 766,4	217 374 563,5	4 930 340 084,2	8
9	7 524 487,1	209 614 797,1	4 712 965 520,7	9
10	7 296 488,1	202 090 310,0	4 503 350 723,6	10
11	7 075 397,6	194 793 821,9	4 301 260 413,6	11
12	6 860 868,5	187 718 424,3	4 106 466 591,7	12
13	6 652 644,7	180 857 555,8	3 918 748 167,4	13
14	6 450 352,6	174 204 911,1	3 737 890 661,6	14
15	6 253 773,3	167 754 558,5	3 563 685 700,5	15
16	6 062 760,0	161 500 785,2	3 395 931 142,0	16
17	5 877 109,8	155 438 025,2	3 234 430 356,8	17
18	5 696 688,0	149 560 915,4	3 078 992 331,6	18
19	5 521 418,1	143 864 227,4	2 929 431 416,2	19
20	5 351 272,8	138 342 809,3	2 785 567 188,8	20
21	5 186 111,0	132 991 536,5	2 647 224 379,5	21
22	5 025 845,1	127 805 425,5	2 514 232 843,0	22
23	4 870 385,5	122 779 580,4	2 386 427 417,5	23
24	4 719 592,6	117 909 194,9	2 263 647 837,1	24
25	4 573 377,1	113 189 602,3	2 145 738 642,2	25
26	4 431 602,4	108 616 225,2	2 032 549 039,9	26
27	4 294 093,7	104 184 662,8	1 923 932 814,7	27
28	4 160 726,8	99 890 529,1	1 819 748 191,9	28
29	4 031 340,5	95 729 802,3	1 719 857 662,8	29
30	3 905 782,0	91 698 461,8	1 624 127 860,5	30
31	3 783 944,4	87 792 679,8	1 532 429 398,7	31
32	3 665 686,8	84 008 735,4	1 444 636 718,9	32
33	3 550 911,6	80 343 048,6	1 360 627 983,5	33
34	3 439 488,9	76 792 137,0	1 280 284 934,9	34

x	D_x	N_x	S_x	x
35	3 331 295,4	73 352 648,1	1 203 492 797,9	35
36	3 226 149,5	70 021 352,7	1 130 140 149,8	36
37	3 123 914,9	66 795 203,2	1 060 118 797,1	37
38	3 024 434,7	63 671 288,3	993 323 593,9	38
39	2 927 506,2	60 646 853,6	929 652 305,6	39
40	2 833 001,8	57 719 347,4	869 005 452,0	40
41	2 740 778,0	54 886 345,6	811 286 104,6	41
42	2 650 731,3	52 145 567,6	756 399 759,0	42
43	2 562 794,0	49 494 836,3	704 254 191,4	43
44	2 476 878,2	46 932 042,3	654 759 355,1	44
45	2 392 904,8	44 455 164,1	607 827 312,8	45
46	2 310 779,5	42 062 259,3	563 372 148,7	46
47	2 230 395,8	39 751 479,8	521 309 889,4	47
48	2 151 660,7	37 521 084,0	481 558 409,6	48
49	2 074 472,4	35 369 423,3	444 037 325,6	49
50	1 998 744,0	33 294 950,9	408 667 902,3	50
51	1 924 383,0	31 296 206,9	375 372 951,4	51
52	1 851 312,7	29 371 823,9	344 076 744,5	52
53	1 779 488,9	27 520 511,2	314 704 920,6	53
54	1 708 844,9	25 741 022,3	287 184 409,4	54
55	1 639 329,7	24 032 177,4	261 443 387,1	55
56	1 570 891,7	22 392 847,7	237 411 209,7	56
57	1 503 465,3	20 821 956,0	215 018 362,0	57
58	1 436 991,7	19 318 490,7	194 196 406,0	58
59	1 371 420,2	17 881 499,0	174 877 915,3	59
60	1 306 723,8	16 510 078,8	156 996 416,3	60
61	1 242 859,2	15 203 355,0	140 486 337,5	61
62	1 179 823,4	13 960 495,8	125 282 982,5	62
63	1 117 613,4	12 780 672,4	111 322 486,7	63
64	1 056 231,5	11 663 059,0	98 541 814,3	64
65	995 687,8	10 606 827,5	86 878 755,3	65
66	935 994,9	9 611 139,7	76 271 927,8	66
67	877 163,6	8 675 144,8	66 660 788,1	67
68	819 219,7	7 797 981,2	57 985 643,3	68
69	762 208,4	6 978 761,5	50 187 662,1	69

x	D_x	N_x	S_x	x
70	706 256,4	6 216 553,1	43 208 900,6	70
71	651 545,5	5 510 296,7	36 992 347,5	71
72	598 314,8	4 858 751,2	31 482 050,8	72
73	546 819,2	4 260 436,4	26 623 299,6	73
74	497 308,1	3 713 617,2	22 362 863,2	74
75	449 933,5	3 216 309,1	18 649 246,0	75
76	404 778,5	2 766 375,6	15 432 936,9	76
77	361 872,0	2 361 597,1	12 666 561,3	77
78	321 222,8	1 999 725,1	10 304 964,2	78
79	282 844,4	1 678 502,3	8 305 239,1	79
80	246 818,8	1 395 657,9	6 626 736,8	80
81	213 275,5	1 148 839,1	5 231 078,9	81
82	182 350,6	935 563,6	4 082 239,8	82
83	154 171,2	753 213,0	3 146 676,2	83
84	128 818,2	599 041,8	2 393 463,2	84
85	106 305,0	470 223,6	1 794 421,4	85
86	86 577,7	363 918,6	1 324 197,8	86
87	69 529,5	277 340,9	960 279,2	87
88	55 007,3	207 811,4	682 938,3	88
89	42 817,6	152 804,1	475 126,9	89
90	32 738,4	109 986,5	322 322,8	90
91	24 533,4	77 248,1	212 336,3	91
92	17 964,9	52 714,7	135 088,2	92
93	12 803,4	34 749,8	82 373,5	93
94	8 834,3	21 946,4	47 623,7	94
95	5 861,0	13 112,1	25 677,3	95
96	3 691,7	7 251,1	12 565,2	96
97	2 148,5	3 559,4	5 314,1	97
98	1 067,1	1 410,9	1 754,7	98
99	343,8	343,8	343,8	99

Таблиця комутаційних функцій, $i = 3 \%$

x	C_x	M_x	R_x	x
0	68 737,864	1 583 601,456	85 672 418,432	0
1	16 471,864	1 514 863,592	84 088 816,976	1
2	13 787,524	1 498 391,728	82 573 953,384	2
3	12 837,749	1 484 604,204	81 075 561,656	3
4	11 934,192	1 471 766,455	79 590 957,452	4
5	11 156,965	1 459 832,263	78 119 190,997	5
6	10 417328	1 448 675,298	76 659 358,734	6
7	9 789,464	1 438 257,970	75 210 683,436	7
8	9 266,745	1 428 468,506	73 772 425,466	8
9	8 839,092	1 419 201,761	72 343 956,960	9
10	8 571,528	1 410 362,669	70 924 755,199	10
11	8 449,523	1 401 791,141	69 514 392,530	11
12	8 392,725	1 393 341,618	68 112 601,389	12
13	8 525,775	1 384 948,893	66 719 259,771	13
14	8 704,932	1 376 423,118	65 334 310,878	14
15	8 864,550	1 367 718,186	63 957 887,760	15
16	9 064,961	1 358 853,636	62 590 169,574	16
17	9 243,829	1 349 788,675	61 231 315,938	17
18	9 346,988	1 340 544,846	59 881 527,263	18
19	9 327,222	1 331 197,858	58 540 982,417	19
20	9 299,603	1 321 870,636	57 209 784,559	20
21	9 214,012	1 312 571,033	55 887 913,923	21
22	9 075,863	1 303 357,021	54 575 342,890	22
23	8 936,960	1 294 281,158	53 271 985,869	23
24	8 751,644	1 285 344,198	51 977 704,711	24
25	8 569,542	1 276 592,554	50 692 360,513	25
26	8 432,941	1 268 023,012	49 415 767,959	26
27	8 296,154	1 259 590,071	48 147 744,947	27
28	8 200,069	1 251 293,917	46 888 154,876	28
29	8 140,858	1 243,093,848	45 636 860,959	29
30	8 076,941	1 234 952,990	44 393 767,111	30
31	8 045,567	1 226 876,049	43 158 814,121	31
32	8 007,661	1 218 830,482	41 931 938,072	32
33	7 998,081	1 210 822,821	40 713 107,590	33
34	8 014,251	1 202 824,740	39 502 284,769	34

x	C_x	M_x	R_x	x
35	8 117,923	1 194 810,489	38 299 460,029	35
36	8 269,054	1 189 692,566	37 104 649,540	36
37	8 492,305	1 178 423,512	35 917 956,974	37
38	8 838,258	1 169 931,207	34 739 533,462	38
39	9 237,171	1 161 092,949	33 569 602,255	39
40	9 709,221	1 151 855,778	32 408 509,306	40
41	10 218,176	1 142 146,557	31 256 653,528	41
42	10 731,609	1 131 928,381	30 114 506,971	42
43	11 271,289	1 121 196,772	28 982 578,590	43
44	11 831,248	1 109 925,483	27 861 381,818	44
45	12 429,128	1 098 094,235	26 751 456,335	45
46	13 079,335	1 085 665,106	25 653 362,100	46
47	13 772,152	1 072 585,751	24 567 696,994	47
48	14 518,518	1 058 813,599	23 459 111,243	48
49	15 306,897	1 044 295,081	22 436 297,644	49
50	16 145,109	1 028 988,184	21 392 002,563	50
51	17 020,413	1 012 843,075	20 363 014,379	51
52	17 902,007	995 822,662	19 350 171,304	52
53	18 814,279	977 920,655	18 354 348,642	53
54	19 743,028	959 106,376	17 376 427,987	54
55	20 690,546	939 363,348	16 417 321,611	55
56	21 672,210	918 672,802	15 477 958,263	56
57	22 683,398	897 000,592	14 559 285,461	57
58	23 717,295	874 317,194	13 662 284,869	58
59	24 752,177	850 599,899	12 787 967,675	59
60	25 804,703	825 847,722	11 937 367,776	60
61	26 836,036	800 043,019	11 111 520,054	61
62	27 846,132	773 206,983	10 311 477,035	62
63	28 830,119	745 360,851	9 538 270,052	63
64	29 779,577	716 530,732	8 792 909,201	64
65	30 692,340	686 751,155	8 076 378,469	65
66	31 569,313	656 058,815	7 389 627,314	66
67	32 395,427	624 489,502	6 733 568,499	67
68	33 150,537	592 094,075	6 109 078,997	68
69	33 751,833	558 943,538	5 516 984,922	69

x	C_x	M_x	R_x	x
70	34 140,262	525 191,705	4 958 041,384	70
71	34 253,619	491 051,443	4 432 849,679	71
72	34 069,048	456 797,824	3 941 798,236	72
73	33 584,287	422 728,776	3 485 000,412	73
74	32 889,905	389 144,489	3 062 271,636	74
75	32 050,095	356 254,584	2 673 127,147	75
76	31 116,905	324 204,489	2 316 872,563	76
77	30 109,191	293 087,584	1 992 668,074	77
78	29 022,371	262 978,393	1 699 580,490	78
79	27 787,431	233 956,022	1 436 602,097	79
80	26 254,463	206 168,591	1 202 646,075	80
81	24 712,992	179 814,128	996 477,484	81
82	22 868,200	155 101,136	816 663,356	82
83	20 862,501	132 232,936	661 562,220	83
84	18 761,225	111 370,435	529 329,284	84
85	16 631,093	92 609,210	417 958,849	85
86	14 526,529	75 978,117	325 349,639	86
87	12 497,068	61 451,588	249 371,522	87
88	10 587,550	48 954,520	187 919,934	88
89	8 832,090	38 366,970	138 965,414	89
90	7 251,375	29 534,880	100 598,444	90
91	5 853,988	22 283,505	71 063,564	91
92	4 638,273	16 429,517	48 780,059	92
93	3 596,142	11 791,244	32 350,542	93
94	2 715,983	8 195,102	20 559,298	94
95	1 998,652	5 479,119	12 364,196	95
96	1 435,657	3 480,467	6 885,077	96
97	1 018,801	2 044,810	3 404,610	97
98	692,218	1 026,009	1 359,800	98
99	333,791	333,791	333,791	99

Разові нетто-премії, $i = 3\%$

x	$1000A_x$	\ddot{a}_x	\ddot{a}_{xx}
0	158,360 15	28,896 30	27,046 89
1	157,143 53	28,938 07	27,212 26
2	160,380 13	28,826 95	27,094 00
3	163,920 68	28,705 39	26,958 78
4	167,623 04	28,578 28	26,815 84
5	171,491 83	28,445 45	26,664 98
6	175,523 57	28,307 02	26,506 50
7	179,722 88	28,162 85	26,340 17
8	184,086 53	28,013 03	26,166 32
9	188,611 10	27,857 69	25,985 23
10	193,293 36	27,696 93	25,797 22
11	198,121 89	27,531 15	25,603 10
12	203,085 31	27,360 74	25,403 68
13	208,180 20	27,185 81	25,199 30
14	213,387 27	27,007 04	24,991 25
15	218,702 87	26,824 53	24,779 88
16	224,131 19	26,638 16	24,565 00
17	229,668 79	26,448 04	24,346 94
18	235,320 04	26,254 01	24,125 52
19	241,097 09	26,055 67	23,900 06
20	247,019 86	25,852 32	23,669 44
21	253,093 51	25,643 79	23,433 41
22	259,330 92	25,429 64	23,191 29
23	265,745 12	25,209 42	22,942 38
24	272,342 19	24,982 92	22,686 40
25	279,135 64	24,749 68	22,422 65
26	286,131 94	24,509 47	22,150 83
27	293,330 83	24,262 31	21,871 09
28	300,739 26	24,007 95	21,583 13
29	308,357 44	23,746 39	21,287 04
30	316,185 85	23,477 62	20,982 94
31	324,232 05	23,201 37	20,670 49
32	332,497 17	22,917 60	20,349 73
33	340,989 29	22,626 03	20,020 12
34	349,710 31	22,326 61	19,681 85

x	$1000A_x$	\ddot{a}_x	\ddot{a}_{xx}
35	358,662 43	22,019 26	19,334 92
36	367,835 58	21,704 31	18,980 05
37	377,226 51	21,381 89	18,617 57
38	386,826 41	21,052 29	18,248 10
39	396,615 03	20,716 22	17,872 96
40	406,584 91	20,373 92	17,492 68
41	416,723 48	20,025 83	17,108 07
42	427,024 94	19,672 14	16,719 55
43	437,490 01	19,312 84	16,326 98
44	448,114 68	18,948 06	15,930 80
45	458,895 91	18,577 91	15,531 24
46	469,826 35	18,202 63	15,128 60
47	480,894 80	17,822 61	14,723 70
48	492,091 34	17,439 20	14,316 95
49	503,402 74	17,049 84	13,909 10
50	514,817 40	16,657 94	13,500 77
51	526,320 94	16,262 98	13,092 74
52	537,900 84	15,865 40	12,685 64
53	549,551 42	15,465 40	12,279 59
54	561,260 05	15,063 40	11,875 20
55	573,016 73	14,659 76	11,472 90
56	584,809 76	14,254 86	11,073 11
57	596,622 08	13,849 31	10,676 59
58	608,435 80	13,443 70	10,284 05
59	620,232 88	13,038 67	9,896 17
60	631,998 68	12,634 71	9,513 44
61	643,711 71	12,232 56	9,136 78
62	655,358 24	11,832 70	8,766 52
63	666,921 90	11,435 68	8,403 12
64	678,384 17	11,042 14	8,047 12
65	689,725 39	10,652 76	7,699 24
66	700,921 36	10,268 37	7,360 15
67	711,941 88	9,890 00	7,030 96
68	722,753 71	9,518 79	6,712 87
69	733,321 15	9,155 98	6,407 22

x	$1000A_x$	\ddot{a}_x	$\ddot{a}_{x:\overline{40} }$
70	743,627 53	8,802 12	
71	753,671 76	8,457 27	6,114 48
72	763,474 05	8,120 73	5,834 44
73	773,068 64	7,791 31	5,565 96
74	782,501 81	7,467 44	5,307 21
			5,055 88
75	791,793 86	7,148 41	
76	800,942 96	6,834 29	4,810 63
77	809,920 59	6,526 06	4,571 12
78	818,679 10	6,225 35	4,338 03
79	827,154 51	5,934 37	4,112 94
			3,898 08
80	835,303 43	5,654 59	
81	843,107 29	5,386 64	3,694 98
82	850,565 54	5,130 58	3,504 23
83	857,701 93	4,885 56	3,325 87
84	864,555 12	4,650 29	3,159 04
			3,002 44
85	871,165 14	4,423 34	
86	877,571 44	4,203 38	2,854 76
87	883,820 36	3,988 82	2,714 85
88	889,964 06	3,777 89	2,581 45
89	896,056 06	3,568 72	2,453 11
			2,328 40
90	902,147 94	3,359 56	
91	908,292 57	3,148 69	2,206 08
92	914,534 29	2,934 32	2,085 14
93	920,946 31	2,714 11	1,964 79
94	927,645 88	2,484 23	1,844 15
			1,721 41
95	934,843 71	2,237 18	
96	942,781 65	1,964 16	1,591 28
97	951,738 42	1,656 69	1,446 98
98	961,492 83	1,322 18	1,281 26
99	970,887 14	1,000 00	1,106 92
			1,000 00

ФОРМУЛИ

Актuariї функції для кількох осіб

$$1) {}_n p_{x_1 x_2 \dots x_m} = {}_n p_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2} \cdot \dots \cdot {}_n p_{x_m}$$

$$2) {}_n q_{x_1 x_2 \dots x_m} = 1 - {}_n p_{x_1 x_2 \dots x_m}$$

$$3) {}_n |q_{x_1 x_2 \dots x_m} = {}_n p_{x_1 x_2 \dots x_m} - {}_{n+1} p_{x_1 x_2 \dots x_m}$$

$$4) {}_n p_{x_1 x_2 \dots x_m} = \frac{\ell_{x_1+n: x_2+n: \dots: x_m+n}}{\ell_{x_1 x_2 \dots x_m}}$$

$$5) \ell_{x_1 x_2 \dots x_m} = k \cdot \ell_{x_1} \cdot \ell_{x_2} \cdot \dots \cdot \ell_{x_m}$$

$$6) d_{x_1 x_2 \dots x_m} \neq k \cdot d_{x_1} \cdot d_{x_2} \cdot \dots \cdot d_{x_m}$$

$$7) q_{x_1 x_2 \dots x_m} = \frac{d_{x_1 x_2 \dots x_m}}{\ell_{x_1 x_2 \dots x_m}}$$

$$8) d_{x_1 x_2 \dots x_m} = \ell_{x_1 x_2 \dots x_m} - \ell_{x_1+1: x_2+1: \dots: x_m+1}$$

$$9) \mu_{x_1+t: x_2+t: \dots: x_m+t} = - \frac{1}{\ell_{x_1+t: x_2+t: \dots: x_m+t}} \cdot \frac{d \ell_{x_1+t: x_2+t: \dots: x_m+t}}{dt}$$

$$10) \mu_{x_1 x_2 \dots x_m} = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \dots + \mu_{x_m}$$

$$11) D_{x_1 x_2 \dots x_m} = v^{\frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m}} \cdot \ell_{x_1 x_2 \dots x_m}$$

$$12) C_{x_1 x_2 \dots x_m} = v^{\frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m}} \cdot d_{x_1 x_2 \dots x_m}$$

$$13) a_{x_1 x_2 \dots x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{x_1 x_2 \dots x_m} = \frac{N_{x_1+1: x_2+1: \dots: x_m+1}}{D_{x_1 x_2 \dots x_m}}$$

$$14) A_{x_1 x_2 \dots x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_t |q_{x_1 x_2 \dots x_m} = \frac{M_{x_1 x_2 \dots x_m}}{D_{x_1 x_2 \dots x_m}}$$

$$15) (IA)_{uxyz} = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \cdot v^{t+1} \cdot {}_t|q_{uxyz}$$

$$16) \bar{a}_{xyz} = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{xyz} dt$$

$$17) e_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} t p_{xy}$$

$$18) n p_{\overline{x_1 x_2 \dots x_m}} = 1 - (1 - n p_{x_1}) \cdot (1 - n p_{x_2}) \cdot \dots \cdot (1 - n p_{x_m}) = \\ = \sum n p_{x_1} - \sum n p_{x_1 x_2} + \sum n p_{x_1 x_2 x_3} - \sum n p_{x_1 x_2 x_3 x_4} + \dots + \\ + (-1)^{m+1} \cdot n p_{x_1 x_2 \dots x_m}$$

$$19) n q_{\overline{x_1 x_2 \dots x_m}} = 1 - n p_{\overline{x_1 x_2 \dots x_m}}$$

$$20) {}_n|q_{\overline{x_1 x_2 \dots x_m}} = n p_{\overline{x_1 x_2 \dots x_m}} - {}_{n+1}p_{\overline{x_1 x_2 \dots x_m}}$$

$$21) {}_n|q_{xyz} = n p_{xyz} - {}_{n+1}p_{xyz} = {}_n|q_x + {}_n|q_y + {}_n|q_z$$

$$22) a_{\overline{xyz}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{\overline{xyz}} = (a_x + a_y + a_z) - (a_{xy} + a_{xz} + a_{yz}) + a_{xyz} = \\ = \sum a_x - \sum a_{xy} + a_{xyz}$$

$$23) \ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$

$$24) A_{xy} = A_x + A_y - A_{xy}$$

$$25) P_{xy} = \frac{A_{xy}}{\ddot{a}_{xy}}$$

$$26) a_{\overline{wx:yz}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{\overline{wx:yz}} = a_{wy} + a_{wz} + a_{xy} + a_{xz} - \\ - a_{wyz} - a_{xyz} - a_{wxy} - a_{wxz} + a_{wxyz}$$

$$27) {}_n|q_{\overline{wx:yz}} = n p_{\overline{wx:yz}} - {}_{n+1}p_{\overline{wx:yz}}$$

$$28) \left| p_{\overline{wx:yz}} = 1 - (1 - {}_n p_{\overline{wx}}) \cdot (1 - {}_n p_{\overline{yz}}) \right.$$

$$29) A_{\overline{wx:yz}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \cdot \left| q_{\overline{wx:yz}} = A_y + A_z - A_{yz} + A_{\overline{wx}} - \right. \\ \left. - A_{\overline{wxy}} - A_{\overline{wxz}} + A_{\overline{wxyz}} \right.$$

$$30) a_{\overline{uv}} = a_u + a_v - a_{uv}$$

$$31) A_{\overline{uv}} = A_u + A_v - A_{uv}$$

$$32) a_{\overline{u:vw}} = a_{uv} + a_{uw} - a_{uvw}$$

$$33) A_{\overline{u:vw}} = A_{uv} + A_{uw} - A_{uvw}$$

$$34) a_{\overline{wx:yz}} = a_{\overline{wx:y}} + a_{\overline{wx:z}} - a_{\overline{wx:yz}} = \\ = (a_{wy} + a_{xy} - a_{wxy}) + (a_{wz} + a_{xz} - a_{wxz}) - (a_{wyz} + a_{xyz} - a_{wxyz})$$

$$35) A_{\overline{wx:yz}} = A_{\overline{wx}} + (A_y + A_z - A_{yz}) - (A_{\overline{wxy}} + A_{\overline{wxz}} - A_{\overline{wxyz}})$$

$$36) a_{\overline{(x)(y:\overline{m})}} = a_x + a_{\overline{y:\overline{m}}} - a_{\overline{xy:\overline{m}}}$$

$$37) a_{\overline{(x:\overline{n})(\overline{m})}} = a_{\overline{x:\overline{n}}} + a_{\overline{m}} - a_{\overline{x:\overline{n}:\overline{m}}};$$

$$a_{\overline{x:\overline{n}:\overline{m}}} = a_{\overline{x:\overline{m}}}, \text{ ЯКЩО } m < n$$

$$38) a_{\overline{(x:\overline{n})(y:\overline{m})}} = a_{\overline{x:\overline{n}}} + a_{\overline{y:\overline{m}}} - a_{\overline{xy:\overline{n}:\overline{m}}};$$

$$a_{\overline{xy:\overline{n}:\overline{m}}} = a_{\overline{xy:\overline{m}}}, \text{ ЯКЩО } m < n$$

$$39) {}_n p_{\overline{xx \dots x}} \begin{matrix} [r] \\ r \end{matrix} = \binom{m}{r} ({}_n p_x)^r \cdot (1 - {}_n p_x)^{m-r}$$

$$40) {}_n p_{\overline{x_1 x_2 \dots x_m}} \begin{matrix} [r] \\ r \end{matrix} = \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}} = \sum_{s=r}^m (-1)^{s-r} \binom{s}{s-r} Z_s,$$

$$\text{де } Z_s = \sum {}_n p_{x_1 x_2 \dots x_s}$$

$$41) \quad n p \frac{[2]}{wxyz} = n p_{wx} + n p_{wy} + n p_{wz} + n p_{xy} + n p_{xz} + n p_{yz} - \\ - 3(n p_{wxy} + n p_{wxz} + n p_{wyz} + n p_{xyz}) + 6 \cdot n p_{wxyz}$$

$$42) \quad n p \frac{r}{x_1 x_2 \dots x_m} = \sum_{s=r}^m (-1)^{s-r} \binom{s-1}{s-r} Z_s$$

$$43) \quad n p \frac{2}{xyz} = n p_{xy} + n p_{xz} + n p_{yz} - 2 n p_{xyz}$$

$$44) \quad a \frac{2}{xyz} = a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} - 2 a_{xyz}$$

$$45) \quad A \frac{3}{wxyz} = A_{wxy} + A_{wxz} + A_{wyz} + A_{xyz} - 3 A_{wxyz}$$

$$46) \quad a \frac{[1]}{xyz} = a_x + a_y + a_z - 2 \cdot (a_{xy} + a_{xz} + a_{yz}) + 3 \cdot a_{xyz}$$

$$47) \quad q_{xy}^1 = \int_0^1 p_{xy} \cdot \mu_{x+t} dt = \frac{1}{l_{xy}} \cdot \int_0^1 \ell_{x+t:y+t} \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$48) \quad n q_{xy}^1 = \int_0^n n p_{xy} \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$49) \quad \infty q_{xy}^1 = \int_0^{\infty} p_{xy} \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$50) \quad n \Big| q_{xy}^1 = \int_n^{n+1} p_{xy} \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$51) \quad n q_{xy}^2 = \int_0^n p_x \cdot (1 - {}_t p_y) \mu_{x+t} dt = n q_x - n q_{xy}^1$$

$$52) \quad n \Big| q_{xy}^2 = n \Big| q_x - n \Big| q_{xy}^1$$

$$53) \quad n q_{xyz}^1 = \int_0^n p_{xyz} \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$54) {}_nq_{xyz}^2 = \int_0^n {}_t p_x \cdot {}_t p_{\frac{[1]}{yz}} \cdot \mu_{x+t} dt = {}_nq_{xy}^1 + {}_nq_{xz}^2 - 2 \cdot {}_nq_{xyz}^1$$

$$55) {}_nq_{xyz}^3 = \int_0^n (1 - {}_t p_y) \cdot (1 - {}_t p_z) \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \\ = {}_nq_x - {}_nq_{xy}^1 - {}_nq_{xz}^1 + {}_nq_{xyz}^1$$

$$56) {}_nq_{\overline{xy}:z}^1 = {}_nq_{xyz}^1 + {}_nq_{xyz}^1$$

$$57) {}_nq_{x:y\bar{z}}^1 = \int_0^n {}_t p_{x:y\bar{z}} \cdot \mu_{x+t} dt = {}_nq_{xy}^1 + {}_nq_{xz}^1 - {}_nq_{xyz}^1$$

$$58) {}_nq_x^{1:2}{}_{yz} = {}_nq_{xyz}^1 + {}_nq_{xyz}^2$$

$$59) {}_nq_{xy:z}^2 = \int_0^n (1 - {}_t p_x) ({}_t p_x \cdot \mu_{x+t} + {}_t p_y \cdot \mu_{y+t} - {}_t p_{xy} \cdot \mu_{x+t:y+t}) dt = \\ = ({}_nq_x + {}_nq_y - {}_nq_{xy}) - ({}_nq_{xz}^1 + {}_nq_{yz}^1 - {}_nq_{xy:z}^1)$$

$$60) {}_nq_{xxx}^1 = \int_0^n {}_t p_{xxx} \cdot \mu_{x+t} dt = \frac{1}{3} \cdot {}_nq_{xxx} = \\ = \frac{1}{3} [1 - ({}_n p_x)^3]$$

$$61) {}_nq_{xxx} = \int_0^n {}_t p_{xxx} \cdot \mu_{x+t:x+t:x+t} = 1 - ({}_n p_x)^3$$

$$62) {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \approx q_x$$

$$63) q_{xy}^1 \approx q_x \cdot \int_0^1 {}_t p_y dt \approx \frac{d_x \cdot \ell_{y+1/2}}{\ell_x \cdot \ell_y}$$

$$64) \ell_{y+1/2} = \frac{1}{2} (\ell_y + \ell_{y+1})$$

$$65) {}_nq_{xy}^1 \approx \frac{1}{\ell_x \ell_y} \sum_{t=0}^{n-1} d_{x+t} \cdot \ell_{y+t+1/2}$$

$$66) {}_n q_{xyz}^1 \approx \frac{1}{\ell_x \cdot \ell_y \cdot \ell_z} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} d_{x+t} \cdot \ell_{y+t+1/2} \cdot \ell_{z+t+1/2}$$

$$67) A_{xy}^1 = \sum_{t=0}^{\infty} y^{t+1} \cdot \left| q_{xy}^1 \right.$$

$$68) A_{xy} = A_{xy}^1 + A_{xy}^1$$

$$69) A_{xy:n}^1 = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \left| q_{xy}^1 \right.$$

$$70) \bar{A}_{xy}^1 = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$71) \bar{A}_{xy:n}^1 = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$72) \bar{A}_{xyz}^1 = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{xyz} \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$73) \bar{A}_{\overline{xy:z}}^1 = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{xyz} \cdot \mu_{x+t:y+t} dt = \bar{A}_{xyz}^1 + \bar{A}_{xyz}^1$$

$$74) \bar{A}_{\overline{xy:z}}^1 = \int_0^{\infty} v^t \cdot ({}_t p_z ({}_t p_x \cdot \mu_{x+t} + {}_t p_y \cdot \mu_{y+t} - {}_t p_{xy} \cdot \mu_{x+t:y+t})) dt = \bar{A}_{xz}^1 + \bar{A}_{yz}^1 - \bar{A}_{\overline{xy:z}}^1$$

$$75) A_{xy}^2 = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \cdot \left| q_{xy}^2 \right. = A_x - A_{xy}^1$$

$$76) \bar{A}_{xy}^2 = \int_0^{\infty} v^t (1 - {}_t p_y) \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \bar{A}_x - \bar{A}_{xy}^1$$

$$77) \bar{A}_{xyz}^2 = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x \cdot {}_t p_{yz}^{[1]} \cdot \mu_{x+t} dt = \bar{A}_{xy}^1 + \bar{A}_{xz}^1 - 2 \cdot \bar{A}_{xyz}^1$$

$$78) \bar{A}_{xy:z}^2 = \int_0^{\infty} v^t \cdot (1 - {}_t p_x) \cdot {}_t p_{xy} \cdot \mu_{x+t:y+t} dt = \bar{A}_{xy} - \bar{A}_{xy:z}^1 = \\ = \bar{A}_{xy} - \bar{A}_{xyz}^1 - \bar{A}_{xyz}^1$$

$$79) \bar{A}_{xyz}^3 = \int_0^{\infty} v^t \cdot (1 - {}_t p_y)(1 - {}_t p_x) \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \\ = \bar{A}_x - \bar{A}_{xy}^1 - \bar{A}_{xz}^1 + \bar{A}_{xyz}^1$$

$$80) {}_t d_{xy}^1 \approx \frac{d_{x+t} \cdot \ell_{y+t+1/2}}{\ell_x \cdot \ell_y}$$

$$81) A_{xy}^1 = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_t | q_{xy}^1 \approx \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v^{\frac{x+y}{2}+t+1} \cdot d_{x+t} \cdot \ell_{y+t+1/2}}{v^{\frac{x+y}{2}} \cdot \ell_x \cdot \ell_y} = \\ = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t:y+t}^1}{D_{xy}} = \frac{M_{xy}^1}{D_{xy}}$$

$$82) C_{xy}^1 = v^{\frac{x+y}{2}} \cdot \frac{\ell_{xy}}{\ell_x \cdot \ell_y} \cdot d_x \cdot \ell_{y+1/2}$$

$$83) M_{xy}^1 = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t:y+t}^1$$

$$84) A_{xy:n}^1 = \frac{M_{xy}^1 - M_{x+n:y+n}^1}{D_{xy}}$$

$$85) C_{xy}^1 = v^{\frac{x+y}{2}+1} \cdot \int_0^1 \ell_{x+t:y+t} \mu_{x+t} dt$$

$$86) \bar{A}_{xy}^2 = \frac{1}{\ell_x \cdot \ell_y} \cdot \int_0^{\infty} v^t \cdot \ell_{x+t} \cdot \ell_{y+t} \cdot \mu_{y+t} \cdot \bar{A}_{x+t} dt$$

$$87) p_{xy}^1 = \frac{A_{xy}^1}{\ddot{a}_{xy}}$$

$$88) p_{x:y}^1 = \frac{A_{x:y}^1}{\ddot{a}_{x:y}}$$

$$89) \int_0^{\infty} {}_t p_x \cdot {}_t p_y \cdot \mu_{y+t} dt = {}_n p_x \cdot {}_{\infty} q_{x+n:y}^1$$

$$90) \int_0^{\infty} ({}_t p_x - {}_{t+n} p_x) \cdot {}_t p_y \cdot \mu_{y+t} dt = {}_n q_{xy}^1 - {}_n p_x \cdot {}_{\infty} q_{x+n:y}^1$$

$$91) \int_0^{\infty} v^{n+t} {}_{t+n} p_x \cdot {}_t p_y \cdot \mu_{y+t} dt = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \bar{A}_{x+n:y}^1$$

$$92) \int_0^{\infty} v^{n+t} \cdot (1 - {}_t p_y) \cdot {}_{n+t} p_x \cdot \mu_{x+n+t} dt = \frac{D_{x+n}}{D_x} (\bar{A}_{x+n} - \bar{A}_{x+n:y}^1)$$

$$93) {}_{\infty} q_{xyz}^2 = \int_0^{\infty} {}_t p_{xyz} \cdot \mu_{x+t} \cdot {}_{\infty} q_{y+t:z+t}^1 dt =$$

$$= \int_0^{\infty} {}_t q_{xy}^2 \cdot {}_t p_z \cdot \mu_{z+t} dt = {}_{\infty} q_{yz}^1 - {}_{\infty} q_{xyz}^1$$

$$94) {}_{\infty} q_{wxyz}^3 = \int_0^{\infty} {}_t q_w \cdot {}_t p_{xyz} \cdot \mu_{x+t} \cdot {}_{\infty} q_{y+t:z+t}^1 dt =$$

$$= \int_0^{\infty} {}_t q_{wx}^2 \cdot {}_t p_{yz} \cdot \mu_{y+t} dt$$

$$95) \bar{A}_{xyz}^2 = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t q_x \cdot {}_t p_{xz} \cdot \mu_{y+t} dt = \bar{A}_{yz}^1 - \bar{A}_{xyz}^1$$

$$96) \bar{A}_{xyz}^2 = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t q_x \cdot {}_t p_{xz} \cdot \mu_{y+t} \cdot \bar{A}_{x+t} dt$$

$$97) \bar{A}_{wxyz}^2 = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t q_w \cdot {}_t p_{xyz} \cdot \mu_{z+t} dt$$

$$98) \bar{A}_{12}^{3:3} = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tq_w \cdot {}_t p_{xyz} \cdot \mu_{x+t} \cdot \bar{A}_{y+t:z+t}^1 dt$$

$$99) \bar{A}_{12}^{4:4} = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tq_w \cdot {}_t p_{xyz} \cdot \mu_{x+t} \cdot \bar{A}_{y+t:x+t}^2 dt$$

$$100) \bar{A}_{12}^{3:4} = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tq_w \cdot {}_t p_{xyz} \cdot \mu_{x+t} \cdot \bar{A}_{y+t} dt$$

Багатодекрементні таблиці

$$1) d_x^{(T)} = \sum_{k=1}^m d_x^{(k)}$$

$$2) \ell_x^{(T)} - d_x^{(T)} = \ell_{x+1}^{(T)}$$

$$3) q_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{\ell_x^{(T)}}$$

$$4) q_x^{(T)} = \frac{d_x^{(T)}}{\ell_x^{(T)}} = \sum_{k=1}^m q_x^{(k)}$$

$$5) p_x^{(T)} = 1 - q_x^{(T)}$$

$$6) {}_n p_x^{(T)} = \frac{\ell_{x+n}^{(T)}}{\ell_x^{(T)}}$$

$$7) {}_n q_x^{(T)} = 1 - {}_n p_x^{(T)}$$

$$8) m_x^{(T)} = \frac{d_x^{(T)}}{L_x^{(T)}}$$

$$9) L_x^{(T)} = \int_0^1 \ell_{x+t}^{(T)} dt$$

$$10) m_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{L_x^{(T)}}$$

$$11) m_x^{(T)} = \sum_{k=1}^m m_x^{(k)}$$

$$12) \ell_{x+t}^{(T)} \approx \ell_x^{(T)} - t \cdot d_x^{(T)}, \quad 0 < t < 1$$

$$13) L_x^{(T)} \approx \ell_x^{(T)} - 1/2 \cdot d_x^{(T)}$$

$$14) m_x^{(k)} \approx \frac{d_x^{(k)}}{\ell_x^{(T)} - \frac{1}{2} d_x^{(T)}}$$

$$15) q_x^{(k)} \approx \frac{d_x^{(k)}}{L_x^{(T)} + \frac{1}{2} d_x^{(T)}} = \frac{m_x^{(k)}}{1 + \frac{1}{2} \cdot m_x^{(T)}}$$

$$16) p_x^{(T)} \approx \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot m_x^{(T)}}{1 + \frac{1}{2} \cdot m_x^{(T)}}$$

$$17) d_x^{(k)} = d_x^{(T)} \cdot \frac{m_x^{(k)}}{m_x^{(T)}}$$

$$18) \mu_x^{(T)} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h q_x^{(T)}}{h} = - \frac{d \ln \ell_x^{(T)}}{dx}$$

$$19) \ell_x^{(T)} = \ell_0^{(T)} \cdot e^{-\int_0^x \mu_y^{(T)} dy}$$

$$20) {}_n p_x^{(T)} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_y^{(T)} dy}$$

$$21) \ell_x^{(k)} = \sum_{y=x}^{\infty} d_y^{(k)}, \quad k=1, 2, \dots, m$$

$$22) \ell_x^{(k)} = \int_x^{\infty} \ell_y^{(T)} \cdot \mu_y^{(k)} dy, \quad k=1, 2, \dots, m$$

$$23) \mu_x^{(k)} = -\frac{1}{\ell_x^{(T)}} \cdot \frac{d\ell_x^{(k)}}{dx}$$

$$24) d_x^{(k)} = \int_0^1 \ell_{x+t}^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(K)} dt$$

$$25) {}_n q_x^{(k)} = \int_0^n {}_t p_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(k)} dt$$

$$26) \ell_x^{(T)} = \sum_{k=1}^m \ell_x^{(k)}$$

$$27) \mu_x^{(T)} = \sum_{k=1}^m \mu_x^{(k)}$$

$$28) \mu_x^{(k)} \approx \frac{d_{x-1}^{(k)} + d_x^{(k)}}{2 \ell_x^{(T)}}$$

$$29) \mu_x^{(k)} \approx \frac{7(d_{x-1}^{(k)} + d_x^{(k)}) - (d_{x-2}^{(k)} + d_{x+1}^{(k)})}{12 \cdot \ell_x^{(T)}}$$

$$30) \ell_x'^{(k)} = \ell_0'^{(k)} \cdot e^{-\int_0^x \mu_y^{(k)} dy}$$

$$31) q_x'^{(k)} = 1 - e^{-\int_0^x \mu_{x+t}^{(k)} dt}$$

$$32) q_x'^{(k)} \approx \frac{d_x^{(k)}}{\ell_x^{(T)} - \frac{1}{2} \cdot d_x^{(-k)}} = \frac{q_x^{(k)}}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^{(-k)}}$$

$$33) q_x^{(-k)} = q_x^{(T)} - q_x^{(k)}$$

$$34) \ell_{x+t}^{(k)} \approx \ell_x^{(k)} - t \cdot d_x^{(k)}, \quad 0 < t < 1$$

$$35) \ell_{x+t}^{(T)} \approx \ell_x^{(T)} - t \cdot d_x^{(T)}$$

$$36) \frac{d\ell_{x+t}^{(k)}}{dt} \approx -d_x^{(k)}$$

$$37) \mu_{x+t}^{(k)} = -\frac{1}{\ell_{x+t}^{(T)}} \frac{d\ell_{x+t}^{(k)}}{dt} \approx \frac{d_x^{(k)}}{\ell_{x+t}^{(T)}}$$

$$38) q_x'^{(k)} \approx 1 - (p_x^{(T)})^{\frac{d_x^{(k)}}{d_x^{(T)}}}$$

$$39) q_x'^{(k)} \approx q_x^{(k)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot q_x^{(-k)}\right)$$

$$40) p_x^{(T)} = p_x'^{(1)} \cdot p_x'^{(2)} \cdot \dots \cdot p_x'^{(m)}$$

$$41) \ell_x^{(T)} = k \cdot \ell_x'^{(1)} \cdot \ell_x'^{(2)} \cdot \dots \cdot \ell_x'^{(m)}$$

$$42) q_x'^{(k)} \approx \frac{m_x^{(k)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(k)}}$$

$$43) m_x^{(k)} \approx \frac{q_x'^{(k)}}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x'^{(k)}}$$

$$44) D_x^{(T)} = v^t \cdot \ell_x^{(T)}$$

$$45) N_x^{(T)} = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{(T)}$$

$$46) \ddot{a}_x^{(T)} = \frac{N_x^{(T)}}{D_x^{(T)}}$$

$$47) C_x^{(k)} = v^{x+1} \cdot d_x^{(k)}$$

$$48) M_x^{(k)} = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}^{(k)}$$

$$49) A_x^{(k)} = \frac{M_x^{(k)}}{D_x^{(T)}}$$

$$50) \bar{A}_x^{(k)} = \frac{\bar{M}_x^{(k)}}{D_x^{(T)}}$$

$$51) \bar{M}_x^{(k)} \approx \frac{i}{\sigma} M_x^{(k)}$$

$$52) C_x^{ad} = v^{x+1} d_x^{ad}$$

$$53) M_x^{ad} = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}^{ad}$$

$$54) A_x^{ad} = \frac{M_x^{ad}}{D_x^{(T)}}$$

$$55) {}_m p_{x:n}^{ad} = \frac{M_x^{ad} - M_{x+n}^{ad}}{N_x^{(T)} - N_{x+m}^{(T)}}$$

$$56) C_x^{ad} \approx t \cdot q_x^{ad} \cdot D_x$$

Таблиці із другим декрементом

$$57) \ell_{x+1}^{(T)} = \ell_x^{(T)} - d_x^{(d)} - d_x^{(h)}$$

$$58) (h\ell)_{x+1} = (h\ell)_x + d_x^{(h)} - (hd)_x$$

$$59) q_x^{(d)} = \frac{d_x^{(d)}}{\ell_x^{(T)}}$$

$$60) q_x^{(h)} = \frac{d_x^{(h)}}{\ell_x^{(T)}}$$

$$61) q_x^{\prime(d)} \approx \frac{d_x^{(d)}}{\ell_x^{(T)} - \frac{1}{2} \cdot d_x^{(h)}}$$

$$62) q_x^{\prime(h)} \approx \frac{d_x^{(h)}}{\ell_x^{(T)} - \frac{1}{2} \cdot d_x^{(d)}}$$

$$63) (hq)_x \approx \frac{(hd)_x}{(h\ell)_x + \frac{1}{2} \cdot d_x^{(h)}}$$

$$64) q_x^{(Th)} = \frac{(hd)_x - (hl)_x \cdot (hq)_x}{\ell_x^{(T)}}$$

$$65) q_x^{(Th)} \approx \frac{1}{2} \cdot q_x^{(h)} \cdot (hq)_x$$

$$66) p_x^{(Th)} = \frac{(hl)_{x+1} - (hl)_x \cdot (hp)_x}{\ell_x^{(T)}}$$

$$67) p_x^{(Th)} = q_x^{(h)} - q_x^{(Th)}$$

$$68) p_x^{(Th)} \approx q_x^{(h)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot (hq)_x \right)$$

$$69) {}_n p_x^{(Th)} = \frac{(hl)_{x+n} - (hl)_x \cdot n \cdot (hp)_x}{\ell_x^{(T)}}$$

$$70) {}_n | q_x^{(Th)} = \frac{(hd)_{x+n} - (hl)_x \cdot n \cdot (hq)_x}{\ell_x^{(T)}}$$

$$71) {}_n | (hq)_x = {}_n (hp)_x - {}_{n+1} (hp)_x$$

$$72) \ell_{x+1}^{aa} = \ell_x^{aa} - d_x^{aa} - i_x$$

$$73) \ell_{x+1}^{ii} = \ell_x^{ii} + i_x - d_x^{ii}$$

$$74) q_x^{aa} = \frac{d_x^{aa}}{\ell_x^{aa}}$$

$$75) r_x = \frac{i_x}{\ell_x^{aa}}$$

$$76) r_x^1 \approx \frac{i_x}{\ell_x^{aa} - \frac{1}{2} \cdot d_x^{aa}}$$

$$77) q_x^i \approx \frac{d_x^{ii}}{\ell_x^{ii} + \frac{1}{2} \cdot i_x}$$

$$78) q_x^{ai} = \frac{d_x^{ii} - \ell_x^{ii} \cdot q_x^i}{\ell_x^{aa}} \approx \frac{1}{2} \frac{i_x}{\ell_x^{aa}} \cdot q_x^i = \frac{1}{2} r_x \cdot q_x^i$$

$$79) p_x^{ai} = \frac{\ell_{x+1}^{ii} - \ell_x^{ii} \cdot p_x^i}{\ell_x^{aa}}$$

$$80) p_x^{ai} \approx \frac{i_x}{\ell_x^{aa}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^i \right)$$

$$81) {}_n p_x^{ai} = \frac{\ell_{x+n}^{ii} - \ell_x^{ii} \cdot {}_n p_x^i}{\ell_x^{aa}}$$

$$82) {}_n | q_x^{ai} = \frac{d_{x+n}^{ii} - \ell_x^{ii} \cdot {}_n | q_x^i}{\ell_x^{aa}}$$

$$83) r_x = p_x^{ai} + q_x^{ai}$$

$$84) (mq)_x \approx \frac{(md)_x}{(m\ell)_x + \frac{1}{2} \cdot (bm)_x}$$

$$85) a_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x^{ai} = \frac{N_x^{ii} - D_x^{ii} \cdot \ddot{a}_x^i}{D_x^{aa}}$$

$$86) D_x^{ii} = v^x \cdot \ell_x^{ii}$$

$$87) D_x^{aa} = v^x \cdot \ell_x^{aa}$$

$$88) N_x^{ii} = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{ii}$$

$$89) \ddot{a}_x^i = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x^i$$

$$90) \ddot{a}_x^{aa} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x^{aa} = \frac{N_x^{aa}}{D_x^{aa}}$$

$$91) D_x^{aa} = v^x \cdot \ell_x^{aa}$$

$$92) N_x^{aa} = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{aa}$$

$$93) {}_t|q_x^{bm} = \frac{(md)_{x+4} - (m\ell)_x \cdot {}_t|(mq)_x}{(b\ell)_x}$$

$$94) A_x^{bm} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_t|q_x^{bm} = \frac{(mM)_x - (mD)_x \cdot (mA)_x}{(bD)_x}$$

$$95) (mM)_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{x+t+1} (md)_{x+t}$$

$$96) (mD)_x = v^x (m\ell)_x$$

$$97) (bD)_x = v^x \cdot (b\ell)_x$$

$$98) (mA)_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|(mq)_x$$

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

Тема 1. Актуарні функції для кількох осіб

1. а) ${}_n p_x \cdot {}_n p_y$

б) ${}_n p_x + {}_n p_y - 2{}_n p_x \cdot {}_n p_y$

в) ${}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_x \cdot {}_n p_y$

г) $1 - {}_n p_x \cdot {}_n p_y$

д) $1 - {}_n p_x \cdot {}_n p_y$

е) $(1 - {}_n p_x)(1 - {}_n p_y)$

2. а) ${}_n|q_x \cdot {}_n|q_y \cdot {}_n|q_z$

б) $(1 - {}_n|q_x)(1 - {}_n|q_y)(1 - {}_n|q_z)$

в) $1 - (б)$

6. ${}_n q_{xx}$

7. а) $d_{xy} = l_{xy} - l_{x+1:y+1}$

б) $\mu_{xy} = \mu_x + \mu_y$

в) правильно

г) $q_{xy} = q_x + q_y - q_x \cdot q_y$

10. а) $2(\mu_x - \mu_{x+t})$

б) $2\mu_x e^{0,05t} - 1$

11. 0,86

12. 25

13. 0,812

14. а) $2/3$

б) $18,06^0$

15. 0,1097

16. а)

17. 115101,6

18. $q_x + q_y - q_{xy}$

19. а) $\bar{a}_w + \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z - \bar{a}_{wx} - \bar{a}_{wy} - \bar{a}_{wz}$

$-\bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xz} - \bar{a}_{yz} + \bar{a}_{wxy} + \bar{a}_{wxz}$

$+\bar{a}_{wyz} + \bar{a}_{xyz} - \bar{a}_{wxyz}$

б)
$$\frac{A_{x:\bar{n}}^1 + A_{y:\bar{n}}^1 - A_{xy:\bar{n}}^1}{\ddot{a}_{x:\bar{n}} + \ddot{a}_{y:\bar{n}} - \ddot{a}_{xy:\bar{n}}}$$

20. ${}_n|q_x + {}_n|q_y - {}_n|q_x \cdot {}_n|q_y$. Ни

21. ${}_n|a_x + {}_n|a_y - {}_n|a_{xy}$

22. а) 29/30

б) 36,94

23. 235

24. 136825,5

25. 0,18

26. 30,33

$$30. a_{abcx} + a_{abcy} + a_{abcz} - a_{abcxy} - a_{abcxz} - a_{abcyz} + a_{abcxyz}$$

$$31. a_{25;25} + a_{30;20} - a_{25;30;20}$$

$$32. 25|a_{25} + 20|a_{30} - 25|a_{25;30}$$

$$33. a_{\bar{n}} + a_x + a_y - a_{xy} - a_{x;\bar{n}} - a_{y;\bar{n}} + a_{xy;\bar{n}}$$

$$35. a) {}_n p_{xy} + {}_n p_{xz} + {}_n p_{yx} - 2{}_n p_{xyz}$$

$$b) {}_n p_x + {}_n p_y + {}_n p_z - 2({}_n p_{xy} + {}_n p_{xz} + {}_n p_{yz}) + 3{}_n p_{xyz}$$

$$36. a_{wxy} + a_{wxz} + a_{wyz} + a_{xyz} - 4a_{wxyz}$$

$$37. 1,125$$

$$39. 1 - d(\ddot{a}_{wex} + \ddot{a}_{wey} + \ddot{a}_{wez} + \ddot{a}_{xxy} + \ddot{a}_{xzx} + \ddot{a}_{yzy} - 2\ddot{a}_{wexy} - 2\ddot{a}_{wexz} - 2\ddot{a}_{wxyz} - 2\ddot{a}_{xyyz} + 3\ddot{a}_{wxyz})$$

$$40. \ddot{a}_{wxy} + \ddot{a}_{wxz} + \ddot{a}_{wyz} - 2\ddot{a}_{wxyz}$$

$$41. a) 1 - 5({}_n p_x)^4 + 4({}_n p_x)^5$$

$$b) [1 + 4({}_{n-1}p_x - {}_n p_x)][1 - ({}_{n-1}p_x - {}_n p_x)]^4$$

$$42. 324 \text{ гр. од.}$$

$$46. \frac{1}{3} \ddot{a}_{x;\bar{n}} + \frac{1}{2} \ddot{a}_{y;\bar{n}} + \frac{1}{6} \ddot{a}_{xy;\bar{n}}$$

$$47. \frac{1}{8} (a_w + a_x + a_y + a_z + a_{wxy} + a_{wxz} + a_{wyz} + a_{xyz})$$

$$48. \bar{a}_{20|40} + \bar{a}_{10|50} - \bar{a}_{10|5} - \bar{a}_{40;50} - \bar{a}_{20|}$$

$$50. \frac{1}{2} (1 - {}_n p_x)^2 {}_n p_x$$

$$51. 0,3$$

$$52. \infty q_{wx^1y} + \infty q_{wx^1z} + \infty q_{xy^1z} - 3 \infty q_{wx^1yz}$$

$$54. б) (x) \text{ старший від } (y)$$

$$59. \bar{A}_{wx}^1 + \bar{A}_{xy}^1 + \bar{A}_{xz}^1 - 2(\bar{A}_{wx^1y} + \bar{A}_{wx^1z} + \bar{A}_{xyz}^1) + 3\bar{A}_{wx^1yz}$$

$$60. A_{x;y;\bar{n}}^1 = \frac{M_{xy}^1 - M_{x+n;y+n}^1 + D_{x+n;y+n}}{D_{xy}}$$

$$61. 0,25 \bar{A}_{40:50} + .001 \bar{a}_{40:50}$$

$$63. \bar{A}_{x:yz} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{a}_{x-1:yz}}{p_{x-1}} - p_x \cdot \bar{a}_{x+1:yz} \right)$$

65. Якщо всі три особи виживають:

$$A_{x+t:y+t:z+t}^2 - P \cdot \ddot{a}_{x+t:y+t:z+t}$$

Якщо тільки (x) і (y) виживають:

$$A_{x+t:y+t}^1 - P \cdot \ddot{a}_{x+t:y+t}$$

Якщо тільки (x) і (z) виживають:

$$A_{x+t:z+t}^1 - P \cdot \ddot{a}_{x+t:z+t}$$

$$66. \frac{1000 \bar{M}_{35:40}^{-1} + 10000 \bar{M}_{35:40}^{-1} - 100 (\bar{R}_{36:41}^{-1} - \bar{R}_{56:61}^{-1})}{N_{35:40}}$$

$$67. 0,445$$

$$69. \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot {}_{m-n}p_y \cdot \ddot{a}_{x+m:y+m-n}$$

$$70. \bar{A}_{50} - \bar{A}_{50:20:20}^{-1}$$

$$71. \bar{A}_{xy}^2 - \frac{D_{x+n}}{D_x} (\bar{A}_{x+n} - \bar{A}_{x+n:y})$$

$$72. \frac{\bar{A}_{30:\bar{5}} + \frac{D_{35}^{-1}}{D_{30}} \bar{A}_{35:60}}{1,075 - \frac{D_{35}^{-1}}{D_{30}} \bar{A}_{35:60}}$$

$$73. \frac{1}{24}$$

$$74. \int_0^{\infty} t v^t {}_t p_{xy} \mu_{y+t} \bar{A}_{x+t} dt$$

$$75. v^{10} (A_{x:yz}^1 - 10p_y A_{x:y+10}^1 - 10p_z \bar{A}_{x:z+10} + 10p_{yz} \bar{A}_{x:y+10; z+10})$$

76. 1974,38 гр. од.

Тема 2. Моделі вибуття з кількох причин

1. а) $\frac{324}{721,013}$

б) $\frac{80385+4117}{901020}$

2. а) 400

б) 500

3. $\frac{86632}{764486}$

4. $l_{30}^{(T)} = 435457$

$$d_{30}^{(1)} = 326$$

$$d_{30}^{(2)} = 55964$$

5. $\frac{1-1/2 \cdot (a+b)}{1+1/2 \cdot (a+b)}$

6. $\frac{j}{j+k} \cdot [1 - e^{-(j+k)}]$

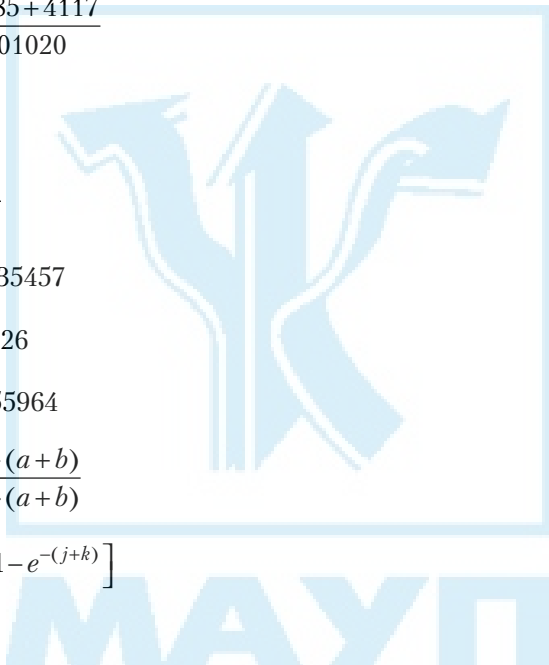
7. 2/3

8. $\mu_x^{(1)} = \frac{2x}{a-x^2}$

9. $\mu_x^{(1)} = \frac{2x}{a-x^2}$

$$d_x^{(1)} = e^{-x} - e^{-x-1}$$

$$d_x^{(2)} = e^{-x}(a-x-1) - e^{-x-1}(a-x-2)$$



10. 315; 92777

11. $\frac{2-q_x^{(T)}}{2-q_x^{(1)}} \cdot q_x^{(1)}$, якщо використати $q_x^{(k)} \approx \frac{q_x^{(k)}}{1-1/2q_x^{(-k)}}$,

де $q_x^{(-k)} = q_x^{(T)} - q_x^{(k)}$

12. 0,022

13. Те саме, що й у задачі 9.

14. 3520; 80; 120; 280

15.

x	$d_x^{(d)}$	$d_x^{(m)}$	$d_x^{(w)}$
20	93	979	328
21	80	842	278

16. 0,286

18. $q_x^{(w)} \approx m_x^{(w)} \cdot \frac{[1-1/2 \cdot q_x^{(d)}] \cdot [1-1/2 \cdot q_x^{(r)}]}{1+1/2 \cdot m_x^{(w)} - 1/4 \cdot q_x^{(r)} \cdot m_x^{(w)}}$

$$q_x^{(r)} \approx q_x^{(r)} \cdot \frac{1-1/2 \cdot q_x^{(d)}}{1+1/2 \cdot m_x^{(w)} - 1/4 \cdot q_x^{(r)} \cdot m_x^{(w)}}$$

19. а) 859; 732; 40

б) $\frac{1591}{10000}$

в) $\frac{40}{8714}$ або $\frac{46}{9977}$ залежно від використаної формули

г) $\frac{732}{9080}$

д) 1,83

20. 0,38

Академічний рік	Для студентів на початку відповідного академічного року ймовірність...		
	... провалу на іспитах	... відрухування з іншої причини	... залишитись у числі студентів упродовж академічного року
1	0,40	0,20	0,4
2	0,2	0,3	0,5
3	0,1	0,3	0,6

21. 0,116

22. 999589

23. 803

24. 0,0128

25. 0,0003

$$26. p_{30}^{(Th)} \cdot (hq)_{31} \approx \frac{1}{l_{30}^{(T)}} \cdot \{d_{30}^{(h)} \cdot [1 - 1/2 \cdot (hq)_{30}] \cdot (hq)_{31}\}$$

$$27. l_{32}^{(T)} = 26959; \quad d_{32}^{(d)} = 539; \quad d_{32}^{(h)} = 1618; \quad (hl)_{32} = 55267;$$

$$(hd)_{32} = 1156$$

$$28. p_x^{(Th)} = \frac{(hl)_{x+1} - (hl)_x \cdot (hp)_x}{l_x^{(T)}}$$

$$30. p_x^a \approx \frac{1}{l_x^{aa}} \cdot [l_{x+1}^{aa} + i_x \cdot (1 - 1/2 \cdot q_x^i)] \quad \text{або} \quad p_x^a \approx \frac{1}{l_x^{aa}} [l_{x+1}^{aa} + l_{x+1}^{ii} - l_x^{ii} \cdot p_x^i]$$

31. 727; 20; 85

32. а) і б)

$$33. \text{а) } \frac{207}{29711 + 1/2 \cdot 4335}$$

б) $1 - (a)$

$$\text{в) } 1 - \frac{376 + 4335 \cdot (a)/2}{51002} \quad \text{або}$$

$$\frac{1}{51002} \cdot \{46291 + 33839 - 29711 \cdot [1 - (a)]\}$$

$$34. \int_0^2 \frac{(bl)_{34+t}}{(bl)_{34}} \cdot (\mu_{34+t}^{(bd)} + \mu_{34+t}^{(bm)} \cdot {}_{2-t}q_{34+t}^{(m)}) dt$$

$$36. \left[1 - \frac{76}{10000 - 1/2 \cdot 1290} \right] \cdot \left[\frac{80}{8634 - 1/2 \cdot 1268} \right]$$

38. 0,9931

39. 0,972

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *АктUARная математика* / Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д. Джонс и др.; Пер. с англ; Под ред. В. К. Малиновского. — М.: Янус-К, 2001. — 656 с.
2. *Jordan C. W. Society of Actuaries' Textbook on life contingencies*, The Society of Actuaries Chicago. — Illinois, 1975. — 390 p.
3. *Черномаз Г. М. АктUARні розрахунки. Практикум.* — К.: КНТЕУ, 2007. — 127 с.

Додаткова


4. *Фалин Г. И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем.* — М.: Анкил, 2002. — 262 с.
5. *Касимов Ю. Ф. Введение в актуарную математику (страхования жизни и пенсионных схем).* — М.: Анкил, 2001.
6. *Кутуков В. Б. Основы финансовой и страховой математики. Методы расчета кредитных, пенсионных и страховых схем.* — М.: Дело, 1998.
7. *Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика.* — К.: ЦУЛ, 2002. — 448 с.
7. *Кагаловская Э. Т. Страхование жизни.* — М.: Анкил, 1994.
8. *Гербер Х. Математика страхования жизни: Пер. с англ.* — М.: Мир, 1995. — 160 с.

Интернет-ресурси

Факультет та Інститут актуаріїв Великобританії: <http://www.actuaries.org.uk/main.html>

ЗМІСТ

Пояснювальна записка.....	3
Задачі до тем.....	4
Додатки.....	25
Формули	37
Відповіді до задач	52
Список літератури.....	59



Відповідальний за випуск *А. Д. Везеренко*
Редактор *Л. С. Тоболіч*
Комп'ютерне верстання *Н. І. Нечипоренко*

Зам. № ВКЦ-3604

Підп. до друку 10.11.2008. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк ротатійний графаретний. Умов.-друк. арк. 3,48.
Обл.-вид. арк. 2,8. Наклад 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП
ДП «Видавничий дім «Персонал»

03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008*