МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНІВ

з дисципліни

“ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”

(для бакалаврів)

Київ 2008

Підготовлено доцентом кафедри інформатики та інформаційних технологій *Т. М. Дудкою*

Затверджено на кафедрі математики (протокол № 2 від 26.10.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Дудка Т. М. Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни "Дослідження операцій" (для бакалаврів). — К.: МАУП, 2008. — 31 с.

Методичні рекомендації містять пояснювальну записку, теоретичну частину до деяких тем модулів, приклади розв'язування задач, задачі для самостійного розв'язування, а також список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

"Дослідження операцій" — фундаментальна дисципліна, яка лежить на межі математики, економіки, системного аналізу і займається розробкою і практичним застосуванням методів найбільш ефективного керування різними організаційними системами. Підходи та методи дослідження операцій використовують для аналізу економічних задач та кількісного обґрунтування можливих рішень задач організаційного керування.

Основна мета вивчення дисципліни "Дослідження операцій" — ознайомлення з основними моделями задач оптимального керування та особливостями їх застосування, формування знань і навичок створення математичних моделей, використання методів і алгоритмів оптимізації з метою кількісного обґрунтування рішення, яке має забезпечити оптимальне розв'язання поставленого завдання.

Основними завданнями, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни, є надання студентам систематизованих знань щодо суті та етапів дослідження операцій; основних принципів та прийомів математичного моделювання операцій; методів розв'язування оптимізаційних задач, а також формування умінь з:

- постановки та формалізації економіко-управлінських задач;
- класифікації задач та методів дослідження операцій;
- розв'язування основних класів оптимізаційних задач та їх аналізу;
- проведення післяоптимізаційного аналізу та розробки практичних рекомендацій з прийняття рішень.

Оволодіння теорією дослідження операцій дасть змогу визначати найкращі рішення типових економічних задач, аналізувати альтернативні варіанти, обґрунтовано приймати управлінські рішення на різних економічних рівнях.

Програма курсу охоплює традиційні розділи теорії оптимізації — лінійне, цілочислове, динамічне, нелінійне програмування, елементи теорії ігор, теорії масового обслуговування та мережного планування і керування. Задачі оптимального планування в умовах ризику та невизначеності розглядаються в розділі стохастичного програмування. Програмою передбачено також ознайомлення з основними поняттями та задачами багатокритеріальної оптимізації.

Основні модулі предмета "Дослідження операцій":

Модуль І. Задачі лінійного та нелінійного програмування.

Основні поняття та принципи дослідження операцій.
Лінійні оптимізаційні моделі.
Задачі нелінійного програмування.
Задачі динамічного програмування.
Модуль II. Спеціальні моделі дослідження операцій.
Оптимізація на мережах.
Задачі мережного планування.
Елементи теорії ігор.
Елементи теорії масового обслуговування.
Задачі багатокритеріальної оптимізації.
Задачі стохастичного програмування.

Самостійна робота передбачена для самостійного опрацювання деяких теоретичних відомостей, а також для глибшого оволодіння практичними навичками розв'язання типових оптимізаційних задач.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1. ОПТИМІЗАЦІЯ НА МЕРЕЖАХ

Транспортні мережі. Побудова максимального потоку

Теоретичні відомості

Основні поняття

Транспортною мережею ***S*** називається довільний орієнтований граф без петель з множиною вершин ***X*** і множиною дуг ***U***, який має одну вершину $s \in X$, у яку не входить жодна дуга (*вхід у мережу*) і одну вершину $t \in X$, з якої не виходить жодна з дуг (*вихід із мережі*), причому кожній дузі ставиться у відповідність невід'ємне дійсне число $c(u)$, яке називається *пропускною здатністю дуги*.

У кожній дузі може існувати *потік*, який характеризується невід'ємним дійсним числом $\varphi(u)$, яке задовольняє таким умовам:

- для довільної дуги мережі $0 \le \varphi(u) \le c(u)$, тобто кількість потоку по кожній дузі не може перевищувати її пропускної здатності;
- для довільної вершини мережі, крім її входу і виходу, сума потоків, що входять у вершину, повинна дорівнювати сумі потоків, що виходять із вершини.

З другої умови випливає, що кількість потоку, який виходить із входу s, дорівнює кількості потоку, що входить у вихід t — ця величина називається потоком мережі і позначається φ, отже, $\varphi_s = \varphi_t = \varphi$
.

Потік у дузі є насиченим, коли $\varphi(u) = c(u)$, тобто значення потоку, який проходить по дузі, дорівнює значенню її пропускної здатності.

Транспортну мережу разом з потоком, що проходить по ній, можна використовувати для моделювання передачі інформації в інформаційній мережі, для моделювання та оптимізації процесу перевезення пасажирів, перекачки нафти тощо.

Дуга u, що сполучає вершини мережі, є *допустимою*, якщо для неї виконується одна з таких умов:

1) напрямок дуги збігається з напрямком потоку і значення потоку менше пропускної здатності дуги, тобто $\varphi(u) < c(u)$;
2) напрямок дуги протилежний до напрямку потоку і величина потоку, що проходить по цій дузі, — невід'ємне число, тобто $\varphi(u) > 0$.

Дуги, які відповідають умові (1), називаються *дугами збільшення* потоку.

Дуги, які відповідають умові (2), називаються *дугами зменшення* потоку.

Ланцюгом збільшення називається простий ланцюг, який з'єднує початок і кінець мережі, всі дуги якого є допустимими.

Якщо відомий ланцюг збільшення, то можна збільшити потік, який по ньому проходить, на величину δ = min{Δ(u)}, де

$$\Delta(u) = \begin{cases} c(u) - \varphi(u), \text{ якщо } u - \text{дуга збільшенн} \\ \varphi(u), \text{ якщо } u - \text{дуга зменшення} \end{cases}.$$

Отже, для дуг збільшення потік збільшується на δ, а для дуг зменшення потік зменшується на δ.

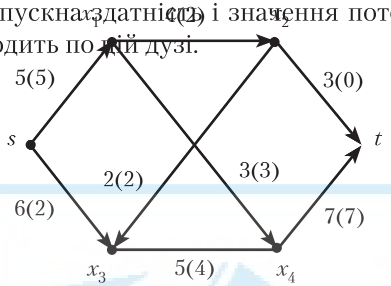
Алгоритм побудови максимального потоку

1. Задати початкове значення потоку для кожної дуги. Якщо початкове значення потоку не задане, то вважати його рівним нулю.
2. Побудувати ланцюг збільшення від входу до виходу. Якщо ланцюга збільшення не існує, то максимальний потік побудовано і його значення дорівнює сумі потоку, що виходить з початкової вершини, або сумі потоку, що входить у кінцеву вершину (ці значення повинні бути рівні між собою). Якщо максимальний потік не побудовано, перейти до пункту 3.
3. Збільшити значення потоку на величину δ і перейти до пункту 2.

Література [5; 9]

Приклад 1

Побудувати максимальний потік для мережі, у якої для кожної дуги відома пропускна здатність і значення потоку (вказано в дужках), який проходить по цій дузі.

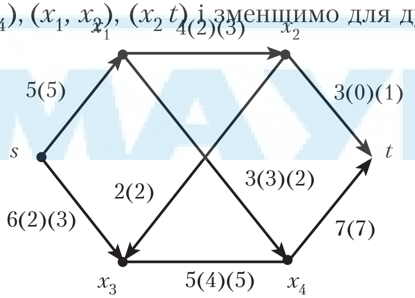


У цій задачі для кожної дуги вказано початкове значення потоку. Будемо послідовно розглядати ланцюги збільшення і збільшувати потік, що по них проходить.

1. Розглянемо ланцюг збільшення ($s\ x_3\ x_4\ x_1\ x_2\ t$), визначимо $\delta =$ $= \min\{6-2, 5-4, 3, 4-2, 3-0\} = \min\{4, 1, 3, 2, 3\} = 1$.

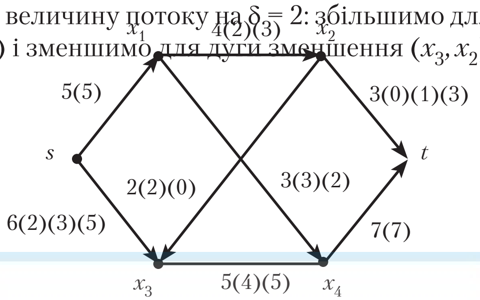
Примітка. На ділянці ланцюга збільшення ($x_4\ x_1$) потік, який ми направляємо по цій ділянці, протилежний до заданого напряму дуги ($x_1\ x_4$), тому в цьому ланцюгу — це дуга зменшення і для неї $\Delta(u) = \varphi(u) = 3$.

2. Змінимо величину потоку на $\delta = 1$: збільшимо для дуг збільшення (s, x_3), (x_3, x_4), (x_1, x_2), (x_2 t) і зменшимо для дуги зменшення (x_4 x_1).



3. Знайдемо ще ланцюг збільшення ($s\ x_3\ \ x_2\ t$), визначимо $\delta =$ $= \min\{6-3, 2, 3-1\} = \min\{3, 2, 2\} = 2$.

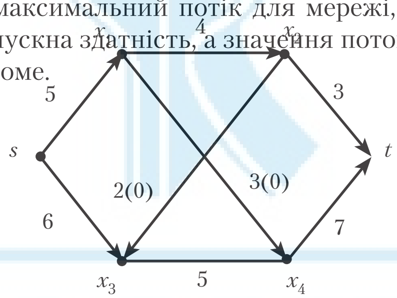
4. Змінимо величину потоку на $\delta = 2$: збільшимо для дуг збільшення (s, x_3), ($x_2\ t$) і зменшимо для дуги зменшення (x_3, x_2).



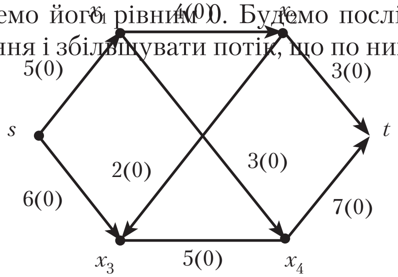
Більше ланцюгів збільшення не існує. Це видно принаймні з того, що для вершини виходу t дуги, що в неї входять, є насиченими. Отже, $\varphi_s = \varphi_t = \varphi = 5 + 5 = 3 + 7 = 10$.

Приклад 2

Побудувати максимальний потік для мережі, у якої для кожної дуги відома пропускна здатність, а значення потоку, який проходить по цій дузі, невідоме.

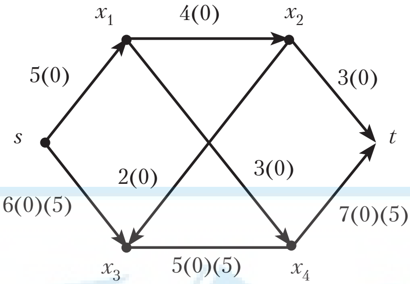


Оскільки в задачі не вказано початкового значення потоку для дуг, то вважатимемо його рівним 0. Будемо послідовно розглядати ланцюги збільшення і збільшувати потік, що по них проходить.



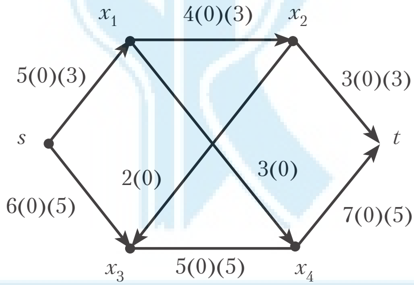
1. Розглянемо ланцюг збільшення ($s\ x_4\ x_1\ \ t$), визначимо $\delta = \min\{6-0, 5-0, 7-0\} = \min\{6, 5, 7\} = 5$.

2. Оскільки всі дуги ланцюга ($s x_4 x_1\ t$) — дуги збільшення, то збільшимо величину потоку на $\delta = 5$.



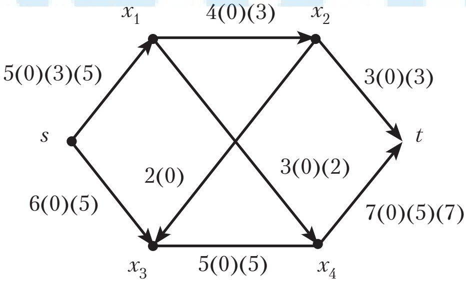
3. Розглянемо наступний ланцюг збільшення ($s\,x_1\,x_2\,t$), визначимо $\delta = \min\{5-0, 4-0, 3-0\} = \min\{5, 4, 3\} = 3$.

4. Всі дуги ланцюга ($s\,x_1\,x_2\,t$) — дуги збільшення, тому збільшимо величину потоку на $\delta = 3$.



3. Знайдемо ще ланцюг збільшення ($s\ x_1\ x_4\ t$), визначимо $\delta = \min\{5-3, 3-0, 7-5\} = \min\{2, 3, 2\} = 2$.

4. Всі дуги ланцюга ($s\,x_1\,x_4\,t$) — також дуги збільшення, тому збільшимо величину потоку на $\delta = 2$.

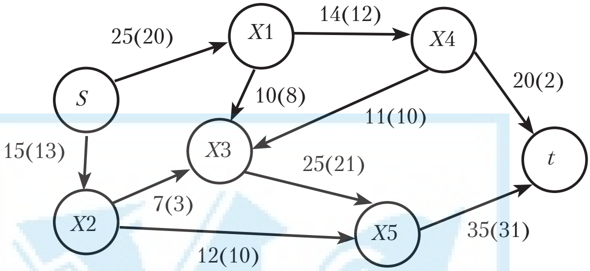


Більше ланцюгів збільшення не існує.

Отже, $\varphi_s = \varphi_t = \varphi = 5+5 = 3+7 = 10$.

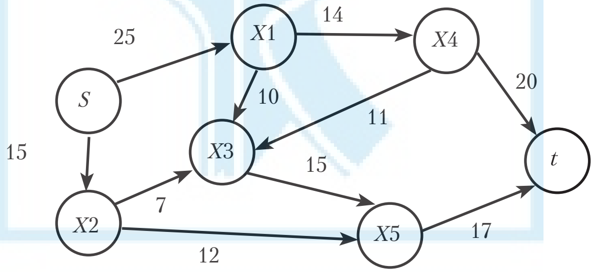
Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудувати максимальний потік у мережі, коли відома пропускна здатність і потік кожної дуги.



Відповідь: $\varphi_s = \varphi_t = \varphi = 39$.

2. Побудувати максимальний потік у мережі, коли відома пропускна здатність кожної дуги.



Відповідь: $\varphi_s = \varphi_t = \varphi = 31$.

Контрольні питання

1. Що називають транспортною мережею?
2. Що називають пропускною здатністю дуги?
3. Що називають потоком, які умови існування потоку?
4. Який потік називають насиченим?
5. Які дуги називають допустимими?
6. Які дуги називають дугами збільшення?
7. Які дуги називають дугами зменшення?
8. Який ланцюг називають ланцюгом збільшення?

9. Як визначають величину, на яку можна збільшити або зменшити величину потоку?
10. У якому випадку не можна побудувати ланцюг збільшення?

САМОСТІЙНА РОБОТА № 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

Ігри з природою

Теоретичні відомості

Специфічним видом ігор є так звані *статистичні ігри*. В них один з гравців є нейтральним, тобто не створює активної протидії супротивнику, але може діяти за будь-якою своєю стратегією. Такого гравця називають обставинами, природою тощо. Тому такі ігри називають також *іграми з природою* або іграми *"людина — природа"*. Інший гравець змушений діяти в умовах невизначеності, оскільки не має повної інформації про поведінку природи. Гравця-людину називають *статистиком*, звідси і назва "статистичні ігри".

Основні поняття

Ігри з природою — це такий вид ігор, в яких процес прийняття рішень має відбуватися в умовах певної невизначеності, але без активної цілеспрямованої протидії та певної байдужості як до умов, так і до наслідків процесу, тобто в умовах природної невизначеності.

Розглянемо деякі особливості побудови моделі гри "людина — природа". Приймаючи рішення, гравець-людина (надалі — "людина") може скористатися своїми стратегіями $A_1, A_2, ..., A_m$. Вплив гравця-природи (надалі — "природа") на досліджуваний процес може характеризуватися певними станами природи $P_1, P_2, ..., P_n$, які можна розглядати як відповідні стратегії природи $P_1, P_2, ..., P_n$.

Якщо є можливість оцінити наслідки використання будь-якої чистої стратегії людини $A_i \,(i = 1,2,3,...m)$ залежно від будь-якого довільного стану природи, тобто для кожної пари (A_i, P_j) існує число a_{ij}, так званий виграш, то гру з природою можна розглядати як матричну гру з платіжною матрицею гри $A = (a_{ij})$. Нехай імовірність настання того чи іншого стану — імовірність використання відповідної стратегії $P_1, P_2, ..., P_n$ вважається відомою і характеризується числами $p_1, p_2, ..., p_n$, такими що $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, ($p_j \geq 0$).

Табличний вигляд такої гри подано наведеною таблицею.

P_j \ A_i	P_1	P_2		P_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...	...	...	...	...
A_m	a_{1n}	a_{2n}	...	a_{mn}
p_j	p_1	p_2	...	p_n

Розв'язком ігор з природою є оптимальні стратегії людини (або чисті, або змішані). Якщо відомі імовірності станів природи, то розв'язком гри завжди будуть чисті стратегії людини.

Перш ніж розв'язувати таку гру, необхідно проаналізувати платіжну матрицю гри та спростити її, відхиливши неефективні ("невигідні") стратегії людини. Відхиляти стратегії (стани) природи недопустимо, оскільки природа може перебувати у своєму довільному стані.

Примітка. Неефективною ("невигідною") стратегією людини вва -жається така стратегія, всі елементи ("виграші") якої не більші (менші або рівні) за відповідні елементи іншої стратегії. Тобто для довільних стратегій A_k і A_l, якщо $a_{kj} \le a_{lj}$ (для всіх $j = 1, 2, ..., n$), A_k є неефективною стратегією.

Методи розв'язування ігор з природою

Розглянемо методи розв'язування ігор з природою у випадках, коли є деяка інформація про імовірності станів природи.

Імовірності станів природи $p_1, p_2, ..., p_n$ можуть бути визначені із статистичних даних або із спостережень за станами природи і мати конкретні числові значення. Але досить часто таких даних не існує. Тоді можна скористатися одним із підходів:

- вважати, що всі стани природи мають однакову імовірність, у цьому випадку $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1/n$;
- призначити імовірності станів природи пропорційними членами спадної арифметичної прогресії: $p_1 : p_2 : ... : p_n = n : (n-1) : ... : 1$,

  або, враховуючи , що $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, $p_j = 2(n-j+1)/(n(n+1))$, де $j = 1, 2, ..., n$;
- скористатися оцінкою імовірностей, яку дадуть експерти.

Метод математичного сподівання виграшу. За цим методом за критерій ефективності стратегії A_i приймають математичне сподівання a_i виграшу за умови використання i-ї стратегії, тобто:

$$a_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + ... + a_{in}p_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_j,$$

де $p_j,\ j = 1,2,...,n$ — ймовірності можливих станів природи $P_1, P_2,..., P_n$.

За оптимальну стратегію людини обирають стратегію, для якої величина математичного сподівання виграшу a_i набуває найбільшого значення.

Література [7; 9; 26]

Приклад 1

Планується проведення розважального заходу на відкритій місцевості. На вибір запропоновано три майданчики: A_1, A_2, A_3. Можна виділити чотири можливих стани метеорологічних умов (B_1 — дощ, B_2 — похмуро, B_3 — ясно, B_4 — хмарно), про які з попередніх спостережень відомі імовірності їх настання: p_1 = 0,1; p_2 = 0,2; p_3 = 0,5; p_4 = 0,2.

Можливі варіанти проведення програми на різних майданчиках за різних метеорологічних умов дають різний прибуток. Значення прибутку у кожному окремому випадку, а також імовірності станів природи наведено в таблиці.

P \ A	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	–2	2	5	4
A_2	2	5	8	7
A_3	4	8	6	7
p_j	0,1	0,2	0,5	0,2

Знайдемо математичне сподівання прибутку на кожному майданчику:

$a_1 = -2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2 = -0,2 + 0,4 + 2,5 + 0,8 = 3,5;$
$a_2 = 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,2 = 0,2 + 1,0 + 4,0 + 1,4 = 6,6;$
$a_3 = 4 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,2 = 0,4 + 1,6 + 3,0 + 1,4 = 6,4.$

P \ A	P_1	P_2	P_3	P_4	a_i
A_1	–2	2	5	4	3,5
A_2	2	5	8	7	6,6
A_3	4	8	6	7	6,4
p_j	0,1	0,2	0,5	0,2	

Обчислення показують, що очікуваний прибуток (за будь-яких умов) буде найбільшим (a_2 = 6,6) тоді, коли захід проводитиметься на майданчику A_2.

Метод ризиків. За цим методом для знаходження оптимальної стратегії людини використовують так звану *матрицю ризиків* $R = (r_{ij})$, яка дає змогу більш чітко виявити переваги певної стратегії за певного можливого стану природи.

Ризиком r_{ij}, який відповідає чистій стратегії A_i за умови стану природи P_j, називають різницю між максимальним виграшем $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$, який можна було б отримати, якби природа була у стані P_j, та виграшем a_{sj}, що відповідає виграшу за умови стратегії A_i за стану природи P_j.

Таким чином, елементи r_{ij} матриці $R = (r_{ij})$ обчислюються за формулою:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \ \ (i = 1,2,...,m; \ j = 1,2,...,n \ ),$$

де $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ — максимально можливий виграш за умови стану природи P_j, тобто максимальний елемент j*-го* стовпця платіжної матриці $A = (a_{ij})$.

За оптимальну стратегію людини за методом ризиків обирають стратегію, для якої величина математичного сподівання ризику r_i набуває найменшого значення.

Приклад 2

Розв’яжемо задачу з попереднього прикладу за допомогою методу ризиків.

Складемо матрицю ризиків. Для цього спочатку визначимо $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ ($i = 1, 2,...,m; \ j = 1, 2,...,n$).

$A \backslash P$	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	–2	2	5	4
A_2	2	5	8	7
A_3	4	8	6	7
p_j	0,1	0,2	0,5	0,2
β_j	4	8	8	7

Матриця ризиків матиме вигляд:

$A \backslash P$	P_1	P_2	P_3	P_4	r_i
A_1	6	6	3	3	3,9
A_2	2	3	0	0	0,8
A_3	0	0	2	0	1,0
p_j	0,1	0,2	0,5	0,2	

Обчислимо математичне сподівання ризику для кожної стратегії A_i:

$r_1 = 6 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 + 1{,}2 + 1{,}5 + 0{,}6 = 3{,}9;$

$r_2 = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 + 0{,}6 + 0 + 0 = 0{,}8;$

$r_3 = 0 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}2 = 0 + 0 + 1{,}0 + 0 = 1{,}0.$

Величина ризику буде найменшою за вибору стратегії A_2. Отже, оптимальною стратегією буде стратегія A_2.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Транспортне підприємство з перевезення пасажирів може запропонувати чотири типи автобусів (A_1, A_2, A_3, A_4) залежно від варіанта екскурсії (B_1, B_2, B_3, B_4). Імовірність замовлення кожного типу екскурсії відома і дорівнює відповідно 0,2, 0,1, 0,4, 0,3. Значення прибутку підприємства при використанні кожного типу автобусу для кожного варіанта екскурсії відомо (наведено в таблиці).

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	10	18	25
A_2	8	7	8	23
A_3	21	18	12	21
A_4	30	22	19	15
p_j	0,2	0,1	0,4	0,3

Знайти оптимальний вибір автобуса для проведення екскурсій. Розв'язати задачу, скориставшись методом математичного сподівання виграшу і методом ризиків.

Відповідь: A_4.

2. Розв'язати гру з природою, для якої відома платіжна матриця та імовірності станів природи, скориставшись методом математичного сподівання виграшу і методом ризиків. Умову задачі наведено в таблиці.

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	4	6	3
A_2	8	–3	5	3
A_3	4	1	2	5
p_j	0,2	0,1	0,4	0,3

Відповідь: A_2.

Контрольні питання

1. Які ігри називають іграми з природою?
2. У чому полягає розв'язування ігор з природою?
3. Які існують методи розв'язування ігор з природою?
4. Що називають ризиком?
5. Як складається матриця ризиків?
6. Що характеризує матриця ризиків?

7. У чому полягає метод математичного сподівання виграшу?
8. У чому полягає метод ризиків?

САМОСТІЙНА РОБОТА № 3. СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ (СМО)

СМО з відмовами, СМО з очікуваннями

Теоретичні відомості

СМО з відмовами

СМО з відмовами — це такі СМО, в яких замовлення, що надійшло в систему тоді, коли всі канали обслуговування зайняті, отримує відмову і залишає СМО без обслуговування.

Показники ефективності СМО з відмовами

- A — *абсолютна пропускна здатність СМО*, тобто середня кількість каналів, які обслуговуються за одиницю часу;
- Q — *відносна пропускна здатність СМО*, тобто середня частка замовлень, які надійшли в систему і обслуговуються;
- $P_{\text{відм}}$ — *імовірність відмови*, тобто того, що замовлення залишить систему без обслуговування;
- $\bar{k}$ — *середня кількість зайнятих каналів* (для багатоканальної системи).

Показники ефективності СМО з відмовами

Показник	Одноканальні СМО	Багатоканальні СМО
Граничні імовірності	$p_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$	$p_0 = \left[1 + \dfrac{\rho}{1!} + \ldots + \dfrac{\rho^k}{k!} + \ldots + \dfrac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$
	$p_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$	$p_1 = \dfrac{\rho}{1!} p_0,\ p_2 = \dfrac{\rho^2}{2!} p_0, \ldots,\ p_k = \dfrac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots,$ $p_n = \dfrac{\rho^n}{n!} p_0$.
Імовірність відмови	$P_{\text{відм.}} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$	$P_{\text{відм.}} = \dfrac{\rho^n}{n!} p_0$
Відносна пропускна здатність	$Q = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$	$Q = 1 - P_{\text{відм.}} = 1 - \dfrac{\rho^n}{n!} p_0$
Абсолютна пропускна здатність	$A = \lambda Q = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$	$A = \lambda Q = \lambda(1 - \dfrac{\rho^n}{n!} p_0)$

Середня кількість зайнятих каналів	–	$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k\, p_k$ $\bar{k} = \dfrac{A}{\mu}$ або $\bar{k} = \rho(1 - \dfrac{\rho^n}{n!} p_0)$

У таблиці використовуються такі змінні:

λ – інтенсивність потоку замовлень;

$\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$ — інтенсивність потоку обслуговування;

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ — інтенсивність завантаженості каналу, яка показує середню кількість замовлень, які надходять до системи за середній час обслуговування одного замовлення.

Література [4; 7; 9; 14]

Приклад 1

Нехай у гуртожитку є один телефон, який приймає міжміські дзвінки. Відомо, що замовлення на телефонні розмови надходять з інтенсивністю 90 замовлень за годину, а середня тривалість розмови становить 2 хвилини. Визначити показники ефективності роботи СМО — телефонного міжміського зв'язку в гуртожитку.

З умови задачі зрозуміло, що ця СМО — одноканальна СМО з відмовами.

За умовою задачі відомо:

- інтенсивність потоку замовлень: $\lambda = 90$ (1/год);
- середній час обслуговування одного замовлення $\bar{t}_{обсл} = 2$ хвилини.

Для знаходження показників ефективності СМО спочатку визначимо інтенсивність потоку обслуговування:

$\mu = 1/\bar{t}_{обсл} = 1/2 = 0{,}5\,(1/хв) = 30\,(1/год)$

Відносна пропускна здатність:

$Q = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} = \dfrac{30}{90+30} = \dfrac{30}{120} = 0{,}25 = 25\%$, тобто за годину надійде 25% міжміських дзвінків і розмова відбудеться.

Імовірність відмови: $P_{відм.} = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu} = \dfrac{90}{90+30} = \dfrac{90}{120} = 0{,}75 = 75\%$

або $P_{\text{відм.}} = 1 - Q = 1 - 25\% = 75\%$.

Абсолютна пропускна здатність: $A = \lambda Q = 90 \cdot 0{,}25 = 22{,}5$, тобто в середньому за годину буде прийнято 22,5 замовлення.

Приклад 2

Розв'язати задачу з попереднього прикладу, якщо кількість телефонних номерів для міжміських дзвінків буде 3.

У цьому прикладі маємо справу з багатоканальною СМО, причому кількість каналів $n = 3$.

Для знаходження показників ефективності СМО спочатку визначимо інтенсивність завантаженості каналу: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{90}{30} = 3$.

$p_0 = \left[1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + \dfrac{\rho^3}{3!}\right]^{-1} = \left[1 + 3 + \dfrac{3^2}{2!} + \dfrac{3^3}{3!}\right]^{-1} = 0{,}0769 = 7{,}7\%$, тобто 7,7% часу в системі не має жодного замовлення — всі номери вільні.

$p_1 = \dfrac{\rho}{1!} p_0 = 3 \cdot 0{,}0769 = 0{,}230 = 23{,}0\%$, тобто 23,0% часу в системі є одне замовлення — зайнятий один номер;

$p_2 = \dfrac{\rho^2}{2!} p_0 = \dfrac{3^2}{2!} \cdot 0{,}0769 = 0{,}346 = 34{,}6\%$, тобто 34,6% часу в системі є два замовлення — зайнято два номери;

$p_3 = \dfrac{\rho^3}{3!} p_0 = \dfrac{3^3}{3!} \cdot 0{,}0769 = 0{,}346 = 34{,}6\%$, тобто 34,6% часу в системі є три замовлення — зайняті всі три номери.

$P_{\text{відм.}} = \dfrac{\rho^n}{n!} p_0 = \dfrac{3^3}{3!} \cdot 0{,}0769 = 0{,}346 = 34{,}6\%$, тобто ймовірність того, що всі три номери зайняті.

$Q = 1 - P_{\text{відм.}} = 1 - 0{,}346 = 0{,}654 = 65{,}4\%$, тобто в середньому обслуговується 65,4% замовлень (65,4 замовлення із 100).

$A = \lambda Q = 90 \cdot 0{,}654 = 58{,}86$, тобто за одиницю часу (за годину) обслуговується в середньому 58,86 замовлень.

$\bar{k} = \dfrac{A}{\mu} = \dfrac{58{,}86}{30} = 1{,}96$, тобто в середньому кожен телефонний номер буде зайнятий обслуговуванням на 1,96/3 = 0,653 = 65,3%.

СМО з очікуваннями

СМО з очікуваннями — це такі СМО, в яких замовлення, що надійшло в систему в той час, коли всі канали обслуговування зайняті, стає у чергу і очікує моменту, коли вивільниться канал обслуговування.

Показники ефективності СМО з очікуваннями

- A — *абсолютна пропускна здатність СМО*, тобто середня кількість каналів, які обслуговуються за одиницю часу;
- Q — *відносна пропускна здатність СМО*, тобто середня частка замовлень, які надійшли в систему і обслуговуються;
- $P_{відм}$ — *імовірність відмови*, тобто того, що замовлення залишить систему без обслуговування;
- $\bar{k}$ — *середня кількість зайнятих каналів* (для багатоканальної системи).
- $L_{сист.}$ — *середня кількість замовлень у системі*;
- $T_{сист.}$ — *середній час перебування замовлення в системі.*
- $L_{черги.}$ — *середня кількість замовлень у черзі,* тобто довжина черги;
- $T_{черги.}$ — *середній час перебування замовлення в черзі*;
- $L_{обслуг.}$ — *середня кількість замовлень в обслуговуванні,* тобто середня кількість зайнятих каналів;
- $P_{зайн.}$ — *імовірність того, що канал зайнятий,* тобто ступінь завантаженості каналу.

Показники ефективності СМО з очікуванням з необмеженою чергою

Показник	Одноканальні СМО	Багатоканальні СМО
1	2	3
Граничні імовірності	$p_0=\left[1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\ldots\right]^{-1}=$ $=\left(1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^k+\ldots\right)^{-1}$ при $\rho<1$ $p_0=1-\rho$ $p_1=\rho\cdot p_0=\rho(1-\rho)$, $p_2=\rho^2\cdot p_0=\rho^2(1-\rho)$, $p_k=\rho^k\cdot p_0=\rho^k(1-\rho)$	$p_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!\cdot(n-\rho)}\right]^{-1}$ $p_1=\frac{\rho}{1!}p_0$, ..., $p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0$, ..., $p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0$, $p_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}p_0$, ..., $p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}p_0$

1	2	3
Середня кількість замовлень в системі	$L_{\text{сист.}} = L_{\text{черги}} + L_{\text{обслуг.}}$ $L_{\text{сист.}} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = (1-\rho) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^k$ $L_{\text{сист.}} = \frac{\rho}{1-\rho}$ при $\rho < 1$	$L_{\text{сист.}} = L_{\text{черги}} + \bar{k}$ $L_{\text{сист.}} = L_{\text{черги}} + \rho$
Середня кількість замовлень в обслуго-вуванні	$L_{\text{обсл.}} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = (1 - p_0)$ $L_{\text{обсл.}} = P_{\text{зайн.}} = \rho$	$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$
Імовір-ність того, що канал(и) зайнятий	$P_{\text{зайн.}} = (1 - p_0) = \rho$	$P_{\text{зайн.}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n! \cdot (n - \rho)}$
Середня кількість замовлень у черзі	$L_{\text{черги}} = L_{\text{сист.}} - L_{\text{обсл.}}$ $L_{\text{черги}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$	$L_{\text{черги}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$
Імовір-ність відмови	$P_{\text{відм.}} = 0$	
Відносна пропускна здатність	$Q = 1 - P_{\text{відм.}} = 1$	
Абсо-лютна пропускна здатність	$A = \lambda Q = \lambda$	
Середній час пере-бування замов-лення в системі	$T_{\text{сист.}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{сист.}}$ $T_{\text{сист.}} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)}$	$T_{\text{сист.}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{сист.}}$
Середній час пере-бування замовлен-ня в черзі	$T_{\text{черги}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{черги}}$ $T_{\text{черги}} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)}$	$T_{\text{черги}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{черги}}$

У таблиці використовуються такі змінні:

λ – інтенсивність потоку замовлень;

$\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл.}}$ — інтенсивність потоку обслуговування;

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ — інтенсивність завантаженості каналу, причому, якщо $\rho < 1$, то граничні імовірності існують, якщо $\rho \geq 1$, то черга збільшується до нескінченності (для одноканальних СМО); якщо $\rho / n < 1$, то граничні імовірності існують, якщо $\rho / n \geq 1$, то черга збільшується до нескінченності (для багатоканальних СМО).

Приклад 3

У майстерні з виготовлення ключів працює один майстер. Інтенсивність потоку замовлень становить 0,4 замовлення за хвилину. Середній час виготовлення одного ключа становить 2 хвилини. Вважається, що черга може бути необмеженої довжини. Визначити показники ефективності роботи майстерні, а також імовірність того, що на виготовлення ключів чекають не більше ніж 2 замовлення.

З умови задачі зрозуміло, що ця СМО — одноканальна СМО з очікуваннями.

За умовою задачі відомо:

- інтенсивність потоку замовлень: $\lambda = 0{,}4$ (1/хв);
- середній час обслуговування одного замовлення $\bar{t}_{\text{обсл.}} = 2$ хв.

Для знаходження показників ефективності СМО спочатку визначимо:

- інтенсивність потоку обслуговування:

$\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл.}} = 1/2 = 0{,}5$ (1/хв);

- інтенсивність завантаженості каналу: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8 < 1$, отже черга на виготовлення ключів не може нескінченно збільшуватися.

Імовірність того, що канал обслуговування зайнятий $P_{\text{зайн.}} = \rho = 0{,}8$.

$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ — імовірність того, що в системі знаходиться 0 замовлень, тобто канал обслуговування вільний.

$p_1 = \rho \cdot p_0 = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$ — імовірність того, що в системі перебуває 1 замовлення, яке обслуговується, тобто в черзі немає жодного замовлення.

$p_2 = \rho^2 \cdot p_0 = \rho \cdot p_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}16 = 0{,}128$ — імовірність того, що в системі перебувають 2 замовлення, тобто одне замовлення обслуговується, а одне чекає в черзі.

$p_3 = \rho^3 \cdot p_0 = \rho \cdot p_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}128 = 0{,}1024$ — імовірність того, що в системі перебуває 3 замовлення, тобто одне замовлення обслуговується, а два чекають в черзі.

Імовірність того, що в черзі чекають не більше ніж 2 замовлення: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}16 + 0{,}128 + 0{,}1024 = 0{,}3904$.

Довжина черги: $L_{\text{черги}} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{0{,}8^2}{1-0{,}8} = \dfrac{0{,}64}{0{,}2} = 3{,}2$.

Середній час перебування замовлення в черзі:

$$T_{\text{черги}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{черги}} = \frac{1}{0{,}4} \cdot 3{,}2 = 8 \text{ (хв)}.$$

Аналогічно розраховуються решта показників ефективності.

Приклад 4

Розв'язати задачу з попереднього прикладу, вважаючи, що в майстерні працюють 2 майстри, $\lambda = 0{,}8$ (1/хв), $\bar{t}_{\text{обсл.}} = 3$ хв. Встановити, яку кількість майстрів необхідно мати, щоб черга не збільшувалася до нескінченності. Визначити показники ефективності роботи майстерні для встановленої кількості майстрів.

З умови задачі зрозуміло, що ця СМО — багатоканальна СМО з очікуваннями, причому $n=2$.

Визначимо:

- інтенсивність потоку обслуговування:

$\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл.}} = 1/3 = 0{,}33$ (1/хв);

- інтенсивність завантаженості каналу: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0{,}8}{0{,}33} = 2{,}42$.

Черга не збільшуватиметься нескінченно, якщо $\rho/n < 1$, тобто $\rho < n$, або краще записати, що $n > \rho = 2{,}42$. Отже, при $n = 3$ черга не збільшуватиметься нескінченно.

Визначимо показники ефективності роботи майстерні при $n = 3$.

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\cdot(n-\rho)}\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + 2{,}42 + \frac{2{,}42^2}{2!} + \frac{2{,}42^3}{3!} + \frac{2{,}42^4}{3!\cdot(3-2{,}42)}\right]^{-1} = 0{,}054$$

— імовірність того, що замовники відсутні.

Імовірність того, що в майстерні існує черга, тобто всі канали зайняті: $P_{\text{зайн.}} = \dfrac{\rho^{n+1} p_0}{n!\cdot(n-\rho)} = \dfrac{2{,}42^4}{3!(3-2{,}42)}\cdot 0{,}054 = 0{,}53 = 53\%$.

Аналогічно розраховуються решта показників ефективності.

Показники ефективності СМО з очікуванням з обмеженою чергою

Показник	**Одноканальні СМО**	**Багатоканальні СМО**
1	2	3
Граничні імовірності	$p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$ $p_1 = \rho\cdot p_0$, $p_2 = \rho^2\cdot p_0$, ... $p_k = \rho^k\cdot p_0$	$p_0 = \left[1 + \dfrac{\rho}{1!} + ... + \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^{n+1}(1-\rho/n)^m}{n\cdot n!\cdot(1-\rho/n)}\right]^{-1}$ $p_1 = \dfrac{\rho}{1!}p_0$, ..., $p_k = \dfrac{\rho^k}{k!}p_0$, ..., $p_n = \dfrac{\rho^n}{n!}p_0$, $p_{n+1} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}p_0$, ..., $p_{n+r} = \dfrac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}p_0$ $(r = 1, ..., m)$
Імовірність відмови	$P_{\text{відм.}} = P_{m+1} = \rho^{m+1}p_0$	$P_{\text{відм.}} = P_{n+m} = \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0$
Відносна пропускна здатність	$Q = 1 - P_{\text{відм.}} = 1 - \rho^{m+1}p_0$	$Q = 1 - P_{\text{відм.}} = 1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0$
Абсолютна пропускна здатність	$A = \lambda Q = \lambda(1 - \rho^{m+1}p_0)$	$A = \lambda Q = \lambda(1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0)$
Середня кількість замовлень у черзі	$L_{\text{черги}} =$ $= \dfrac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-mp)\right]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}$	$L_{\text{черги}} = \dfrac{\rho^{n+1}p_0\left[1-\left(m+1-m\dfrac{\rho}{n}\right)\cdot\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^m\right]}{n\cdot n!\cdot\left(1-\dfrac{\rho}{n}\right)^2}$

1	2	3
Середня кількість замовлень на обслуговування (середня кількість зайнятих каналів)	$L_{\text{обсл.}} = 1 - p_0$	$\bar{k} = \rho\left(1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$
Середня кількість замовлень у системі	$L_{\text{сист.}} = L_{\text{черги}} + L_{\text{обсл.}}$	$L_{\text{сист.}} = L_{\text{черги}} + \bar{k}$

У таблиці використовуються такі змінні:

m — максимальна кількість замовлень, що можуть перебувати в черзі;

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ — інтенсивність завантаженості каналу;

λ – інтенсивність потоку замовлень;

$\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл.}}$ — інтенсивність потоку обслуговування.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Розглядається цілодобова робота пункту технічного огляду автомобілів з одним каналом обслуговування. На огляд одного автомобіля в середньому витрачається 0,5 год. На огляді в середньому за добу перебуває 36 автомобілів. Потік замовлень на обслуговування — найпростіший. Нехай автомобіль, що прибув до пункту технічного обслуговування у той час, коли канал обслуговування зайнятий, залишає пункт огляду без обслуговування. Визначити імовірнісні стани і характеристики пункту технічного обслуговування.

Відповідь: $Q = 0{,}053$; $P_{\text{відм.}} = 0{,}947$; $A = 1{,}9$.

2. Розв'язати попередню задачу, коли $n = 4$.

Відповідь: $P_{\text{відм.}} = 0{,}79$; $Q = 0{,}21$; $A = 7{,}6$, $\bar{k} = 3{,}78$.

3. На залізничному вокзалі є один кран для розвантажування потягів. Інтенсивність потоку товарних потягів становить 0,3 за добу. Середній час розвантажування одного потягу становить 2 доби. Вважається, що черга може бути необмеженої довжини. Визначити показники ефективності роботи крана, а також імовірність того, що на розвантажування чекають не більше ніж 3 потяги.

Відповідь: $P_{\text{зайн.}} = 0{,}6$; $L_{\text{черги}} = 0{,}9$; $T_{\text{черги}} = 3$; $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}52$.

4. Розв'язати попередню задачу, вважаючи, що інтенсивність потоку товарних потягів становить 0,6 за добу.

Відповідь: $\rho = \frac{6}{5} > 1$, тому граничні імовірності не існують — черга збільшуватиметься до нескінченності.

4. Розв'язати задачу 3, вважаючи, що є 2 крани для розвантаження.

Відповідь: $P_{\text{зайн.}} = 0{,}77$; $L_{\text{черги}} = 0{,}007$; $T_{\text{черги}} = 0{,}023$;

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0{,}32$.

Контрольні питання

1. Які СМО називаються СМО з відмовами?
2. Які СМО називаються СМО з очікуваннями?
3. Які існують показники ефективності СМО з відмовами?
4. Які існують показники ефективності СМО з очікуваннями?

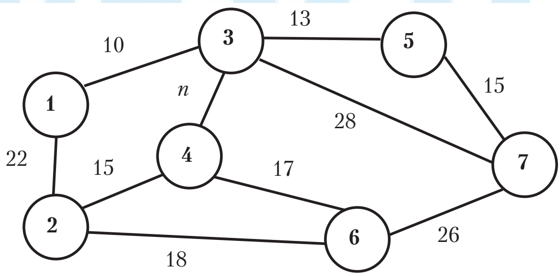
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗУВАННЯ

При розв'язуванні завдань замість *n* підставити останню цифру залікової книжки.

Завдання 1. Необхідно побудувати найдешевше сполучення між пунктами A, B, C, D, E, якщо відома вартість побудови сполучення між кожною парою пунктів. Встановити, яким повинно бути найдешевше сполучення між пунктами і визначити його вартість.

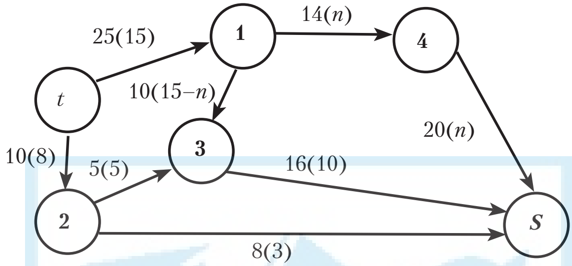
	A	B	C	D	E
A	–	9	5	6	3
B	9	–	4	8	9
C	5	4	–	5	7
D	6	8	5	–	*n*
E	3	9	7	*n*	–

Завдання 2. Знайти найкоротший шлях з вершини 1 у вершину 7.

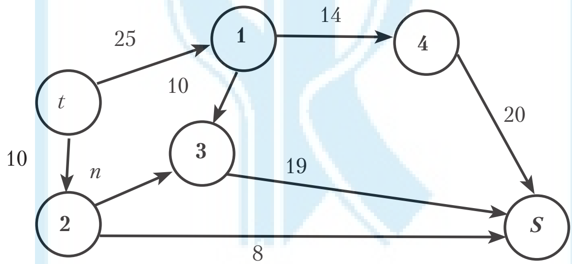


Завдання 3. Побудувати максимальний потік у мережі, якщо відома пропускна здатність і потік кожної ланки.

Спочатку перевірити, чи правильно розподілено потік у мережі. За необхідності виправити початкові значення потоку (цифри у дужках).



Завдання 4. Побудувати максимальний потік у мережі, якщо відома пропускна здатність кожної ланки, а потік невідомий.



Завдання 5. Побудувати мережний графік процесу, впорядкувати його. Визначити часові параметри робіт. Зробити висновки.

Потрібно спроектувати і виготовити меблі на замовлення.

Перелік подій і терміни виконання робіт наведено в табл. 1 і 2.

Таблиця 1

Шифр події	Опис події	Події, які безпосередньо передують
1	Зробити замовлення	
2	Зробити ескіз	1
3	Зробити креслення	2
4	Визначити розміри	1
5	Підібрати матеріал	2,4
6	Виготовлення меблів	3,5

Таблиця 2

Шифр роботи	Тривалість роботи
1,2	3
1,4	2
2,3	5
2,5	0
3,6	n
4,5	6
5,6	0

Завдання 6. Скласти динамічну модель задачі і розв'язати її методом динамічного програмування.

Підприємство планує випуск продукції на 3 місяці ($l = 3$). Запланована (ідеальна) кількість випущеної продукції m_k має становити в 1-й місяць — 1 тис. шт., у 2-й — 2 тис. шт., у 3-й — 1 тис. шт. Коли реальна кількість випущеної продукції не збігається з ідеальною ($m_k \neq x_k$), то підприємство має додаткові виробничі витрати. Якщо кількість випущеної продукції перевищує заплановану кількість, витрати на її зберігання становитимуть 20 тис у. о. на кожну тисячу товару. Якщо кількість випущеної продукції недостатня, то недовиконання плану зумовлює витрати 30 тис. у. о. на кожну тисячу товару. Функція виробничих витрат $g(m_k - x_k)$, причому $g(0) = 0$.

Підприємство щомісяця може змінювати кількість випущеної продукції. Витрати на збільшення обсягу випущеної продукції при переході до наступного місяця становлять 10 тис. у. о. на кожну тисячу продукції, а витрати на скорочення виробництва становлять n тис. у. о. на кожну тисячу продукції. Функція витрат на збільшення-зменшення випуску продукції $f(x_k - x_{k-1})$, причому $f(0) = 0$.

Потрібно визначити таку кількість продукції в кожному з k місяців ($k = \overline{1,l}$), при якій сума всіх витрат за весь період буде мінімальною.

Нехай перед початком робіт реальна кількість працівників становила $x_0 = 2$.

Завдання 7. Скласти матрицю гри, яка має сідлову точку. Придумати текстову інтерпретацію, наприклад, виробник-покупець, футбол, гра на гроші тощо.

Завдання 8. Розв'язати матричну гру.

Підприємство випускає 3 види продукції А1, А2, А3, одержуючи прибуток залежно від попиту П1, П2, який визначається регіоном. Матриця виграшів містить прибуток підприємства за умови випуску *i*-ї продукції при *j*-му попиті. Проаналізувати платіжну матрицю гри. Розв'язати гру в мішаних стратегіях (з поясненнями). Зробити висновки.

Підприємство	Регіон	
	П1	П2
А1	5	2
А2	2	1
А3	3	$4n$

Завдання 9. Розв'язати гру з природою методом математичного сподівання виграшу і методом ризиків.

Планується засіяти 3 види зернових культур (К1, К2, К3). Відома урожайність кожного виду за умови природних умов П1 (сухо), П2 (вологo). Треба забезпечити найбільш можливий максимальний урожай у найгірших природних умовах, якщо відомі імовірності настання відповідних природних умов.

Зернова культура	Природні умови	
	П1	П2
К1	1	$3n$
К2	3	2
К3	2	1
Імовірності природних умов	0,6	0,4

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Барвінський А. Ф., Олексів І. Я., Крупка З. І.* Математичне програмування: Навч. посіб. — Львів, 2004. — 448 с.
2. *Жильцов О. Б., Кулян В. Р., Юнькова О. О.* Математичне програмуванння (з елементами інформаційних технологій): Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. — К.: МАУП, 2006. — 184 с.
3. *Зайченко Ю. П.* Дослідження операцій. — К.: ЗАТ "ВІТОЛ", 2000. — 668 с.

4. *Исследование* операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко и др.; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2002. — 407 с.
5. *Конюховский П. В.* Математические методы исследования операций в экономике. — СПб.: Питер, 2002. — 208 с. — (Сер. "Краткий курс").
6. *Костевич Л. С.* Математическое программирование. Информационные технологии оптимальных решений: Учеб. пособие. — Минск, 2003. — 424 с.
7. *Кутковецький В. Я.* Дослідження операцій: Навч. посіб. — К., 2005. — 264 с.
8. *Хэмди А. Таха.* Введение в исследование операций. — 6-е изд.: Пер. с англ. — М.: Изд. дом "Вильямс", 2001. — 912 с.
9. *Волошин Г. Я.* Методы оптимизации в экономике: Учеб. пособие. — М.: Дело и Сервис, 2004. — 320 с.

Додаткова

10. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1986.
11. *Вагнер Г.* Основы исследования операций: В 3 т. — М.: Мир, 1973. — 246 с.
12. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М.: Сов. радио, 1972. — 552 с.
13. *Вильямс Н. Н.* Параметрическое программирование в экономике. — М.: Статистика, 1976.
14. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966. — 524 с.
15. *Давыдов Э. Г.* Исследование операций: Учеб. пособие для студ. вузов. — М., 1990.
16. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 240 с.
17. *Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюптя В. И.* Математические методы исследования операций: Учеб. пособие для вузов. — К., 1979.
18. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике. — М.: ДИС, 1997. — 368 с.
19. *Исследование* операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Эмалграби. — М.: Мир, 1981. — Т. 1–2.
20. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. — М.: Наука, 1975. — 256 с.

21. *Кудрявцев Е. М.* Исследование операций в задачах, алгоритмах, программах. — М.: Радио и связь, 1984. — 184 с.
22. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. — М., 1976. — 352 с.
23. *Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З.* Линейное и нелинейное программирование. — К.: Выща шк., 1975. — 372 с.
24. *Математика* в экономике: Учеб.-метод. пособие для вузов /Под ред. проф. Н. Ш. Кремера / ВЗФЭИ. — М.: Финстатинформ, 1999. — 94 с.
25. *Математическое* программирование / Ю. Н. Кузнецов и др. — М.: Высш. шк., 1980.
26. *Оуэн Г.* Теория игр. — М.: Мир, 1971. — 230 с.
27. *Плис А. И., Сливина Н. А.* MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 1999. — 656 с.
28. *Попов Ю. Д.* Линейное и нелинейное программирование: Учеб. пособие. — К.: Изд-во КГУ, 1988. — 189 с.
29. *Романюк Т. П., Терещенко Т. О., Присенко Г. В., Городкова І. М.* Математичне програмування. — К., 1996. — 312 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *М. В. Дроздецька*
Комп'ютерне верстання *К. П. Махиня*

Зам. № ВКЦ-3603

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП