МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

“МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ”

(для бакалаврів)

Київ 2008

Підготовлено професором кафедри прикладної математики і програмування, доктором фізико-математичних наук *Р. М. Чернігою* та доцентом цієї кафедри кандидатом технічних наук *В. А. Дуткою*

Затверджено на засіданні кафедри інформатики та інформаційних технологій (протокол № 1 від 30.08.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Черніга Р. М., Дутка В. А. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Математичний аналіз” (для бакалаврів). — К.: МАУП, 2008. — 51 с.

Методична розробка містить пояснювальну записку, тематичний план, зразки розв’язання задач, матеріал для самостійного вивчення, питання для самоконтролю, задачі і приклади для самоконтролю, список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Метою курсу є опанування студентами знаннями, уміннями та навичками розв'язання задач математичного аналізу. Математичний аналіз — це фундаментальна математична дисципліна, яка вивчає основи теорії дійсних чисел, числові послідовності, числові функції, теорію границь, методи диференціального та інтегрального числення, інтеграли Рімана та інтеграли Стільт'єса, функціональні ряди, теорію функцій багатьох змінних, похідні вищих порядків, кратні інтеграли, криволінійні і поверхневі інтеграли, ряди та інтеграли Фур'є, а також окремі розділи функціонального аналізу — теорію вимірних функцій та інтеграла Лебеґа.

Для вивчення курсу необхідні знання з математики за програмою середньої школи.

У процесі навчання студенти здобувають знання і формують навички розв'язання основних задач математичного аналізу, які потрібні у подальшому вивченні математичних дисциплін за програмою підготовки бакалавра за спеціальністю "Прикладна математика", зокрема у вивченні:

- звичайних диференціальних рівнянь;
- теорії функції комплексної змінної;
- диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- методів математичного моделювання;
- математичної фізики;
- числові методи рівнянь математичної фізики;
- методів оптимізації;
- варіаційного числення;
- теорії оптимального керування;
- теорії ймовірностей та математичної статистики.

Для підсумкової перевірки засвоєних знань студенти складають залік і два іспити.

Самостійне вивчення окремих розділів тем з навчально-тематичного плану вивчення дисципліни "Математичний аналіз" є важливою передумовою успішного засвоєння цієї фундаментальної дисципліни математики. Загальновідомо, що лише постійне самостійне опрацювання матеріалу дає можливість якомога краще оволодіти такою сумою знань, умінь та навичок, які дали б змогу заявити про себе як про професіонала в майбутньому. Студент, який хоче якомога краще оволодіти професією, має добре розуміти: на занятті викладач подає основи знань, виокремлює ті наріжні камені дисципліни, які повинні пробуджувати потяг до поглиблення й удосконалення знань. Збагачення загальною сумою знань, накопичених людством, розширення загального світогляду, усвідомлення наявної перспективи щодо реалізації певних знань є основним мотивом для сумлінного ставлення до навчання. Самостійне опрацювання матеріалу студентом буде лише тоді результативним, коли воно ґрунтуватиметься на внутрішній потребі.

Згідно з державними стандартами навчальний матеріал дисципліни "Математичний аналіз", передбачений робочою навчальною програмою для засвоєння студентом у процесі самостійної роботи, виноситься на підсумковий контроль поряд з тим матеріалом, який опрацьовувався при проведенні лекцій та практичних занять. Самостійна робота студента над засвоєнням навчального матеріалу з конкретної дисципліни може виконуватися у бібліотеці вищого навчального закладу чи іншій бібліотеці науково-технічного спрямування, навчальних кабінетах, комп'ютерних класах (лабораторіях) та домашніх умовах. Самостійна робота студента повинна бути спланована, організаційно і методично спрямована як особиста творча праця без прямої взаємодії з викладачем. Час, відведений для самостійної роботи, регламентується робочою навчальною програмою і повинен становити значну частку від загального обсягу навчального часу студента, відведеного для вивчення дисципліни "Математичний аналіз". За необхідності ця робота виконується відповідно до заздалегідь складеного графіка, що гарантує можливість індивідуальних консультацій студента з викладачем чи використання персонального комп'ютера та доступу до відповідних баз даних. Слід наголосити, що уміння знаходити необхідний матеріал для самостійного вивчення окремих розділів тем цієї дисципліни в епоху тотальної інформатизації суспільства набуває важливого значення. Йдеться передусім про вміння студента користуватися пошуковими базами даних в Інтернеті, роботу з якими студент спеціальності "прикладна математика" засвоює під час вивчення відповідних дисциплін комп'ютерного спрямування.

Вивчення студентом матеріалу з курсу дисципліни "Математичний аналіз", винесеного на самостійне опрацювання, має здійснюватися в результаті:

- опрацювання конспектів лекцій та аналізу задач і прикладів, розв'язаних на практичних заняттях;

- опрацювання основної та додаткової літератури, список якої подано нижче;
- опрацювання окремих частин матеріалу за науковою і спеціальною літературою з використанням сучасних спеціалізованих пошукових систем в Інтернеті (наприклад, scholar.google.com, www.sciencedirect.com);
- розв’язання задач і прикладів, запропонованих як домашні завдання на практичних заняттях та сформульованих нижче як зразки;
- самотестування з використанням питань для самоконтролю, поданих нижче.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
дисципліни
“МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ”

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
1	2
	Змістовий модуль І. Множини, дійсні числа, послідовності та неперервні функції
1	Елементи загальної теорії множин. Множина дійсних чисел і дійсні функції на множині дійсних чисел
2	Послідовності, границі функції однієї дійсної змінної, неперервні функції
	Змістовий модуль ІІ. Диференціювання та інтегрування функції однієї дійсної змінної
3	Похідні та інтеграли. Інтеграл Рімана і його застосування. Похідні вищих порядків
	Змістовий модуль ІІІ. Збіжність рядів та інтегрування функцій обмеженої варіації
4	Числові і функціональні (степеневі) ряди та їх збіжність
5	Функції обмеженої варіації. Інтеграл Стільт’єса
	Змістовий модуль ІV. Метричні простори та диференціювання функцій кількох дійсних змінних
6	Елементи аналізу у метричних просторах. Функції багатьох змінних. Похідні від функцій багатьох змінних

1	2
7	**Змістовий модуль V. Інтегрування функцій кількох дійсних змінних** Кратні, криволінійні і поверхневі інтеграли та їх застосування
8 9	**Змістовий модуль VI. Ряди Фур’є та елементи функціонального аналізу** Ряди Фур’є. Інтеграл Фур’є Вимірні функції та інтеграл Лебеґа
Разом годин: 432	

МАТЕРІАЛ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ

Самостійне вивчення окремих частин тем з тематичного плану дисципліни “Математичний аналіз” є необхідною умовою успішного засвоєння основного матеріалу цієї дисципліни.

Лекційний матеріал призначається для опанування найважливішими поняттями, означеннями, теоремами з курсу дисципліни “Математичний аналіз”, а також їх застосуванням. У ньому акцентується увага на найбільш складних, вузлових питаннях цієї дисципліни. Матеріал для самостійного вивчення дасть змогу студентам як глибше засвоїти лекційний матеріал, так і навчитися розв’язувати найтиповіші задачі, необхідні для практичного застосування знань з цієї дисципліни та при вивченні інших дисциплін.

Матеріал з курсу “Математичний аналіз”, який може бути запропонований для самостійного вивчення, та зразки розв’язання задач подано нижче відповідно до тем з тематичного плану.

Тема 1. Елементи загальної теорії множин. Множина дійсних чисел і дійсні функції на множині дійсних чисел

Множини розв’язків рівняння з двома невідомими. Комп’ютерні засоби графічного відображення множини розв’язків рівняння з двома невідомими (інтегрувати з дисципліною “Програмування”). Змінні у часі функції та комп’ютерні алгоритми їх геометричного відображення.

Тема 2. Послідовності, границі функції однієї дійсної змінної, неперервні функції

Границя послідовності. Таблиця важливих границь послідовностей. Підпослідовність послідовності. Часткові границі послідовності. Точні верхня і нижня межі послідовності.

Границя функції. Границі зліва і границі справа. Неперервність функції на відрізку, яка задана параметрично. Головна частина функції відносно заданої шкали та поняття про асимптотичний розклад. Теорема Ваєрштрасса про наближення многочленами неперервної функції на відрізку.

Зразки розв'язання задач

1. Довести обмеженість послідовності $a_n = \dfrac{n}{2^n},\ n \geq 1$.

Розв'язання. Розглянемо кілька перших членів цієї послідовності: $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{3}{8}$, $a_4 = \dfrac{1}{4}$, $a_5 = \dfrac{5}{32}$, ... Легко помітити, що ця послідовність є монотонно спадною при $n > 1$. Доведемо це для загального випадку, тобто що $a_{n+1} < a_n$, $n > 1$. Маємо:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2n-(n+1)}{2^{n+1}} = \frac{n-1}{2^{n+1}} > 0,\ n > 1.$$

Таким чином, послідовність обмежена зверху числом $\dfrac{1}{2}$, а знизу — числом 0.

2. Довести обмеженість послідовності

$$a_n = \underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}}_{n-\text{коренів}},\ n \geq 1.$$

Розв'язання. Очевидно, що дана послідовність є монотонно зростаючою: $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_1$, ...,

$$a_{n+1} = \underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}}_{n+1-\text{коренів}} > \underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}}_{n-\text{коренів}} = a_n,\ \forall n > 1.$$

Таким чином, дана послідовність обмежена знизу числом $\sqrt{3}$. Покажемо, що ця послідовність є обмеженою зверху. Доведемо методом математичної індукції, що $a_n \leq 3\ \ \forall n \geq 1$.

1. Спочатку на першому кроці індукції при $n = 1$ і $n = 2$ маємо:

$$a_1 = \sqrt{3} \leq 3,\ \ a_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}} < \sqrt{5} < 3. \qquad (1)$$

2. На другому кроці індукції припустимо, що при деякому довільному $n = k > 2$ виконується нерівність $a_k \le 3$. Доведемо, що тоді також буде виконуватися нерівність $a_{k+1} \le 3$. Маємо:

$$a_{k+1} = \underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}}_{k+1-\text{коренів}} = \sqrt{3+\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}}_{k-\text{коренів}}} =$$

$$= \sqrt{3+a_k} \le \sqrt{3+3} = \sqrt{6} < 3. \tag{2}$$

Оскільки номер $n = k$ було вибрано довільно, то із нерівностей (1) і (2) випливає, що ця послідовність обмежена зверху числом 3. Таким чином, послідовність $\{a_n\}, n \ge 1$ є обмеженою знизу і зверху, отже, вона є обмеженою.

3. Довести, що послідовність $\{a_n\}$: $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)$ ($n = 2, 3, ...$) збігається, та знайти її границю.

Розв'язання. Оскільки $a_n > 0, (n = 1, 2, 3, ...)$, то

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \ge 2 \; (n = 2, 3, ...). \text{ Тоді } a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right) \ge 1 \; (n = 2, 3, ...).$$

Отже, послідовність $\{a_n\}$ обмежена знизу числом 1. Запишемо підряд кілька перших членів цієї послідовності: $a_1 = 2$,

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \; a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} + \frac{4}{5}\right) = \frac{5}{8} + \frac{2}{5} = \frac{41}{40} \text{ та ін.}$$

Звідси видно, що $a_2 < a_1$, $a_3 < a_2$, тобто наступний член послідовності більший від попереднього. Доведемо, що $a_{n+1} \le a_n, \forall n \in N$. Маємо:

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{2a_n} = \frac{a_n^2 - 1}{2a_n} \ge 0 \cdot$$

Таким чином, послідовність $\{a_n\}$ монотонна і обмежена. Отже, за теоремою про монотонну послідовність, ця послідовність має границю a. Число a задовольняє рівняння $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ згідно із формулою для n-го члена послідовності. Звідси при умові $a \ge 1$ отримуємо $a = 1$.

4. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^3+5} + \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^3+1} - \sqrt[6]{n^4+10}}$.

Розв'язання. Винесемо за дужки в чисельнику і знаменнику число n в найбільших степенях, а саме: в чисельнику — $n^{\frac{4}{3}}$, а в знаменнику — $n^{\frac{3}{2}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3+5}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^3+1}-\sqrt[6]{n^4+10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+5)^{\frac{1}{4}}+(n^4+1)^{\frac{1}{3}}}{(n^3+1)^{\frac{1}{2}}-(n^4+10)^{\frac{1}{6}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{3}{4}}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{4}{6}}\left(1+\frac{10}{n^4}\right)^{\frac{1}{6}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{4}{3}}\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{\frac{1}{4}}+n^{-\frac{7}{16}}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}{n^{\frac{3}{2}}\left(\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}}-n^{-\frac{5}{6}}\left(1+\frac{10}{n^4}\right)^{\frac{1}{6}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}n^{\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)}=\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{6}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}=0.$$

5. Знайти границю послідовності $a_n=\sqrt[n^2]{n^{1000}}$ при $n\to+\infty$.

Розв'язання. При $n\geq 1$: $a_n=\sqrt[n^2]{n^{1000}}\geq\sqrt[n^2]{1}=1$. При $n > 1000$ маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n^{1000}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{\frac{1000}{n}}}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Згідно з теоремою про три послідовності доходимо висновку, що границя послідовності (a_n) дорівнює 1.

6. Знайти $\inf a_n$, $\sup a_n$, $\underline{\lim}\, a_n$, $\overline{\lim}\, a_n$ послідовності

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}\quad, n=1, 2, \dots .$$

Розв'язання. Випишемо підряд деяку кількість перших членів цієї послідовності:

$$\{a_n\}=\left\{-1;\ 1\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{4};\ -\frac{1}{5};\ 1\frac{1}{6};\ -\frac{1}{7};\ 1\frac{1}{8};\dots;\ -\frac{1}{2k+1};\ 1\frac{1}{2(k+1)};\dots\right\}.$$

Звідси видно, що послідовність a_n є об'єднанням двох підпослідовностей: *першої* підпослідовності, яка складається із членів цієї послідовності з *непарними* номерами

$$a_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}, \ \ k = 1, 2, 3, \dots , \qquad (1)$$

і *другої* підпослідовності, яка складається із членів цієї послідовності з *парними* номерами

$$a_{2(k+1)} = \frac{1}{2(k+1)} + 1 = 1\frac{1}{2(k+1)}, \, k = 1, 2, 3, \dots . \qquad (2)$$

Таким чином, послідовність a_n має дві часткові границі

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{2(k+1)} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2(k+1)}\right) = 1.$$

Тому множина A всіх часткових границь послідовності a_n складається з двох елементів $A = \{0;\ 1\}$.

Тепер визначаємо $\inf a_n$ і $\sup a_n$:

$$\inf a_n = \min a_{2k+1} = -1, \quad \sup a_n = \max a_{2(k+1)} = 1\frac{1}{2}.$$

Згідно з означенням шукаємо нижню і верхню границі послідовності a_n:

$$\underline{\lim}\, a_n = \inf A = 0, \quad \overline{\lim}\, a_n = \sup A = 1.$$

Відповідь: $\inf a_n = -1$; $\sup a_n = 1\frac{1}{2}$; $\underline{\lim}\, a_n = 0$, $\overline{\lim}\, a_n = 1$.

Тема 3. Похідні та інтеграли. Інтеграл Рімана і його застосування. Похідні вищих порядків

Наближені методи і програми побудови січних і дотичних. Методи обчислення максимальних і мінімальних значень функцій. Методи наближеного обчислення площі криволінійної трапеції. Побудова поліноміальних наближень підвищеної точності за даними на дискретній сітці та їх використання для підвищенної точності обчислення площі криволінійної трапеції.

Невласні інтеграли по необмежених інтервалах та критерій їх збіжності. Абсолютно й умовно збіжні інтеграли. Достатні ознаки збіжності. Невласні інтеграли від необмежених функцій. Заміна змінних і формула інтегрування частинами для невласних інтегралів. Рівномірна збіжність невласних інтегралів, які залежать від параметра. Дослідження збіжності невласних інтегралів. Абсолютна і умовна збіжність інтегралів від необмежених функцій. Головне значення інтеграла.

Зразки розв'язання задач

1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.

Розв'язання. Введемо заміну $e^x = t$, звідси одержимо $x=\ln t, dx=\frac{dt}{t}$. Тоді $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}=\int \frac{dt}{t(t^2+t-2)}=\int \frac{dt}{t(t-1)(t+2)}$.

Розкладемо дріб $\frac{1}{t(t-1)(t+2)}$ на прості дроби за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{1}{t(t-1)(t+2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+2}=\frac{A(t-1)(t+2)+Bt(t+2)+Ct(t-1)}{t(t-1)(t+2)}.$$

Звідси маємо рівність для чисельників:

$$1=A(t-1)(t+2)+Bt(t+2)+Ct(t-1).$$

Підставивши в цю рівність значення $t = 0$, одержимо $A=-\frac{1}{2}$, при $t = 1$ отримаємо $B=\frac{1}{3}$, а при $t = -2$ маємо $C=\frac{1}{6}$. Тепер остаточно знаходимо інтеграл:

$$\int \frac{dt}{t(t-1)(t+2)}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}+\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1}+\frac{1}{6}\int \frac{dt}{t+2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln t+\frac{1}{3}\ln(t-1)+\frac{1}{6}\ln(t+2)+c=$$

$$=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\ln(e^x-1)+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)+c.$$

Тема 4. Числові і функціональні (степеневі) ряди та їх збіжність

Логарифмічна ознака та інтегральна ознака Маклорена — Коші збіжності рядів з невід'ємними членами та особливості застосування цих ознак.

Розвинення функцій у степеневі ряди Тейлора та їх застосування для наближених обчислень. Різні форми залишкового члена формули Тейлора.

Зразки розв'язання задач

1. Знайти суму членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$.

Розв'язання. Перетворимо вираз для n-го члена ряду:

$$\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1-n)\sqrt{n(n+1)}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

У результаті отримаємо вираз для суми членів цього ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-...+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+...=1.$$

Тема 5. Функції обмеженої варіації. Інтеграл Стільт'єса

Монотонні функції та функції обмеженої варіації. Означення та приклади. Інтеграл Стільт'єса. Критерій інтегровності. Класи інтегровних функцій. Властивості інтеграла Стільт'єса. Інтеграл Стільт'єса відносно функції обмеженої варіації. Теорема про граничний перехід. Зв'язок інтеграла Стільт'єса з абсолютною збіжністю рядів і відповідні приклади.

Тема 6. Елементи аналізу у метричних просторах. Функції багатьох змінних. Похідні від функцій багатьох змінних

Компактні множини та їх властивості. Структура компактних множин в евклідових просторах. Властивості неперервних функцій на компактах. Принцип стискаючих відображень та його застосування.

Локальні екстремуми функції багатьох змінних. Необхідні та достатні умови існування локальних екстремумів. Поняття опуклості для функцій багатьох змінних.

Теорема про диференціювання скдадної вектор-функції. Необхідна умова для існування локального відносного екстремуму (метод множників Лаґранжа). Достатні умови для знаходження відносного умовного екстремуму. Приклади застосування необхідних і достатніх умов.

Тема 7. Кратні, криволінійні і поверхневі інтеграли та їх застосування

Обчислення подвійних і потрійних інтегралів. Застосування подвійного та потрійного інтегралу для обчислення площ, об'ємів і мас тіл. Обчислення центру мас і моментів інерції тіл за допомогою кратних інтегралів.

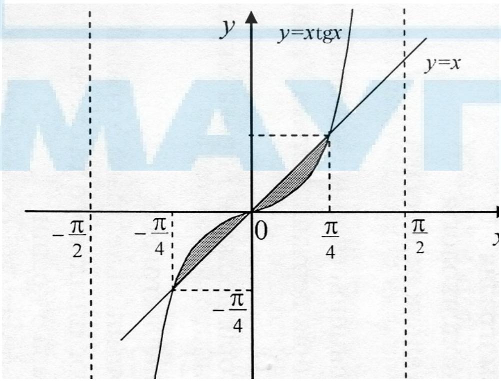
Криволінійні інтеграли першого і другого роду та формули зведення таких інтегралів до інтегралів Рімана. Інтеграли по замкнутому контуру, формула Гріна та її застосування.

Односторонні та двосторонні поверхні. Орієнтація поверхні. Приклад односторонньої поверхні (лист Мьобіуса). Фізична інтерпретація та застосування поверхневих інтегралів. Формула Ґаусса — Остроградського, її застосування та узагальнення (формула Стоукса).

Зразки розв'язання задач

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$ по області D, обмеженій лініями $y = x\mathrm{tg}x$ і $y = x$.

Розв'язання. Неважко переконатися, що двовимірна область інтегрування D є заштрихованою областю, зображеною нижче на малюнку, яка складається з двох частин, одна з яких розміщується в першій, а друга — в третій координатних чвертях.



Оскільки область інтегрування симетрична відносно початку координат, а підінтегральна функція є непарною по x, то шуканий інтеграл буде дорівнювати подвоєному інтегралу лише по одній частині області, яка міститься в першій чверті. Обчислюємо інтеграл:

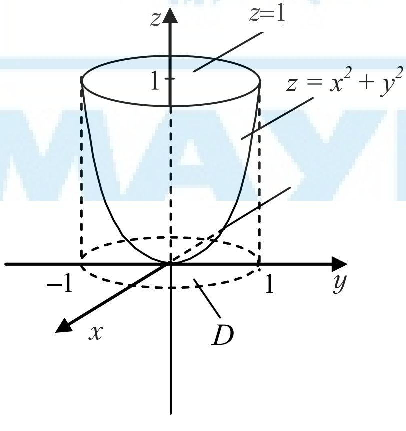
$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy = 2\int_0^{\pi/4} dx \int_{x\,\mathrm{tg}x}^{x} \frac{x}{x^2+y^2}dy = 2\int_0^{\pi/4} dx \int_{x\,\mathrm{tg}x}^{x} \frac{x}{x^2(1+(y/x)^2)}dy =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} dx \int_{x\,\mathrm{tg}x}^{x} \frac{1}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} d\left(\frac{y}{x}\right) = 2\int_0^{\pi/4} dx\, \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\Bigg|_{x\mathrm{tg}x}^{x} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} dx(\mathrm{arctg}1 - x) = 2\left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi/4}\right) = \frac{\pi^2}{16}.$$

2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dxdydz$, перейшовши до циліндричної системи координат, де G — область, обмежена поверхнями: $z = x^2+y^2$, $z = 1$.

Розв'язання. В прямокутній декартовій системі координат xyz у просторі область інтегрування G має вигляд, як показано на рисунку.



Область G

При обчисленні потрійного інтеграла зручно спочатку спроектувати просторову область на площину xy: позначимо проекцію буквою D. Проекцією є круг $x^2+y^2\le 1$. Оскільки підінтегральна функція є парною по x і y, то отримаємо такий вираз для інтеграла:

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dxdydz=\iint\limits_D dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{1}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dz=$$

$$=4\iint\limits_{D_1} dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{1}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dz.$$

Тут D_1 — чверть круга, котра розміщена в першому квадранті декартової площини xy. Перейшовши від прямокутної системи до полярної системи координат за формулами $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z, |J|=\rho$, далі отримаємо

$$\iint\limits_{D_1} dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{1}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_{\rho^2}^{1}\rho^3\cdot\rho dz=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\rho^4(1-\rho^2)d\rho=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\rho^5}{5}-\frac{\rho^7}{7}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{35}.$$

У результаті шуканий інтеграл дорівнює $4\cdot\dfrac{\pi}{35}=\dfrac{4\pi}{35}$.

Тема 8. Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є

Збіжність рядів Фур'є. Ядро Діріхле і інтеграл Діріхле. Ядро Феєра, теорема Феєра та її наслідки.

Рівномірна збіжність рядів Фур'є. Диференціювання та інтегрування рядів Фур'є.

Інтеграл Фур'є. Збіжність інтеграла Фур'є в точці. Ознаки Діні та Лівшиця.

Перетворення Фур'є та його властивості. Застосування перетворення Фур'є, обчислення перетворення Фур'є для похідних другого та вищих порядків від заданої функції. Розв'язання задачі Коші для рівняння лінійної теплопровідності за допомогою перетворення Фур'є. Поняття про перетворення Лапласа.

Тема 9. Вимірні функції та інтеграли Лебеґа

Міра Жордана і міра Лебеґа на прямій і в просторі. Приклади, які демонструють нееквівалентність цих мір.

Інтеграл Лебеґа для простих функцій. Загальне означення інтеграла Лебеґа. Абсолютна неперервність і граничний перехід під знаком інтеграла Лебеґа. Інтеграл по множині нескінченної міри. Порівняння інтеграла Лебеґа та інтеграла Рімана. Теорема про інтегровність за Лебеґом функцій, які інтегровні за Ріманом.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тема 1. Елементи загальної теорії множин. Множина дійсних чисел і дійсні функції на множині дійсних чисел

1. Дати поняття множини та навести означення дій над множинами.
2. Дати означення відображення (функції), образу та праобразу відображення. Що таке бієкція?
3. Дати означення рівнопотужності та зліченності множин.
4. Що таке множини цілих, раціональних та дійсних чисел і яка потужність кожної з цих множин?
5. Описати діагональний метод Кантора та його застосування.
6. Що таке середнє арифметичне та середнє геометричне ? Сформулювати нерівність Коші для них.
7. Сформулювати дві нерівності Коші.
8. Дати означення точної верхньої та нижньої граней числової множини.
9. Чи може незліченна множина бути обмеженою? Навести приклад.
10. Сформулювати лему про вкладені відрізки.

Тема 2. Послідовності, границі функції однієї дійсної змінної, неперервні функції

1. Дати означення границі послідовності (окремо для випадку збіжності до нескінченності). Чи можуть елементи числової послідовності мати однакові значення?
2. Сформулювати теорему про границі суми, частки та добутку збіжних послідовностей.
3. Сформулювати теорему про три послідовності.

4. Знайти границю послідовності чисел кореня n-го степеня з n, де n — натуральне число.
5. Отримати число Ойлера e як границю числової послідовності.
6. Дати означення фундаментальної послідовності.
7. Сформулювати критерій Коші збіжності послідовності.
8. Що таке границя функції в точці? Дати означення за Коші і за Гайне.
9. Якого значення набуває границя $\sin x/x$ при x, що прямує до нуля.
10. Що таке 'о'-маленьке ? Сформулювати теорему, яка зводить існування 'о'-маленького між двома фукціями до існування відповідної границі.
11. Дати означення еквівалентності двох функцій.
12. Означення неперервності функції в точці.
13. Сформулювати теорему про неперервність суми, частки та добутку двох функцій.
14. Сформулювати дві теореми Ваєрштрасса про неперервну функцію на відрізку.
15. Дати означення рівномірно неперервної функції та навести приклад такої функції, яка є неперервною але не є рівномірно неперервною.

Тема 3. Похідні та інтеграли. Інтеграл Рімана і його застосування. Похідні вищих порядків

1. Дати означення похідної функції в точці .
2. Пояснити геометричний зміст похідної.
3. Пояснити фізичний зміст похідної.
4. Сформулювати теорему про похідні від суми, добутку і частки двох функцій.
5. Як знайти похідну суперпозиції двох функцій (складної функції) та оберненої функції ?
6. Записати похідні від найпростіших елементарних функцій.
7. Сформулювати теореми Ферма та Лаґранжа для функції, які мають похідні.
8. Що таке диференціал функції? Сформулювати теорему, яка зводить обчислення диференціала функції в точці до обчислення похідної.
9. Записати формули Тейлора із залишковим членом у формі Пеано і Лаґранжа.

10. Що таке правила Льопіталя і до чого вони застосовуються?
11. Який зв'язок між монотонністю функції та її похідної?
12. Сформулювати необхідні і достатні умови екстремуму функції.
13. Що таке точка перетину функції та як її шукати?
14. Яка схема побудови графіка заданої функції за допомогою похідних та границь?
15. Дати означення первісної та невизначеного інтеграла.
16. Сформулювати найпростіші властивості невизначеного інтеграла.
17. Записати невизначені інтеграли у випадку найпростіших елементарних функцій.
18. Знайти два основні способи знаходження невизначених інтегралів (методи підстановки та інтегрування частинами).
19. Як інтегрувати найпростіші раціональні дроби?
20. Записати загальну схему інтегрування раціонального дробу.
21. Які інтеграли підстановками зводяться до інтегрування раціонального дробу?
22. Що таке визначений інтеграл (інтеграл Рімана)?
23. Яка геометрична інтерпретація інтеграла Рімана?
24. Сформулювати умову інтегрованості функції на відрізку.
25. Сформулювати властивості інтеграла Рімана.
26. Сформулювати основну теорему інтегрального числення (формула Ньютона — Лейбніца).
27. Записати формулу для обчислення об'єму тіла обертання.
28. Що таке невласний інтеграл за необмеженим інтервалом і який критерій його збіжності?
29. Що таке абсолютна та умовна збіжність невласних інтегралів?
30. Дати означення невласного інтеграла від необмеженої функції.

Тема 4. Числові і функціональні (степеневі) ряди та їх збіжність

1. Дати означення збіжності числового ряду.
2. Сформулювати три ознаки порівняння.
3. Сформулювати ознаку Д'Аламбера.
4. Сформулювати ознаку Коші.
5. Сформулювати інтегральну ознаку Маклорена — Коші.
6. Дати означення умовно і абсолютно збіжного рядів.

7. Сформулювати ознаку Лейбніца збіжності числових рядів.
8. Сформулювати ознаку Абеля збіжності числових рядів.
9. Дати означення поточкової та рівномірної збіжностей функціонального ряду.
10. Сформулювати ознаку Ваєрштрасса збіжності функціональних рядів.
11. Дати означення степеневого ряду та його радіусу збіжності.
12. Сформулювати теорему Коші — Адамара.
13. Сформулювати теорему про неперервність суми степеневого ряду.
14. Написати формули розкладу функції в ряди Маклорена і Тейлора.
15. Дати означення збіжності та абсолютної збіжності ряду з комплексними числами.
16. Сформулювати теорему Коші — Адамара для збіжності степеневого ряду.

Тема 5. Функції обмеженої варіації. Інтеграл Стільт'єса

1. Дати означення функції обмеженої варіації та варіації такої функції.
2. Сформулювати теорему Жордана.
3. Записати суми Дарбу — Стільт'єса.
4. Дати означення інтеграла Стільт'єса (Рімана — Стільт'єса).
5. Сформулювати властивості інтеграла Стільт'єса.
6. Чи існує інтеграла Стільт'єса відносно функції обмеженої варіації?
7. Сформулювати теорему про граничний перехід під знаком у інтеграла Стільт'єса.

Тема 6. Елементи аналізу у метричних просторах. Функції багатьох змінних. Похідні від функцій багатьох змінних

1. Дати означення метрики (віддалі) та метричного простору.
2. Сформулювати властивості віддалі в метричному просторі.
3. Дати означення збіжності послідовності елементів метричного простору.
4. Що таке внутрішня точка множини A?
5. Дати означення фундаментальної послідовності в метричному просторі та повного метричного простору.

6. Ввести поняття функції, що діє з одного метричного простору в інший, та дати означення границі такої функції в точці.
7. Дати означення неперервності функції в точці та на множині A.
8. Властивості неперервних дійсних функцій.
9. Дати означення покриття та відкритого покриття множини A.
10. Ввести поняття компактної множини та компактного простору.
11. Сформулювати теорему Больцано — Ваєрштрасса для компактних множин.
12. Сформулювати критерій компактності (теорема Гауздорфа).
13. Дати означення нерухомої точки та відображення стискання.
14. Сформулювати теорему Банаха.
15. Дати означення похідної за напрямом у точці та на відкритій множині.
16. Сформулювати теорему про обчислення похідних за напрямом.
17. Дати означення частинної похідної дійсної функції багатьох змінних за k-ю змінною.
18. Дати означення похідної (градієнта) дійсної функції багатьох змінних.
19. Записати формулу, що виражає похідну за напрямом через градієнт.
20. Дати означення диференційовності функції та диференціала функції.
21. Сформулювати теорему про диференційовність суми, добутку та частки двох диференційовних функцій.
22. Дати означення похідної другого порядку за двома напрямами та частинної похідної другого порядку.
23. Дати означення точки абсолютного максимуму (мінімуму) та локального максимуму (мінімуму) для дійсної функції багатьох змінних.
24. Сформулювати необхідні умови для існування локальних екстремумів функції багатьох змінних.
25. Сформулювати достатні умови для існування локальних екстремумів функції багатьох змінних.
26. Сформулювати достатні умови для існування локальних екстремумів функції двох змінних.
27. Ввести поняття вектор-функції (відображення) та дати означення лінійної вектор-функції.

28. Дати означення неперервності вектор-функції в точці та на множині.
29. Сформулювати теорему про умови для неперервності вектор-функції.
30. Дати означення диференційовності вектор-функції в точці та на множині.

Тема 7. Кратні, криволінійні і поверхневі інтеграли

1. Що таке розбиття прямокутника в двовимірному просторі Евкліда?
2. Дати означення подвійного інтеграла по прямокутнику.
3. Сформулювати теорему, яка зводить обчислення подвійного інтеграла по прямокутнику до двох інтегралів Рімана.
4. Дати означення потрійного інтеграла по паралелепіпеду в тривимірному просторі Евкліда.
5. Сформулювати теорему, яка зводить обчислення потрійного інтеграла по паралелепіпеду до подвійного інтеграла та інтеграла Рімана.
6. Як вводиться поняття зовнішньої та внутрішньої мір для множини в двовимірному просторі Евкліда?
7. Дати означення вимірної за Жорданом множини на площині.
8. Дати означення m-кратного інтегралу по вимірній (за Жорданом) множині, вважаючи, що $m = 2$ або $m = 3$.
9. Сформулювати найпростіші властивості m-кратного інтеграла.
10. Записати формулу обчислення m-кратного інтегралу від неперервної функції по циліндричній множині.
11. Що таке якобіан відображення? Яка його величина при переході до полярної системи координат?
12. Сформулювати теорему про заміну змінних для обчислення кратних інтегралів?
13. Дати означення криволінійного інтеграла першого роду через границю відповідної інтегральної суми.
14. Яка фізична інтерпретація криволінійного інтеграла першого роду, якщо підінтегральна функція є невід’ємною?
15. Сформулювати теорему, яка зводить обчислення криволінійного інтеграла першого роду до відповідного інтеграла Рімана.
16. Дати означення криволінійного інтеграла другого роду через границю відповідної інтегральної суми.

17. Який зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого родів?
18. Що таке гладка крива в m-вимірному просторі?
19. Записати формулу Гріна і пояснити її застосування.
20. Коли значення криволінійного інтегралу не залежить від шляху інтегрування ?
21. Що таке двовимірний многовид (поверхня) у m-вимірному просторі ?
22. Записати формулу для обчислення площі поверхні, заданої параметрично, в тривимірному просторі.
23. Записати формулу для обчислення площі поверхні, заданої явним чином, у тривимірному просторі.
24. Сформулювати теорему, яка зводить обчислення поверхневого інтеграла першого роду до відповідного подвійного інтеграла.
25. Яка фізична інтерпретація поверхневого інтеграла першого роду і як за його допомогою знайти центр маси поверхні?
26. Як вводиться орієнтація гладкої поверхні?
27. Який загальний запис поверхневого інтеграла другого роду по орієнтованій поверхні?
28. Яка фізична інтерпретація поверхневого інтеграла другого роду?
29. Записати та пояснити формулу Ґаусса — Остроградського.
30. Сформулювати фізичну інтерпретацію формули Ґаусса — Остроградського та записати її у векторній формі.

Тема 8. Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є

1. Дати означення ортонормованої системи функцій.
2. Які властивості ортонормованої системи тригонометричних функцій?
3. Як обчислюються коефіцієнти Фур'є?
4. Як розвинути функцію в тригонометричний ряд Фур'є?
5. Що таке комплексна форма ряду Фур'є?
6. Розповісти про ядра Діріхле і Феєра.
7. Сформулювати теорему про збіжність ряду Фур'є в точці.
8. Сформулювати теорему про рівномірну збіжність рядів Фур'є.
9. При яких умовах можна почленно диференціювати ряди Фур'є?
10. При яких умовах можна почленно інтегрувати ряди Фур'є?

11. Що таке інтеграл Фур'є та інтегральні формули Фур'є?
12. Сформулювати ознаки Діні та Ліпшиця.
13. Дати означення перетворення Фур'є
14. Сформулювати теорему про знаходження функції за перетворенням Фур'є (формула обертання).
15. Записати косинус- і синус-перетворення Фур'є.

Тема 9. Вимірні функції та інтеграли Лебеґа

1. Дати означення міри Лебеґа плоских множин.
2. Сформулювати загальне поняття міри.
3. Що таке сігма-адитивність міри?
4. Дати означення борелівської множини та борелівської функції.
5. Які функції називаються вимірними?
6. Як виконувати дії над вимірними функціями?
7. Дати означення збіжності майже скрізь.
8. Дати означення збіжності за мірою.
9. Як будується інтеграл Лебеґа для простих функцій?
10. Дати загальне означення інтегралу Лебеґа по множині скінченої міри.
11. Сформулювати теорему про абсолютну неперервність інтеграла Лебеґа.
12. Написати нерівність Чебишева.
13. Які умови для граничного переходу під знаком інтеграла Лебеґа?
14. Сформулювати теорему Леві.
15. Яка основна відмінність та зв'язок між інтегралом Лебеґа та інтегралом Рімана?

ЗАДАЧІ І ПРИКЛАДИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тема 1. Елементи загальної теорії множин. Множина дійсних чисел і дійсні функції на множині дійсних чисел

1. Довести, що для довільних множин A, B і C є правильними твердження:

а) $A \cup B = B \cup A$; б) $A \cap B = B \cap A$;

в) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

г) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

д) $(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) =$

$=(A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2)$;

е) $(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) = (A_1 \cup B_1) \cap (A_1 \cup B_2) \cap (A_2 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2)$.

2. Довести твердження (правила двоїстості):

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

в) $\overline{\overline{A}} = A$.

3. Чи є правильними твердження:

а) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup (A \cap B)$;

б) $A \setminus B = B \setminus A$?

Переконатисясь в правильності формули б), якщо A = [0; 2], B = [1; 3], а універсальна множина X = R — множина дійсних чисел.

4. Чи правильне твердження $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$? Якщо ні, то яка множина, зліва чи справа від знака “=”, є підмножиною іншої?

(Відповідь: $(A \cap B) \cup C \supset A \cap (B \cup C)$).

5. Визначити кількість елементів множин, утворених з елементів скінченних множин A і B:

а) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$;

б) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$;

в) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

г) $|2^A| = 2^{|A|}$.

6. Визначити множину A, якщо:

а) $\forall x \in A \;\; \exists n \in N : 2n + 1 = x$;

б) $\forall a \in A \;\; \exists x \in R : 3a + 2ax - x^2 > 0$.

7. Визначити і зобразити на рисунках множини $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, A\B, B\A, якщо:

а) $A = \{x \in R : x^2 + 6x + 8 < 0\}$, $B = \{x \in R : x^2 + 3x < 0\}$;

б) $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{(x, y) \in R^2 : xy \geq 0\}$;

в) $A = \{(x, y) \in R^2 : x^3 > y^3\}$, $B = \{(x, y) \in R^2 : x^2 > y^2\}$.

8. Накреслити геометричні образи рівнянь:

а) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$; б) $x^2 - y^2 = 0$;

в) $x^2 y^2 = 1$; г) $1 - |y| = x$;

д) $|x| - |y| = 2$; е) $[x] = 5$;

є) $\{x\} = 0{,}5$; ж) $[x] = [y]$;

з) $|x-y|-|x+y|=2$; и) $|y|=-\sin x$;

ї) $\operatorname{tg}(\pi xy)=1$; і) $x=-\sqrt{2x+y}$;

к) $\log_x(y+1)=3$; л) $3^{x+y^3}=\dfrac{1}{9}$;

м) $\sin(x+y)=-\sin(x-y)$; н) $y+\sqrt{2^{x^2+1}}=1$;

о) $\log_4 3^{x+y^3}=\dfrac{1}{9}$; п) $\log_{2} xy=1$.

р) $\rho=a\varphi$ $(a>0)$ — спіраль Архімеда;

с) $\rho=e^{a\varphi}$ $(a>0)$ — логарифмічна спіраль;

т) $\rho=a(1+\cos\varphi)$ $(a>0)$ — кардіоїда;

у) $\rho=a\sin 3\varphi$ $(a>0)$ — трипелюсткова троянда.

9. Чи є подані нижче відображення сюр'єкцією, ін'єкцією, бієкцією:

а) $Z \ni n \to n+(-1)^n \in Z$; б) $Z \ni n \to 3-n \in Z$;

в) $Z^2 \ni (m,n) \to (n,m) \in Z^2$; г) $Z^2 \ni (m,n) \to (m-1,n+2) \in Z^2$.

10. Довести, що множина чисел $A=\left\{(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \,\middle|\, n\in N\right\}$ обмежена, але не має ні найменшого, ні найбільшого елемента. Знайти точні верхню та нижню межі множини A.

11. Знайти точні межі множини $A=\left\{\dfrac{m}{m+n} \,\middle|\, m\in N,\ n\in N\right\}$.

12. Якого типу відображення з R в R (сюр'єкцію, ін'єкцію, бієкцію) задають такі функції: а) $y=x\sin x$; б) $y=\operatorname{arctg} x$; в) $y=x|x|$.

13. Знайти точні верхню та нижню межі множин:

а) $A=\left\{\dfrac{n}{n+3}(2+(-1)^n) \,\middle|\, n\in N\right\}$; б) $A=\left\{\dfrac{n+1}{n}(-1)^n \,\middle|\, n\in N\right\}$.

14. Якого типу відображення з R в R (сюр'єкцію, ін'єкцію, бієкцію) задають такі функції: а) $y=\sqrt[3]{x+10}$; б) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; в) $y=x\left(|x|-1\right)$.

15. Нехай $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=\sin x$. Знайти $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$, $f(f(x))$, $\varphi(\varphi(x))$, $f(\varphi(f(x)))$, $\varphi(f(\varphi(x)))$.

16. Знайти область визначення функцій і зобразити (д–и) цю область графічно:

а) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$; б) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;
в) $f(x)=\arcsin(\sin x)$; г) $f(x)=\sin(\cos x)$;
д) $f(x)=\arcsin(2x-1)$; е) $f(x)=\ln\sin(2x-1)$;
є) $f(x)=\arccos\dfrac{x-3}{5}-\lg(3x+6)$; ж) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\ln(x^2-1)$;

з) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2}+\ln(y^2-1)$;

и) $f(x,y)=\sqrt{9y-x^2}+\ln(xy^2-1)$;

і) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2y}+\ln(x^2-y)$.

17. Функція $f:Z\to N$ задана формулою $\forall n\in Z: f(n)=n^2+1$. Визначити:

а) $f(0)$; б) $f(1)$; в) $f^{-1}(\{1\})$; г) $f^{-1}(\{2\})$.

Довести, що $f(Z)=f(N)\cup\{1\}$.

18. Функція $f:R^2\to R^1$ задана формулою $f(x,y)=x-y$. Визначити:

а) $f(0;0)$; б) $f(1;0)$; в) $f^{-1}(\{0\})$; г) $f^{-1}([1;4])$.

19. Функція $\bar{f}:R^1\to R^2$ задана формулою $\bar{f}(x)=\left(x;\dfrac{1}{|x|+1}\right)$. Знайти: $\bar{f}(0)$, $\bar{f}(2)$, $\bar{f}^{-1}(0;0)$, $\bar{f}^{-1}\left(2;\dfrac{1}{3}\right)$, $R(\bar{f})$.

Тема 2. Послідовності, границі функції однієї дійсної змінної, неперервні функції

1. Довести важливі границі:

1) Нехай $\forall n\geq 1: a_n=a, (a\in R)$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

2). $\forall\alpha>0$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0$.

3) $\forall a>1, \forall\beta>0$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\beta}}{a^n}=0$.

4) $\forall a>0, a\neq 1, \forall\beta>0: \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n^{\beta}}=0.$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e.$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

2. Довести обмеженість послідовностей:

а) $a_n=\dfrac{2^n}{n!}, n\geq 1$; б) $a_n=\sqrt{n^2+(n-1)\sin n}-n,\ n\geq 1$.

3. Визначити всі дійсні значення x, для яких послідовність

$a_n=\left(\dfrac{x}{2}\right)^n+x^n, n\geq 1$ є обмеженою.

4. Чи мають границі такі послідовності:

а) $a_n=n\sin\dfrac{n\pi}{2}$; б) $a_n=\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\lg n}$?

5. Чи є збіжними такі послідовності:

а) $a_1=\dfrac{1}{3+1},\ a_2=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1},\ldots, a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\ldots+\dfrac{1}{3^n+1},..;$

б) $b_1=\dfrac{1}{2},\ b_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot 4},\ b_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6},\ldots$

$\ldots,\ b_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)},\ldots$?

6. Задано числову послідовність a_n:

$a_1=\sqrt{6},\ a_2=\sqrt{6+a_1},..,a_n=\sqrt{6+a_{n-1}},\ldots$

Довести, що ця послідовність є збіжною, і знайти її границю.

7. Знайти границі послідовностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1000)^2}{4n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16n^4+2n-1}}{n+100}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+3}+\sqrt[3]{n^4+4}}{\sqrt[4]{n^6+6}-\sqrt[5]{n^7+7}}$;

є) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$; ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$; и) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}\right)$;

і) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$; к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}\right)$;

л) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$; м) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

8. Знайти точні верхню та нижню границі таких множин:

а) $A=\left\{\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ldots\right\}$;

б) $B=\{0{,}1;\ 0{,}12;\ 0{,}122;\ 0{,}1222;\ldots\}$.

9. Обчислити границі послідовностей $\{a_n\}$ при $n\to+\infty$:

а) $a_n=\sqrt[n]{2^n+3^n}$; б) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

в) $a_n=\sqrt[n]{2^{-n}+3^{-n}}$; г) $a_n=\left(1-\dfrac{3}{2n}\right)^{n+5}$;

д) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$; е) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$;

є) $a_n=\left(\dfrac{2^n}{n!}\right)$; ж)* $a_n=\dfrac{2^{n_2}}{n!}$;

з) $a_n = \sqrt[n^2]{n^{1000}}$; и)* $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

10. Послідовність $\{a_n\}$задано рекурентно: $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n},\ n \geq 1$.

Довести, що ця послідовність збігається, та знайти її границю.

11. Визначити загальний член послідовності $\{a_n\}$, заданої рекурентно:

а) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n - 1$ ($n = 2, 3, \ldots$);

б) $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n = 2, 3, \ldots$).

12. Довести, що послідовність $\{a_n\}$: $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)$ ($n = 2, 3, \ldots$) збігається, та знайти її границю.

13. Знайти формулу загального члена послідовності $\frac{7}{4}, \frac{9}{8}, \frac{11}{16}, \frac{13}{32}, \frac{15}{64}, \frac{17}{128}, \ldots$.

14. Довести, що послідовності:

а) $a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$; б) $b_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалів}}$

монотонні та обмежені. Знайти границю послідовності $\{b_n\}$.

15. Обчислити суми (*а* — *в*). У випадках *а*) і *б*) знайти границю цих сум при $n \to +\infty$:

а) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$;

б) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

в) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

16. Довести, що рекурентно задана послідовність

$a_1 = \sqrt{a},\ a > 0,\ a_n = \sqrt{a + a_{n-1}},\ (n = 2, 3, \ldots)$

є монотонно зростаючою та обмеженою. Знайти границю цієї послідовності при $n \to +\infty$.

17. Обчислити границі послідовності $\{a_n\}$ при $n \to +\infty$:

а) $a_n = \sqrt[n]{n^{1000} 2^n + 3^n}$; б) $a_n = \sqrt[n]{n^{1000} 3^n + 2^n}$;

в)* $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}$;   г)* $a_n = \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$;

д)* $a_n = \dfrac{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)^2}+\dfrac{1}{n^2}}{\ln n}$;   е)* $a_n = n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$.

18. Чи є фундаментальними такі послідовності:

а) $\dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{8}, \dfrac{11}{16}, \dfrac{13}{32}, \dfrac{15}{64}, \dfrac{17}{128}, \ldots$;   б) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{8}{11}, \dfrac{11}{14}, \dfrac{14}{17}, \dfrac{17}{20}, \ldots$;

в) $a_n = \dfrac{\sin 1}{1\cdot 2}+\dfrac{\sin 2}{2\cdot 3}+\dfrac{\sin 3}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{\sin n}{n(n+1)}$, $n = 1, 2, \ldots$;

г) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$?

19. Знайти найменший член послідовності $\{a_n\}$, ($n = 1, 2, \ldots$):

а) $a_n = n^2-9n-100$ (відповідь: $\min a_n = a_5 = -120$);

б) $a_n = n+\dfrac{100}{n}$ (відповідь: $\min a_n = a_{10} = 20$).

20. Знайти найбільший член послідовності a_n, ($n = 1, 2, \ldots$):

а) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ (відповідь: $\max a_n = a_3 = \dfrac{9}{8}$);

б) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{100+n}$ (відповідь: $\max a_n = a_{100} = \dfrac{1}{20}$);

в) $a_n = \dfrac{1000^n}{n!}$ (відповідь: $\max a_n = a_{1000} = \dfrac{10^{3000}}{1000!}$).

21. Знайти $\inf a_n$, $\sup a_n$, $\underline{\lim}\, a_n$, $\overline{\lim}\, a_n$ послідовностей:

а) $a_n = 1-\dfrac{1}{n}$ (відповідь: 0; 1; 1; 1);

б) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ (відповідь: $-1;\ 1\dfrac{1}{2};\ 0;\ 1$);

в) $a_n = (-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$ (відповідь: $-3\dfrac{1}{2};\ 5;\ -2;\ 2$).

г) $a_n = 1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$ (відповідь: $0;\ 2;\ 0;\ 2$).

22. Знайти $\inf a_n$, $\sup a_n$, $\underline{\lim}\, a_n$, $\overline{\lim}\, a_n$ послідовностей:

а) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ (відповідь: $-\dfrac{1}{2};\ 1;\ -\dfrac{1}{2};\ 1$);

б) $a_n = (-1)^n n$ (відповідь: $-\infty;\ +\infty;\ -\infty;\ +\infty$);

в) $a_n = n^{(-1)^n}$ (відповідь: $0;\ +\infty;\ 0;\ +\infty$);

г) $a_n = 1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$ (відповідь: $0;\ 2;\ 0;\ 2$);

д) $a_n = \dfrac{1}{n-10{,}2}$ (відповідь: $-5;\ \dfrac{5}{4};\ 0;\ 0$).

23. Визначити $\underline{\lim}\, a_n$, $\overline{\lim}\, a_n$ послідовності:

а) $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ (відповідь: $-1;\ 1$);

б) $a_n = n - 5\left[\dfrac{n}{5}\right]$, де $[x]$ — ціла частина числа x (відповідь: 0; 4);

в) $a_n = 2\cdot\left\{\dfrac{3n}{5}\right\}$, де $\{x\}$ — дробова частина числа x (відповідь: $0;\ \dfrac{4}{5}$);

г) $a_n = n\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ (відповідь: 0; + 4).

д) $a_n = 1+\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ (відповідь: $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

24. Знайти множину A всіх часткових границь для кожної з послідовностей, які мають такий n-й член:

а) $a_n = (-2)^n + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ (відповідь: $A = \{0; +4\}$);

б) $a_n = n - 6\left[\frac{n}{6}\right]$, де $[a]$ — ціла частина числа a

(відповідь: $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$);

в) $a_n = \left\{\frac{2n^2}{7}\right\}$, де $\{x\}$ — дробова частина числа

(відповідь: $A = \left\{0; \frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}; \frac{5}{7};\right\}$);

г) $a_n = \sin\frac{2n\pi}{3}$, $n = 1, 2, \ldots$ (відповідь: $A = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$).

25. Визначити множину всіх граничних точок множини:

а) $A = \{\{\sqrt{n}\} : n \in \mathrm{N}\}$;

б) $A = \{(x, y, z) : (x, y, z) \in (0;10) \times (2;3) \times (2;3) \times (2;3)\}$;

в) $A = Q$ — множина всіх раціональних чисел;

г) $A = N$ — множина всіх натуральних чисел;

д) $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{2n-11} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$;

е) $A = \left\{\frac{1}{3n} \mid n = 1, 2, \ldots, 100\right\}$.

26. Знайти точні нижню та верхню межі функцій на відповідних множинах:

а) $f(x) = x^2$, $x \in [-2; 5)$; б) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $x \in (0; +\infty)$;

в) $f(x) = [x]$, $x \in (0; 2)$; г) $f(x) = [x]$, $x \in [0; 2]$;

д) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$; е) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$.

27. Довести, що функція $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ обмежена на R.

28. Важливі границі:

а) нехай $\forall x \in R$ $f(x)=c=\text{const}$. Тоді $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=c$;

б) нехай $\alpha > 0$. Тоді $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha}}=0$;

в) $\forall \alpha \in \mathrm{R}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$;

г) $\forall \beta \in R$ $\forall a>1$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\beta}}{a^{x}}=0$;

д) $\forall \beta>0$ $\forall a>0, a\neq 1$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\lg_a x}{x^{\beta}}=0$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$;

є) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

ж) $\forall a>0, a\neq 1$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a (1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$;

з) $\forall a>0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a$.

29. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$;

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^3-x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9-x^2}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x^2+2})$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{8+x^2}-2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

11) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 2x}{\mathrm{tg} x}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x\sin 2x)}{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin(1/x)$;

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x^2}$;

16) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$;

20) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{5+x}{8+x}\right)^x$;

21) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sin\left[\pi(\sqrt{x^2-0{,}5x}+x)\right]$;

22) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^x-\sqrt[3]{1+3x}}{x}$;

23) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin(1/x)$;

24) $\lim\limits_{x\to +\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$.

25) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$;

29) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$;

30) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$;

31) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}2x}{\sin 3x}$;

32) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

Знайти односторонні границі:

1) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|\sin x|}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|\sin x|}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x}{x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x}{x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|x|}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|x|}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 1-0}\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x-1}$.

Побудувати графіки функцій:

1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$;

2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\ (x\ge 0)$;

3) $f(x)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\sqrt{x^2+\alpha^2}$; 4)* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^n}$, $(x\geq 0)$;

5)** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^{2n}x)$.

Тема 3. Похідні та інтеграли. Інтеграл Рімана і його застосування. Похідні вищих порядків

1. Безпосереднім інтегруванням знайти інтеграли:

1) $\int\left(\dfrac{x}{2}+6e^{-2x}\right)dx$; 2) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

3) $\int(x^2+5e^{2x})dx$; 4) $\int\sin^2 3x\,dx$;

5) $\int(\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x})dx$; 6) $\int\dfrac{dx}{\sin^2(2x)}$;

7) $\int\dfrac{dx}{\sin^2(2x)}$; 8) $\int(2x+\sin 3x)dx$;

9) $\int\sin(2x-1)dx$; 10) $\int(1+\sqrt{x})^2dx$;

11) $\int\left(x^2+\dfrac{1}{2x}\right)dx$; 12) $\int ch(2x)dx$;

13) $\int\dfrac{x+1}{2+3x^2}dx$; 14) $\int\dfrac{dx}{\cos^2(5x)}$;

15) $\int\dfrac{dx}{3\sin^2(0{,}5x)}$; 16) $\int\dfrac{2^{3x}-5}{3^{2x}}dx$;

17) $\int sh(5x)dx$; 18) $\int\dfrac{dx}{2ch^2(5x)}$;

19) $\int\dfrac{3dx}{sh^2(2x)}$; 20) $\int\dfrac{xdx}{1-x^2}$;

21) $\int\dfrac{\cos x\,dx}{1+\sin^2(3x)}$.

2. Використовуючи заміну змінної, знайти інтеграли:

1) $\int e^{x^2}xdx$; 2) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$; 3) $\int x\sqrt{1-9x^2}\,dx$;

4) $\int \frac{\arcsin^2 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 5) $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$; 6) $\int \sin^5 x \cos x\,dx$;

7) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}$; 8) $\int \cos^2 x \sin x\,dx$; 9) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

10) $\int \frac{\text{ctg}x\,dx}{\cos^2 x}$; 11) $\int e^{\sin x} \cos x\,dx$; 12) $\int x\,\text{tg}(x^2)\,dx$.

3. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

1) $\int \frac{x\,dx}{(1-x)(1+2x)}$; 2) $\int \frac{dx}{(1-x)(1+x^2)}$;

3) $\int \frac{x\,dx}{(1-x)(1-2x)}$; 4) $\int \frac{dx}{x(1-3x)}$;

5) $\int \frac{x\,dx}{(2+x)(1-x)}$; 6) $\int \frac{(x+3)dx}{(1+x)(2-x)}$;

7) $\int \frac{(2x+1)dx}{1+x^2}$; 8) $\int \frac{(x^2+x+2)dx}{1+x^2}$;

9) $\int \frac{(x-5)dx}{(1-x)(1+x)}$; 10) $\int \frac{dx}{(3-4)(1-x)}$;

11) $\int \frac{x\,dx}{(1+2x)(2+x)}$; 12) $\int \frac{(x^4-1)\,dx}{(8+x^3)}$.

4. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$; 2) $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$;

3) $\int \sin 3x \cos x\,dx$; 4) $\int \cos 3x \cos 2x\,dx$;

5) $\int \sin 3x \sin 5x\,dx$; 6) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$;

7) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$; 8) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$;

9) $\int \sin x \operatorname{tg} x\, dx$; 10) $\int \cos x \operatorname{ctg} x\, dx$;

11) $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$; 12) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

5. Знайти інтеграли від виразів, які містять гіперболічні функції:

1) $\int \frac{dx}{sh5x}$; 2) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$; 3) $\int sh^{2007} x\, chx\, dx$;

4) $\int \frac{xdx}{ch^2 x}$; 5) $\int \frac{ch\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$; 6) $\int \frac{chxshdx}{ch^2 x + sh^2 x}$;

7) $\int sh^5 x\, dx$; 8) $\int \frac{dx}{chx-1}$; 9)* $\int \sqrt{th\, x}\, dx$.

6. Виходячи із означення визначеного інтеграла (інтеграла Рімана) шляхом розбиття проміжку інтегрування на n рівних частин, обчислити інтеграл $\int_0^2 (x+2)dx$.

7. Використовуючи формулу Ньютона — Лейбніца обчислити інтеграли:

1) $\int_0^2 x^4 dx$; 2) $\int_{-2}^1 (3x+2)dx$; 3) $\int_0^2 \frac{dx}{2x+3}$;

4) $\int_1^3 \sqrt[4]{x^3}\, dx$; 5) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; 6) $\int_0^2 (x+2)dx$;

7) $\int_1^3 \sqrt[4]{(2x-1)^3}\, dx$; 8) $\int_0^1 (e^x-2)^2 e^x dx$; 9) $\int_0^{10} 2^{3x} dx$;

10) $\int_1^{10} \frac{1+x}{x^2}dx$; 11) $\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x}dx$; 12) $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$;

13) $\int_0^{\pi/3} \cos 2x\, dx$; 14) $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(2x)dx$; 15) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$

16) $\int_{-\pi/2}^{\pi//2} \sin|x|dx$; 17) $\int_{-\pi}^{3\pi} |\cos 4x| dx$; 18) $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\, dx$.

8. Знайти інтеграли шляхом інтегрування за частинами:

1) $\int\limits_{0}^{\pi/3} x\sin(3x)dx$; 2) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$; 3) $\int\limits_{0}^{2} xe^x\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^{1} x2^x\,dx$; 5) $\int\limits_{-1}^{1} xe^{2x}\,dx$; 6) $\int\limits_{e}^{10e} x\ln(x)\,dx$;

7) $\int\limits_{e}^{4} \frac{\ln(x)dx}{x^2}$; 8) $\int\limits_{0}^{2} xe^x\,dx$; 9) $\int\limits_{0}^{1/2} x\arcsin(x)\,dx$;

10) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}(x)dx$; 11) $\int\limits_{1}^{e} x\ln(2x)\,dx$; 12) $\int\limits_{-1}^{2} x\,chx\,dx$.

9. Використовуючи різні способи, знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\frac{(x^2+3)\,dx}{(x-3)(x+1)^2}$; 2) $\int\frac{(5x^4+2)\,dx}{x^3-5x^2+4x}$; 3) $\int\frac{(x+2)\,dx}{(x^2+1)^2}$;

4) $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$; 5) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; 6) $\int\cos^3 x\,dx$;

7) $\int\sin^6 2x\,dx$; 8) $\int\frac{dx}{\cos^5 3x}$; 9) $\int\frac{dx}{\sin^6 2x}$;

10) $\int sh^3x\,dx$; 11) $\int\frac{dx}{shx\,ch^2x}$; 12)* $\int\frac{dx}{chx}$;

13) $\int 8^x e^x\,dx$; 14) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$; 15) $\int\cos^3 x\sin 2x\,dx$;

16) $\int\frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$; 17) $\int\frac{dx}{4x^2+9}dx$; 18) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$;

19) $\int x\sin 3x\,dx$; 20) $\int x^2\cos x\,dx$; 21) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$;

22) $\int x\,\mathrm{arctg}2x\,dx$; 23) $\int x^2\ln x\,dx$; 24) $\int x^2e^{3x}\ln x\,dx$;

25) $\int \sin x\, e^{2x} dx$; 26) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 27) $\int \sin 3x \cos 2x\, dx$;

28) $\int \sin^3 \cos^4 x\, dx$; 29) $\int \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^4 x}$; 30) $\int \sin^3 x \cos^5 x\, dx$;

31) $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$ (відповідь: $\ln(th^2 x)+C$).

10. Використовуючи різні способи, знайти інтеграли Рімана (визначені інтеграли):

1) $\int_{-1}^{1} x^{2007} \operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x\, dx$; 2) $\int_{1}^{9} (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x})\, dx$;

3) $\int_{3}^{10} \frac{dx}{(3x-2)^4}$; 4) $\int_{-2}^{1} \sqrt{2-x}\, dx$; 5) $\int_{0}^{\pi} \sin 3x\, dx$;

6) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$; 7) $\int_{2}^{9} \sqrt[3]{x-1}\, dx$; 8) $\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

9) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$ (відповідь: $\frac{4}{3}$); 10) $\int_{0}^{1} x e^x\, dx$;

11) $\int_{-1}^{1} \arccos x\, dx$ (відповідь: π);

12) $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx$ (відповідь: $2-\frac{\pi}{2}$).

11. Чи можна обчислити інтеграл $\int_{0}^{3} x\sqrt{1-x^2}\, dx$ шляхом введення заміни $x=\sin t$?

12. Застосування визначеного інтегралу.

1) Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=2x-x^2$ та прямою $y=-x$.

2) Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=x^2-2x+2$, дотичною до неї в т. A(3; 5) і координатними осями.

3) Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2x + 1$ та прямою $x - y - 1 = 0$.

4) Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y = \arccos x$ та координатними осями.

5) Обчислити площу фігури, що міститься між локоном Аньєзі $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}, (a > 0)$ та віссю абсцис.

6) Обчислити площу фігури, що міститься між кривою $y = x^2 e^{-x}$ та віссю абсцис.

7) Коло $x^2 + y^2 = 8$ поділене параболою $y = \dfrac{1}{2}x^2$ на дві частини. Знайти площу кожної із них.

8) Знайти площу фігури, обмеженої астроїдою $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t$ (відповідь: $\dfrac{3}{8}\pi|ab|$).

9) Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a\cos t, y = b\sin t$ (відповідь: $\pi|ab|$).

10) Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої $x = \dfrac{1}{3}t(3 - t^2), y = t^2$ (відповідь: $\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$).

11) Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a\sin 3\varphi$. (відповідь: $\dfrac{\pi a^2}{4}$).

12) Обчислити площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю абсцис (відповідь: $3\pi a^2$).

13) Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$. (відповідь: a^2).

14) Обчислити площу фігури, обмеженої першим і другим витками спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$.

Тема 4. Числові і функціональні (степеневі) ряди та їх збіжність

1. Довести безпосередньо збіжність таких рядів:

1) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$;

2) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}\right) + \ldots$;

3) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\ldots$;

4) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+2)}+\ldots$;

5) $q\cdot\sin\alpha+q^2\cdot\sin 2\alpha+\ldots+q^n\cdot\sin n\alpha+\ldots,\ (|q|<1)$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$.

3. Довести нерівність $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{2}$ та розбіжність гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

4. Довести розбіжність узагальненого гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ при $0<\alpha<1$.

5. Знайти суми рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+m)},\ m\in N$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$.

6. Довести збіжність рядів:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5\cdot 7}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\ldots$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$.

7. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{2}{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^{\frac{n}{2}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$.

8. Використовуючи означення збіжності числового ряду, дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+2}{n+3}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+2}{n+4}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$.

9. Використовуючи ознаки порівняння, дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n\sqrt[3]{n-1}}{n^2+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{3n+2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

10. Довести збіжність рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\frac{1}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n^3}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$;

е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)^{\alpha}$, при $0<\alpha\le 1$ ряд збігається,

при $\alpha>1$ ряд розбігається.

11. Використовуючи ознаку Д'Аламбера, дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+3)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{5^n\cdot n!}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(n!)^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n!}$.

12. Використовуючи ознаку Коші, дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln^n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\left(\frac{2n^2+1}{5n^2+4}\right)^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n3^n}{5^n}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+100}\right)^{n^2}$.

13. Використовуючи інтегральну ознаку Маклорена — Коші, дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{n^3+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n})}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot 3^{\frac{1}{n}}$.

14. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n!}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}+3}{n\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{3}{n+1}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2^n}$.

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-3}}{4n}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^2\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{2n-1}{2n+1}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{(2n)!}$;

л) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n-1}-\sin\frac{1}{n+1}\right)$; м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\arcsin^3\frac{1}{2^n}$.

15. Довести *лему Абеля*. Нехай $\{a_n : a_n\in R, n\ge 1\}, x_0\neq 0$ такі, що послідовність $\{a_n x_0^n : n\ge 1\}$ обмежена. Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n,\ x\in R$ збігається абсолютно для $x\in(-|x_0|,|x_0|)$.

16. Довести, що радіус збіжності рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n,\ x \in R$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^n$ дорівнює 0.

17. Довести, що радіус збіжності рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ дорівнює $+\infty$.

18. Визначити радіус та інтервал збіжності таких рядів і дослідити поведінку в граничних точках інтервалу їх збіжності:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n x^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n x^n$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{4n^2+1}}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n^2+1)\cdot 9^n}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 \cdot 2^n}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2x)^n}{(2n)!}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+x)^n \operatorname{arctg}^n \left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)$;

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$.

19. Знайти суми поданих нижче рядів:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3n+1) x^{3n}$ (відповідь: $\frac{2x^3+1}{(1-x^3)^2}$);

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ (відповідь: $\dfrac{x}{(1-x)^2}$);

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{4n-3}}{4n-3}$ (відповідь: $\dfrac{1}{2}\text{arctgx}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$);

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n3^n}$ (відповідь: $\ln\dfrac{3}{2}$).

Тема 7. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли та їх застосування

1. Обчислити подвійні інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_1^2 (x-y)dy$; 2) $\int\limits_2^4 dy\int\limits_{-1}^1 x^2 dy$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} dy\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x+y)dy$; 4) $\iint\limits_D (x+y)dxdy, \quad x\in[0;2],\ y\in[-1;5]$;

5) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x-y)^2}, \quad x\in[1;2],\ y\in[3;4]$;

6) $\iint\limits_D \ln(x+y)dxdy,\ x\in[1;2],\ y\in[0;1]\cdot$

2. Змінити порядок інтегрування:

1) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)dx$; 2) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$; 4) $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

5) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$; 6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy.$

3. Обчислити інтеграли:

1) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, область D обмежена прямими $x = 0, y = 0, x + y = 14$;

2) $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, область D обмежена лініями

$y=0,\ y=x,\ x+y=2;$

3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, область D обмежена лініями $x=2,\ y=x,\ xy=1;$

4) $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$, область D обмежена лініями $y=x\,\mathrm{tg}x$ і $y=x$;

5) $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, область D обмежена лініями $x=0, y=\pi, y=x$;

6) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, область D — круг $x^2+y^2\le R^2$;

7) $\iint\limits_D ydxdy$, область D — верхній півкруг радіуса R з центром у точці Т(R; 0) (відповідь: $\frac{2}{3}R^3$);

8) $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, область D — пелюстка лемніскати $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2(x^2-y^2),\ x\ge 0$.

4. Використовуючи подвійний інтеграл, обчислити площу області, обмеженої лініями або заданої зазначеними умовами:

1) $4y=x^2-4x,\quad x-y-3=0$; 2) $xy=4,\ x+y=5$;

3) $y^2=10x+25,\quad y^2=-6x+9$; 4) $\frac{x^2}{4}+y^2=1,\ y\le\frac{x}{3}$, (відповідь: π);

5) $\rho=a(1+\cos\varphi),\ \rho=a\cos\varphi,\quad a>0$;

6) $\rho\cos\varphi=1,\ \rho=2$ (не містить полюса);

7) $\rho=a(1-\cos\varphi),\ \rho=a$ (зовні кардіоїди).

5. З використанням подвійного інтеграла обчислити об’єми тіл у просторі, обмежених такими поверхнями:

1) $x+y+z=4, x=2, y=3, x=0, y=0, z=0,$ (відповідь: $\frac{55}{6}$);

2) $z=x+y+1,\ x+y=1,\ x=0, y=0, z=0;$

3) $x+y+z=3,\ x^2+y^2=1,\ z=0;$

4) $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ x=2y^2,\ z=0;$

5) $2z=x^2+y^2=1,\ \ x^2+y^2-ax=0,\ z=0;$

6) $z=x^2-y^2,\ \ x=3,\ z=0;$

7) $x^2+y^2=4,\ z=x+y+10,\ z=0$ (відповідь: 40π).

6. З використанням подвійного інтеграла, обчислити площі таких поверхонь:

1) частину площини $6x+3y+2z-12=0$, що розташована в першому октанті.

2) частину поверхні $x^2=2z$ при $x\le y\le 4x, 0<x<a$ (відповідь: $(a^2+1)^{\frac{3}{2}}-1$);

3) частинуа поверхні циліндра $z^2=4x$, вирізану циліндром $y^2=4x$ і площиною $x=1$ (відповідь: $\frac{16}{3}(\sqrt{8}-1)$);

4) частину поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$, вирізану циліндром $z^2=2y$ (відповідь: $2\sqrt{2}\pi$).

5) частину поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$, обмежена площинами $z=1$ і $z=2$ (відповідь: $3\sqrt{2}\pi$).

7. Обчислити потрійні інтеграли:

1) $\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz$, де G — область, обмежена площинами $x+y+z=a,\ x=0,\ y=0, z=0$;

2) $\iiint\limits_G xdxdydz$, де G — область, обмежена циліндром $x^2+y^2=1$ і площинами $z=0$, $z=3$ (відповідь: 0).

3) $\iiint\limits_G y\cos(x+z)dxdydz$, де G — область, обмежена циліндром $y=\sqrt{x}$ і площинами $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$;

4) $\iiint\limits_G (x+y-z)dxdydz$, де G — піраміда, обмежена площинами $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0, z=-1$.

5) $\iiint\limits_G (x+y+1)dxdydz$, де G — область, обмежена площинами $x=0, y=0, z=1$ та еліптичним параболоїдом $z=x^2+y^2$ при $x\geq 0,\ y\geq 0$;

6) $\iiint\limits_G xyzdxdydz$, де G — область, обмежена поверхнями $y=x^2,\ x=y^2,\ z=xy,\ z=0$;

7) $\iiint\limits_G zdxdydz$, де G — область, обмежена поверхнями $z=x^2-y^2$, $x=3,\ z=0$;

8) $\iiint\limits_G (x+y+z)^2 dxdydz$, де G — область, описується умовами $2z\geq x^2+y^2,\ x^2+y^2+y^2\leq 3$;

9) $\iiint\limits_G (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdydz$, де G — область, яка обмежена поверхнями $z=x^2+y^2,\ z=1$ (вказівка: перейти до циліндричних координат) .

8. Обчислити об'єми тіл у просторі, обмежених поверхнями:

1) $2x+y-3z=6,\ 2x-y=0,\ y=x,\ z=1$;

2) $z=x^2+y^2, z=x^2+2y^2,\ x+y=0,\ y=2x,\ x=1$;

3) $x+y^2+z^2=0,\ x=-2$;

4) $z=x^2+y^2,\ 2x+3y+4z=12$;

5) $3x-y^2-z^2=0,\ x^2+y^2+z^2=4$ (область, що міститься всередині параболоїда);

6) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\ z=12-2x-4y,\ z=1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Валєєв К. Г. та ін.* Вища математика: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисцип. — К.: КНЕУ, 1999.
2. *Вища* математика: Зб. задач / За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. — К.: АСК, 2001. — 480 с.

3. *Вища* математика: Підручник: У 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003.
4. *Городній М. Ф., Митник Ю. В., Кашпіровський О. І.* Основи математичного аналізу. — К.: КМ Академія, 2004. — Ч. 1.
5. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. — К.: Либідь, 1993. – Ч. 1. — 320 с.
6. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. — К.: Либідь, 1993. – Ч. 2. — 304 с.
7. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика. — К.: Вища шк., 1993. — 648 с.
8. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. — М.: Наука, 1979. — 720 с.
9. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій та функціонального аналізу. — К.: Вища шк., 1974. — 456 с.
10. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1990. — Т. 1. — 528 с.
11. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1990. — Т. 2. — 544 с.
12. *Рудин У.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1982. — 520 с.

Додаткова

1. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1975.
2. *Ванагас В., Гинзбург В., Манько В. и др.* Математический анализ. — М.: Итоги ВИНИТИ 22, 1984. — 256 с.
3. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М: Наука, 1977. — 228 с.
4. *Дьедоне Ж.* Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964. — 400 с.
5. *Задачи* и упражнения по математическому анализу / Под ред. Б. П. Демидовича. — М.: Наука, 1968.
6. *Зорич В. А.* Математический анализ. — М.: Наука, 1981, 1984. — Т. 1, 2.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — М.: Высш. шк., 1981. — Т. 1, 2.
8. *Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Калайда А. Ф.* Математический анализ: В 3 ч. — К.: Выща шк., 1983.
9. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1963.

10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969. — Т. 1, 2, 3.
11. *Jean-Paul P.* Mathematical analysis during the 20th century. — New York: Oxford University Press, 2001. — 428 p.
12. *Godement R.* Analyse methematique. I. — Berlin: Springer-Verlag, 1998.
13. *Godement R.* Analyse methematique. II. — Berlin: Springer-Verlag, 1998.
14. *Godement R.* Analyse methematique. III. — Berlin: Springer-Verlag, 2002.
15. *Godement R.* Analyse methematique. IY. — Berlin: Springer-Verlag, 2003.
16. *Kaczor W. J. and Nowak M. T.* Problems in mathematical analysis. I. — AMS, Providence, 2000. — 368 p.
17. *Kaczor W. J. and Nowak M. T.* Problems in mathematical analysis. II. — AMS, Providence, 2001. — 398 p.
18. *Kaczor W. J. and Nowak M. T.* Problems in mathematical analysis. III. — AMS, Providence, 2003. — 356 p.
19. *Lewin J.* An interactive introduction to mathematical analysis (with 1 CD-ROM). — Cambridge:, Cambridge University Press, 2003. — 492 p.
20. *Pugh Ch. Ch.* Real mathematical analysis. — New York: Springer-Verlag, 2002. — 437 p.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *Л. С. Тоболіч*
Комп’ютерне верстання *К. П. Махиня*

Зам. № ВКЦ-3561

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП