МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ
з дисципліни
"ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА"
для самостійного опрацювання
(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2009

Підготовлено доцентом кафедри математики *І. В. Степахно*

Затверджено на засіданні кафедри математики (протокол № 1 від 30.08.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Степахно І. В. Додаткові розділи з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для самостійного опрацювання (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2009. — 66 с.

Додаткові розділи містять пояснювальну записку; питання з декількох розділів "Теорії ймовірностей та математичної статистики", які потребують додаткових пояснень; приклади роз'яснювальних завдань та умови задач, відповіді, які розташовані у кінці брошури, а також список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Самостійна робота студентів є складовою навчального процесу, важливим чинником, який формує вміння навчатися, сприяє активізації засвоєння студентом знань та набуття необхідних навичок.

Самостійна робота є основним засобом опанування навчального матеріалу у позааудиторний час. Підвищується значення та статус самостійної роботи при запровадженні кредитно-модульної технології навчання, за якої скорочується обсяг аудиторної роботи студентів.

Мета самостійної роботи — сприяти засвоєнню в повному обсязі навчальної програми та формуванню самостійності як особистісної риси та важливої професійної якості, сутність якої полягає в умінні систематизувати, планувати та контролювати власну діяльність.

У пропонованих методичних рекомендаціях розглянуто питання з кількох розділів предмета “Теорія ймовірностей та математична статистика”, які потребують окремих пояснень та визначень, оскільки аудиторних часів на це не вистачає.

З кожного питання надано основні теореми і твердження, приклади розв’язання задач, відповіді на пропоновані варіанти задач.

Список скорочень і позначень

$P(A)$ — ймовірність події A

в.в. — випадкова величина

н.в.в. — незалежна випадкова величина

н.о.р.в.в. — незалежні однаково розподілені випадкові величини

$F_\xi(x)$, $F(x)$ — функції розподілу в.в. ξ

$P_\xi(x)$, $P(x)$ — щільність розподілу в.в. ξ

м.с. — математичне сподівання

M_ξ — м.с.в.в. ξ;

D_ξ — дисперсія в.в. ξ

ЗВЧ — закон великих чисел

ЦГТ — центральна гранична теорема

$N(a, \sigma^2)$ — нормальний розподіл в.в. з м.с. a і дисперсією σ^2

$\hat{\theta}$ — оцінка параметра θ

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ — вибіркове середнє

1. Геометрична ймовірність

Поняття геометричної ймовірності полягає у наступному.

Нехай у деякій обмеженій області Ω n-вимірного евклідового простору навмання вибирають точку.

Ймовірність того, що точка буде узята з області $A \subset W$, дорівнює:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)},$$

де $mes(\Omega)$ — лебегова міра, це може бути, наприклад, довжина, площа, об'єм тощо.

1.1. На відрізку довжиною l навмання взяти дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує $k \cdot l$, $0 < k < 1$?

1.2. Яка ймовірність того, що з трьох навмання узятих відрізків довжиною не більше l можна побудувати трикутник?

1.3. На відрізку $[P, Q]$ довжиною l вибрано навмання дві точки A і B. Знайти ймовірність того, що точка A буде ближче до точки B, ніж до точки P.

1.4. У коло вписано квадрат. Знайти ймовірність того, що точка, кинута усередину кола, попаде усередину квадрата.

1.5. Задача Бюффона. На площині проведено дві паралельні прямі, відстань між якими дорівнює $2a$. На цю площину навмання кидають голку довжиною $2l$ $(l < a)$. Яка ймовірність того, що голка буде перетинати одну з прямих?

1.6. Усередині квадрата з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ навмання береться точка $M(x, y)$.

Знайти ймовірність наступної події:

$A = \{(x, y) : \max(x, y) < a,\ a > 0\}$.

1.7. Усередині квадрата з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ навмання береться точка $M(x, y)$.

Знайти ймовірність наступної події:

$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ a > 0\}$.

1.8. У квадрат з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ навмання кинута точка.

Нехай (ξ, η) — її координати. Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + \xi x + \eta = 0$ дійсні.

1.9. У середині відрізка $[-1, 2]$ навмання узяти два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більше 1, а добуток менше 1?

1.10. Навмання узято два невід'ємних числа x і y, кожне з яких не більше 2. Знайти ймовірність того, що добуток $x \cdot y$ буде не більше 1, а відношення y/x — не більше 2.

1.11. На площині проведено паралельні прямі, відстань між якими дорівнює 1,5 см і 8 см. На цю площу кидають навмання коло радіуса 2,5 см. Яка ймовірність того, що коло не буде перетинати ні одну з ліній?

Приклад розв'язання задачі

Приклад 1. На відрізку довжиною l навмання вибирають дві точки.

Яка ймовірність того, що з трьох відрізків, на які поділений перший відрізок цими точками, можна побудувати трикутник?

Розв'язання. Нехай x і y — довжини будь-яких відрізків, отриманих діленням відрізка довжиною l на три частини.

$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l,\ 0 \le x + y \le l\}$.

Трикутник можливо побудувати з отриманих відрізків, якщо вони потрапляють в область

$A = \{(x, y) : 0 \le x \le \frac{l}{2},\ 0 \le y \le \frac{l}{2},\ x + y \ge \frac{l}{2}\}$.

Площа Λ: $mes\ \Omega = \frac{l^2}{2}$ (рис. 1).

Площа області A: $mes\ A = \frac{l^2}{8}$ (рис. 2).

Тому $P(A) = \frac{mes\ A}{mes\ \Omega} = \frac{l^2 \cdot 2}{8 \cdot l^2} = \frac{1}{4}$.

Відповідь: $P(A) = \frac{1}{4}$.

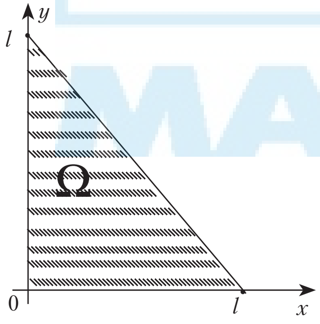


Рис. 1

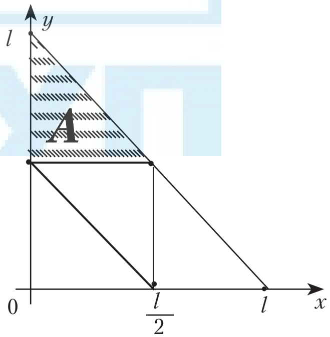


Рис. 2

2. Незалежність подій

Незалежними називають такі події A і B, для яких виконується рівність:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються **незалежними** у сукупності, якщо

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_\kappa}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdot ... \cdot P(A_{i_\kappa})$$

для будь-яких $\kappa = 1, 2, ..., n$ і $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_\kappa \le n$.

Якщо ця рівність виконується при $\kappa = 2$, то події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються **попарно незалежними**.

2.1. Довести, якщо A і B незалежні, то незалежні A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

2.2. Події A і B_1, A і B_2 незалежні, причому B_1 і B_2 несумісні.

Довести, що події A і $B_1 \cup B_2$ незалежні.

2.3. Якщо події A, B, C незалежні в сукупності, то події A і $B \cup C$, а також A і $B \setminus C$ незалежні.

Довести це.

2.4. Нехай A і B, A і C незалежні і $B \supset C$. Тоді події A і $B \setminus C$ незалежні.

Довести це.

2.5. Послідовно кинуто три монети. Визначіть, залежні чи незалежні події:

A = {випав “герб” на першій монеті};

B = {випала хоча б одна “решка”}.

2.6. Кинуто монету та кубик. Визначіть, залежні чи незалежні події:

A = {випав “герб”};

B = {випала парна кількість очок}.

2.7. Кидають два кубики. Розглянемо випадковість подій:

A = {на першому кубику випала парна кількість очок};

B = {на другому кубику випала непарна кількість очок};

C = {сума очок на кубиках непарна}.

Довести, що події A, B, C попарно незалежні, але не є незалежними у сукупності.

2.8. Події $A_1, A_2, ..., A_n$ незалежні в сукупності і відомо, що

$$P(A_\kappa) = P_\kappa.$$

Яка ймовірність того, що:

а) відбудеться хоча б одна з подій A_i, $i = \overline{1,n}$, б) не відбудеться жодна з подій A_i, $i=\overline{1,n}$,

в) відбудеться одна і тільки одна з подій A_i, $i=\overline{1,n}$?

Приклад розв'язання задачі

Приклад 2.

Нехай $P(A) > 0$ і $P(B/\overline{A}) = P(B/A)$.

Довести, що A і B незалежні.

Розв'язання. Оскільки $P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}$,

а $P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ і $\overline{A}\cap B = B\setminus(A\cap B)$, то

$P(B\setminus(A\cap B))\cdot P(A) = P(A\cap B)\cdot(1-P(A))$,

тобто $P(A)\cdot P(B) - P(A\cap B)\cdot P(A) = P(A\cap B) - P(A\cap B)\cdot P(A)$,

звідки і випливає, що

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B).$$

Отже, A і B незалежні, що і треба було довести.

3. Схема Бернуллі

Проводяться незалежні іспити, у кожному з яких можливі два результати: успіх з ймовірністю p, або невдача з ймовірністю $q = 1 - p$.

Якщо μ_n — кількість успіхів в n незалежних іспитах Бернуллі, то

$$P_n(m) = P\{\mu_n = m\} = C_n^m\ P^m\ q^{n-m},\ m = 0, 1, ..., n.$$

Цей вираз називають **теоремою Бернуллі**.

Локальна теорема Муавра–Лапласа

Якщо $n\to\infty$, $p = \mathrm{const}$, $0 < p < 1$, то

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot\exp\{-\frac{x^2}{2}\}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),\ \text{де } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1)$$

Інтегральна теорема Муавра–Лапласа

Якщо $n\to\infty$, $p = \mathrm{const}$, $0 < p < 1$, то

$$P\{x_1 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x_2\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x^1}^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (2)$$

Рівномірно по x_1, x_2 $(-\infty \le x_1 \le x_2 \le \infty)$.

Теорема Пуассона

Якщо $p = p_n \to 0$ і $np_n \to \lambda$ при $n \to \infty$ $(0 < \lambda < \infty)$, то

$$P_n(m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, m = 0, 1, \ldots \qquad (3)$$

Праві частини формул (1), (2) дають добрі наближення, коли n достатньо велика, а p і q не дуже близькі до нуля. Найчастіше нормальним наближенням користуються при $npq > 20$.

Формула (3) дає добре наближення, якщо n велике, а p — мале.

Звичайно $p < 0,1$; $npq \le 9$.

Таблиці функції Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{і функції} \quad \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

наведені у додатках: табл. 1, табл. 2 наприкінці цього видання.

3.1. Нехай m_0 — найбільш імовірніше число успіхів у схемі Бернуллі з імовірністю успіху p при n іспитах, тобто таке значення m, для якого ймовірність $P_n(m)$ максимальна.

Довести, що $np - q \le m_0 \le np + p$.

3.2. Гральну кістку кидають 6 разів. Знайти імовірність того, що двічі з’явиться кількість очок, кратна 3.

3.3. Батарея зробила 14 пострілів по об’єкту, імовірність влучення в який дорівнює 0,2. Знайти:

а) найімовірнішу кількість влучень та його ймовірність;

б) імовірність знищення об’єкта, якщо для його знищення потрібно не менше 4 влучень.

3.4. Імовірність влучення у ціль при кожному пострілі дорівнює 0,8. Скільки потрібно зробити пострілів для того, щоб найімовірніша кількість влучень дорівнювала 20?

3.5. Двоє кидають монету n разів кожний. Знайти ймовірність того, що в них випаде однакова кількість гербів.

3.6. Імовірність влучення у ціль при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайти ймовірність влучення у ціль двох і більше куль, якщо кількість пострілів дорівнює 5000.

3.7. Каналом зв’язку передається 1000 знаків. Кожен знак може бути викривлений незалежно від останніх з імовірністю 0,004. Знайти ймовірність того, що буде викривлено не більше 3 знаків.

3.8. Імовірність появи успіху у кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успіх настане: а) рівно 75 разів; б) рівно 85 разів?

3.9. Імовірність бракованого виробу дорівнює 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10000 узятих навмання виробів бракованих буде не більше 60?

3.10. Імовірність виходу з ладу за термін τ одного з приладів дорівнює 0,1.

Визначити ймовірність того, що за термін τ зі 100 приладів вийдуть з ладу:

а) не менше 20 приладів;

б) не менше 15 приладів;

в) від 6 до 18 приладів.

Приклади розв'язання задач

Приклад 3. Імовірність випуску бракованого виробу дорівнює 0,02.

Чому дорівнює ймовірність того, що у партії зі 100 виробів бракованих буде не більше 3?

Розв'язання. Скористаємося теоремою Пуассона.

У цьому прикладі $n = 100$, $p = 0{,}02$, $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}02 = 2$.

Шукана ймовірність дорівнює:

$$P\{\mu_n \le 3\} = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + P_n(3) \approx e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4e^{-2}}{2!} + \frac{8e^{-2}}{3!} \approx$$
$$\approx 0{,}8571.$$

Приклад 4. Монету підкидають 100 разів. Яка ймовірність того, що загальна кількість випадання "гербу" перебуває у межах від 45 до 55?

Розв'язання. За умовою задачі $n = 100$, $p = q = 0{,}5$, $npq = 25$, $np = 50$.

Скористаємось інтегральною теоремою Муавра–Лапласа.

Тоді

$$P\{45 < \mu_n < 55\} = p\left\{\frac{45-50}{\sqrt{25}} < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{55-50}{\sqrt{25}}\right\} \approx 2\phi(1) = 0{,}6826.$$

4. Коефіцієнт кореляції

Сумісна функція розподілу в.в. $\xi_1, ..., \xi_n$ — це функція $F(x_1, ..., x_n) = \{\xi_1 < x_1, ..., \xi_n < x_n\}$ для будь-яких дійсних $x_1, ..., x_n$.

Якщо в.в. ξ і η приймають дискретну множину значень $x_1, x_2, ..., x_n$ і $y_1, y_2, ..., y_n$ відповідно, то **сумісним розподілом** називається набір чисел

$$P_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_i\}, i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m.$$

В.в $\xi_1, ..., \xi_n$ — **незалежні**, якщо

$$F(x_1, ..., x_n) = \prod_{\kappa=1}^{n} F_k(x_\kappa),$$

де $F_\kappa(x) = P\{\xi_\kappa < x\}$ — функція розподілу ξ_κ, $\kappa = 1, ..., n$.

Зв'язок між двома в.в. з сумісним розподілом імовірностей характеризує коваріація та коефіцієнт кореляції.

Коваріацією в.в. ξ і η називають $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta)$.

Коефіцієнт кореляції в.в. ξ та η з дисперсіями D_ξ і D_η знаходять за формулою

$$\rho(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\xi, \eta) \,/\, \sqrt{D_\xi} \cdot \sqrt{D_\eta}.$$

Якщо $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$ або $\rho(\xi, \eta) = 0$, то в.в. називають некорельованими.

Мають місце такі твердження:

I) $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$;

II) якщо ξ і η незалежні, то $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$ і $\rho(\xi, \eta) = 0$;

III) якщо $\rho(\xi, \eta) = 1$, то з ймовірністю 1 $\eta = a\xi + b$, де a і b — константи.

4.1. Кидають два кубики. Нехай ξ — кількість очок на першому, η — на другому.

Довести, що в.в. ξ і η незалежні.

4.2. Кидають два кубики. Нехай ξ — кількість очок на першому, η — мінімальне з двох очок.

Знайти: а) сумісний розподіл ξ і η; б) $\rho(\xi, \eta)$.

4.3. В.в. ξ і η незалежні і $p\{\xi = \pm 1\} = \dfrac{1}{2}$, а $p\{\eta = \pm 1\} = \dfrac{1}{4}$, $p\{\eta = 0\} = \dfrac{1}{2}$. Чи будуть в.в. $\xi\eta$ і η незалежними? Знайти $\rho(\xi\eta, \eta)$.

4.4. Нехай ξ і η — н.о.р.в.в. і $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\eta = \xi_1 - \xi_2$. Довести, що $\rho(\xi, \eta) = 0$.

4.5. Нехай ξ і η — відповідно сума та різниця очок, які з'явилися при киданні двох кубиків. Довести, що $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Чи будуть ξ і η незалежними?

4.6. В.в. ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[-a, a]$, знайти коефіцієнти кореляції між:

а) ξ і ξ^2; б) ξ і ξ^3.

4.7. В.в. ξ і η незалежні і мають однаковий розподіл, $M\xi = M\eta = a$, $D\xi = D\eta = \sigma^2$.

Знайти $\rho(\xi_1, \xi_2)$, де $\xi_1 = \alpha\xi + \beta\eta$, $\xi_2 = \alpha\xi - \beta\eta$.

4.8. Нехай ξ, η і ζ — попарно некорельовані в.в. Чи можна стверджувати, що некорельованими будуть в.в.: а) ξ і $\zeta + \eta$; б) ξ і $\zeta\eta$?

Приклад розв'язання задачі

Приклад 5. Нехай ξ приймає значення ± 1, ± 2, кожне з імовірністю $\frac{1}{4}$, а $\eta = \xi^2$.

Знайти: а) сумісний розподіл ξ та η; б) $r(\xi, \eta)$. Чи будуть ξ і η незалежними?

Розв'язання. В.в. η буде приймати два значення 1 і 4 з рівними ймовірностями $\frac{1}{2}$. Знайдемо сумісний розподіл ξ і η:

$$P\{\xi = 1, \ \eta = 1\} = P\{\xi = 1, \ \eta = 1\} =$$

$$P\{\xi = -1, \ \eta = 1\} P\{\xi = -2, \ \eta = 1\} = ($$

$$P\{\xi = 1, \ \eta = 4\} = P\{\xi = -1, \ \eta = 4\} = ($$

$$P\{\xi = 2, \ \eta = 4\} = P\{\xi = -2, \ \eta = 4\} = \frac{1}{4}$$

В.в. ξ і η будуть незалежними, тому що

$$0 = \rho\{\xi = 1, \ \eta = 4\} \neq p\{\xi = 1\} \ \ p\{\eta = 4\} =;$$

$$M\xi = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 0; \ \ M\eta = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$D\xi = \frac{5}{2}, \ \ D\eta = \frac{25}{4}; \ \ \operatorname{cov}(\xi_1 \eta) = 1 \ \ (1 - \frac{5}{2}) \cdot \frac{1}{4} - 1 \ \ (1 - \frac{5}{2}) \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot (4 - \frac{5}{2}) \times$$

$$\times \frac{1}{4} - 2 \ \ (4 - \frac{5}{2}) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Отже, $r(\xi, \eta) = 0$.

5. Згортка функцій розподілу

Нехай ξ_1 і ξ_2 — н.в.в. з функціями розподілу $F_{\xi_1}(x)$ і $F_{\xi_2}(x)$ відповідно.

Функцією розподілу їх суми $\eta = \xi_1 + \xi_2$ є згортка $F_{\xi_1}(x)$ і $F_{\xi_2}(x)$, тобто

$$P\{\eta < x\} = F_{\xi_1} \square F_{\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_1}(x-u)\, dF_{\xi_2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(x-u)\, dF_{\xi_1}(u).$$

Якщо хоча б одна з в.в. ξ_1 або ξ_2 має щільність, то η має щільність розподілу:

$$P_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(x-u)\, dF_{\xi_2}(u)$$

або

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_2}(x-u)\, dF_{\xi_1}(u).$$

Якщо ξ_1 і ξ_2 мають щільності розподілу, то

$$P_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(x-u)\, P_{\xi_2}(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_2}(x-u)\, P_{\xi_1}(u)\, du.$$

Для цілочислових випадкових величин:

$$P\{\xi_1 + \xi_2 = n\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_1(m)\, P_2(n-m),$$

$P_i(m) = P\{\xi_i = m\}$, $i = 1, 2$.

5.1. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н.в.в., рівномірно розподілені на $[-1, 1]$. Знайти функцію розподілу в.в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

5.2. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н.о.р.в.в. з щільністю розподілу

$$p(x) = \frac{1}{2}\exp\{-|x|\}.$$

Знайти щільність розподілу $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

5.3. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н.в.в., які приймають значення $0, 1, ..., n$, причому

$$P\{\xi_1 = i\} = P\{\xi_2 = i\} = \frac{1}{n+1},\ i = 0, 1, ..., n.$$

Знайти розподіл в.в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

5.4. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н.в.в., які мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2.

Довести, що в.в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

5.5. В.в. ξ_1 і ξ_2 — незалежні і мають нормальні розподіли $N(a_1, \sigma_1^2)$ і $N(a_2, \sigma_2^2)$.

Довести, що в.в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$ має нормальний розподіл $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

5.6. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — н.о.р.в.в., які мають показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$.

Довести, що в.в. $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ має щільність розподілу

$$P_{S_n}(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x},\ x \geq 0,\ P_{S_n}(x) = 0,\ x < 0,$$

(розподіл Ерланга).

5.7. Нехай $\xi_1, ..., \xi_n$ — н.о.р.в.в., які мають нормальний розподіл $N(0,1)$.

Довести, що щільність в.в.

$\chi_n^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2$ має вигляд

$$P_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(розподіл χ^2 з n степенями вільності).

5.8. Нехай $\xi, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — н.о.р.в.в., які мають нормальний розподіл $N(0,1)$. Довести, що щільність розподілу в.в.

$t = \dfrac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}$ має вигляд:

$$P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}},$$

(розподіл Стьюдента з n степенями вільності).

У задачах 5.7 і 5.8

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx.$$

5.9. Знайти щільність розподілу суми $\xi_1+\xi_2$, якщо ξ_1 і ξ_2 — незалежні, ξ_1 має нормальний розподіл на [0, 1], а ξ_2 — рівномірний розподіл на [0, 2].

5.10. Знайти щільність розподілу суми н.в.в. ξ_1 і ξ_2, якщо ξ_1 має рівномірний розподіл на [–1, 1], а ξ_2 має показники розподілу з параметром λ.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 6. В.в. ξ_1 і ξ_2 — незалежні і рівномірно розподілені на відрізку [0, 1]. Знайти функцію розподілу в.в. $\eta = \xi_1+\xi_2$.

Розв'язання.

Функція розподілу в.в. ξ_1 і ξ_2 має вигляд:

$$F_{\xi_1}(x) = F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Зазначимо, що при $x < 0$, $F_\eta(x) = 0$, і при $x > 2$ $F_\eta(x) = 1$.

Якщо $0 \le x \le 1$, то

$$F_\eta(x) = \int_0^x (x-u)du = \frac{x^2}{2},$$ а при $1 < x \le 2$

$$F_\eta(x) = \int_0^{x-1} du + \int_{x-1}^1 (x-u)\,du = 1 - \frac{(2-x)^2}{2}.$$

6. Твірні функції

Твірною функцією в.в. ξ, яка набуває цілих невід'ємних значень, називається функція комплексної змінної:

$$P(Z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} Z^\kappa p\ \{\xi = \kappa\},\ |z| \le 1, \text{ тобто } P(z) = Mz^\xi.$$

Якщо твірна функція відома, то розподіл знаходять за допомогою формули

$$P_\kappa = P\{\xi = \kappa\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{P(z)}{Z^{\kappa+1}} dz, \text{ або}$$

$$P_\kappa = \frac{1}{\kappa!} P^{(\kappa)}(0).$$

Таким чином, відображення

$\{P_\kappa\} \to P(z)$, $|z| \le 1$, є взаємно однозначним.

Якщо $\xi_1, ..., \xi_n$ — н.в.в., які приймають цілі невід'ємні значення; $P_1(z), ..., P_n(z)$ — відповідні твірні функції, а $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, тоді твірна функція в.в. S_n дорівнює $P(z) = P_1(z) \cdot ... \cdot P_n(z)$.

6.1. Знайти твірну функцію:

а) в.в. ξ, яка має геометричний розподіл, тобто

$P\{\xi = \kappa\} = q^\kappa p, \kappa = 0, 1, ...; q + p = 1;$

б) в.в. ξ, яка має розподіл Пуассона з параметром λ,

$$P\{\xi = \kappa\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}, \kappa = 0, 1, ...;\ \lambda > 0.$$

6.2. Знайти розподіли, яким відповідають наступні твірні функції:

а) $\frac{1}{3}(1+z+z^2)$;

б) $(1+\frac{1-z}{z}\ln(1-z))$;

в) $\frac{1-Z^{N+1}}{(N+1)\ (1-Z)}$.

6.3. Довести, що сума двох н.в.в., які мають розподіл Пуассона, також має розподіл Пуассона. Чи справедливе таке твердження для біноміального, геометричного розподілів?

6.4. Нехай в.в. ξ і η приймає цілі невід'ємні значення і

$$P\{\xi = n, \eta = \kappa\} = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} C_n^\kappa (1-p)^{n-\kappa}, & \text{при } n \ge \kappa \ge 0 \\ 0, & \text{при } \kappa > n, \end{cases}$$

де $\lambda > 0$, $0 \le p \le 1$.

Знайти сумісну твірну функцію в.в. ξ і η, тобто

$P(Z_1, Z_2) = M Z_1^{\xi} \cdot Z_2^{\eta}$, $|Z_1| \le 1$, $|Z_2| \le 1$ і $\rho(\xi, \eta)$.

6.5. Нехай ξ і η — н.в.в., які приймають цілі невід'ємні значення з твірними функціями $P_1(z)$ і $P_2(z)$.

Знайти сумісну твірну функцію в.в. ξ і $\gamma = \xi + \eta$.

6.6. Нехай P_n — імовірність того, що кількість появи події A у n випробуваннях ділиться на 3, а f_n — імовірність того, що кількість появи події A у n випробуваннях при діленні на 3 дає залишок 1.

Вивести для P_n і f_n систему рекурентних відношень та, використовуючи її, знайти твірні функції для послідовностей P_n і f_n, $n = 0, 1, ...$.

Імовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює q.

6.7. Нехай ξ і η — в.в.,

$P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{2}$,

$P\{\eta = 0\} = P\{\eta = 3\} = \frac{1}{8}$,

$P\{\eta = 1\} = \frac{1}{4}$; $P\{\eta = 2\} = \frac{1}{2}$.

Довести, що не існує в.в. ζ, незалежної від ξ і такої, що $\xi + \zeta = \eta$.

6.8. Нехай ξ і η — в.в.,

$p\{\xi = 0\} = p\{\xi = 2\} = \frac{1}{4}$,

$p\{\xi = 1\} = \frac{1}{2}$;

$p\{\eta = 0\} = p\{\eta = 1\} = p\{\eta = 2\} = \frac{3}{10}$,

$p\{\eta = 3\} = \frac{1}{10}$.

Довести, що не існує в.в. ζ, незалежної від ξ і такої, що $\xi + \zeta = \eta$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 7. Знайти твірну функцію біноміального розподілу з параметрами n і p, тобто

$P\{\xi = \kappa\} = C_n^{\kappa} p^{\kappa} q^{n-k}$, $\kappa = 0, 1, ..., n$; $q = 1 - p$.

Розв'язання.

$$P(z) = \sum_{\kappa=0}^{n} z^{\kappa} C_n^{\kappa} p^{\kappa} q^{n-k} = (pz+q)^n.$$

Приклад 8. Нехай p_n — імовірність того, що кількість появи події A у n випробуваннях **парна**.

Вивести для p_n рекурентне співвідношення та знайти твірну функцію для послідовності p_n. Імовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює q.

Розв'язання.

$P_n = P_{n-1}(1 - q) + q(1 - P_{n-1})$, $n \geq 1$, $P_0 = 1$.

Позначимо $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n$. Тоді

$P(z) - 1 = (1-q)\, z\, P(z) + \dfrac{q\cdot z}{1-z} - q \,\square\, z \,\square\, P(z)$, і звідки

$P(z) = \dfrac{1-z\ (1-q)}{(1-z)\ (1-z(1-2q))}$.

7. Характеристичні функції

Характеристичною функцією в.в. ξ називається функція

$$\square(t) = \mathrm{M}e^{\,it\xi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x),\ -\infty < t < \infty .$$

Характеристична функція будь-якої в.в. має наступні властивості:

1) $\square\,(0) = 1,\ |(t)| \le\ 1$ для всіх t;

2) $\square$ (t) рівномірно неперервна на $(-\infty, +\infty)$;

3) $\square$ (t) невід'ємно визначена, тобто для будь-яких комплексних чисел $Z_1, .., Z_n$ та будь-яких дійсних чисел $t_1, .., t_n$, $n \ge 1$

$$\sum_{k,j=1}^{n} z_k \overline{z_j} \varphi(t_k - t_j) \ge 0;$$

4) характеристична функція суми н.в.в. дорівнює добутку характеристичних функцій.

Теорема Бохнера—Хінчіна

Для того, щоб $\square(t)$ була характеристичною функцією деякої в.в., необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною, невід'ємно визначеною і $\square(0) = 1$.

Теорема Пойа

Якщо $\square(t)$ — неперервна, парна, опукла вниз функція і така, що: $\square(t) \ge 0$, $\square(t) = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} \square(t) = 0$, то $\square(t)$ — характеристична функція.

Теорема Марцинкевича

Якщо характеристична функція має вигляд $\exp\{P(t)\}$, де $P(t)$ — поліном, то степінь полінома не може бути більше двох.

Формула обернення:

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it}\ \varphi(t)dt ,$$

де x_1, x_2 — точки неперервності.

Теорема неперервності

Послідовність функцій розподілу $\{F_n(x)\}$, $n = 1, 2...$ слабо збігається до деякої функції розподілу $F(x)$ (тобто збіжність у точках неперервності $F(x)$) тоді і тільки тоді, коли відповідна послідовність характеристичних функцій $\{\varphi_n(t)\}$ збігається до неперервної у нулі функції $\varphi(t)$. При цьому $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$ та збіжність $\varphi_n(t)$ до $\varphi(t)$ рівномірна на кожному кінцевому інтервалі.

7.1. Знайти характеристичну функцію:

а) в.в. ξ, яка має розподіл Пуассона з параметром λ;

б) в.в. ξ, яка має біноміальний розподіл з параметром n і p;

в) в.в. ξ, яка має геометричний розподіл з параметром p.

7.2. Знайти характеристичну функцію в.в. ξ, яка має:

а) рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$:

$$P_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \,\overline{\in}\, [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \end{cases};$$

б) показники розподілу з параметром λ:

$$P_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \end{cases};$$

в) двосторонні показники розподілу:

$$P_\xi(x) = \frac{1}{2}\exp\{-|x|\};$$

г) розподіл Коші:

$$P_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2},\ a>0.$$

7.3. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н.о.р.в.в. з характеристичною функцією $\varphi(t)$. Знайти характеристичну функцію в.в. $\xi_1 - \xi_2$.

7.4. Знайти розподіли, яким відповідають наступні характеристичні функції:

а) $\exp\{-t^2\}$; б) $\dfrac{\sin t}{t}$; в) $\exp\{-|t|\}\cos t$.

7.5. Які з наведених нижче функцій є характеристичними:

а) $\sin t$; б) $\dfrac{1}{2}(1+\cos t)$; в) e^{-t^4}, г) $\cos t^2$; д) $\begin{cases} 1-|t|, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$; е) $\exp\{2(e^{it}-1)\}$.

7.6. Використовуючи характеристичні функції, розв'язати задачу 5.4.

7.7. Використовуючи характеристичні функції, розв'язати задачу 5.5.

7.8. В.в. ξ розподілена за законом Пуассона з параметром λ. Знайти $\lim\limits_{\lambda\to\infty} P\left\{\frac{\xi-\lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right\}$.

7.9. Нехай ξ — в.в., яка має розподіл Коші. Чи існують дві н.в.в. ξ_1 і ξ_2 такі, що $\xi = \xi_1 + \xi_2$ і одна з них має рівномірний розподіл на деякому відрізку?

7.10. Довести, що якщо $\varphi(t)$ — характеристична функція, то і функція $\exp\{\varphi(t) - 1\}$ теж є характеристичною.

Приклади розв'язання задач

Приклад 9. Знайти характеристичну функцію нормального розподілу $N(a, \sigma^2)$.

Розв'язання.

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\}dx.$$

Зробимо заміну змінної: $z = \frac{x-a}{\sigma}$, тоді

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{ita - \frac{1}{2}(z - it\sigma)^2 - \frac{t^2\sigma^2}{2}\}\,dz = \exp\{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}\}.$$

Приклад 10. Довести, що при кожному натуральному n функція $\cos^n(t)$ є характеристичною.

Розв'язання.

Зауважимо, що в.в. ξ, яка приймає два значення 1 і -1 з імовірністю $\frac{1}{2}$, має характеристичну функцію:

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t.$$

Нехай тепер ξ_1, ..., ξ_n — п.н.о.р.в.в., кожна з яких приймає значення 1 і −1 з імовірністю $\frac{1}{2}$. Тоді характеристична функція в.в. $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ буде

$$\text{j}_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \text{j}_{\xi_i}(t) = \cos^n(t).$$

8. Закон великих чисел

Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ послідовність незалежних випадкових величин з кінцевими математичними сподіваннями $a_i = M\xi_i$, $i \geq 1$. Кажуть, що для цієї послідовності виконується закон великих чисел (ЗВЧ), якщо $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \to 0,\ n \to \infty$ за ймовірністю, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} p\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Теорема Хінчіна

Якщо $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.о.р.в.в. з кінцевими м.с., то для неї виконується ЗВЧ.

Теорема Чебишева

Якщо $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.в.в. таких, що $D\xi_k \leq C$, $к \geq 1$, то для неї виконується ЗВЧ.

Теорема Маркова

Якщо $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.в.в. таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k-1}^{n} \xi_k\right)_n = 0$, то для неї виконується ЗВЧ.

Наслідок теореми Маркова

Якщо $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.в.в. таких, що $M\xi^2{}_n < \infty$, $n \geq 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\xi_n = 0$, то для неї виконується ЗВЧ.

8.1. Встановити, чи будуть виконані достатні умови застосування ЗВЧ для послідовності н.в.в. з розподілами:

а) $P\{\xi_n = \pm 2^n\} = 2^{-(2n+1)}$, $\qquad P\{\xi_n = 0\} = 1 - 2^{-2n}$;

б) $P\{\xi_n = \pm\sqrt{n}\} = \dfrac{1}{2n}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - \dfrac{1}{n}$;

в) $P\{\xi_n = \pm n\} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - \sqrt{n}$;

г) $P\{\xi_n = \pm n\} = \dfrac{1}{2n^2}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - \dfrac{1}{n^2}$;

д) $P\{\xi_n = \pm n\} = \dfrac{1}{4}$, $P\{\xi_n = 0\} = \dfrac{1}{2}$;

е) $P\{\xi_n = \pm n\} = 2^{-n}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - 2^{-n+1}$;

є) $\mathrm{P}\{\xi_n = \pm\sqrt{\ln n}\} = \dfrac{1}{2}$.

8.2. При яких значеннях α для послідовності н.в.в. $\xi_1, \xi_2, ..,$ таких, що $P\{\xi_n = \pm n^\alpha\} = \dfrac{1}{2}$ справедливий ЗВЧ?

8.3. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.о.р.в.в. з $M\xi_n = a$, $D\xi_n = \sigma^2$ і $P\{\xi_n = 0\} = 0$.

Довести, що в.в. $\eta = \dfrac{\xi_1 + ... + \xi_n}{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$ збігається за ймовірністю, та знайти границю.

8.4. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.о.р.в.в., які мають рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$. Довести, що $\eta_n = \{e^n \prod_{k=1}^{n} \xi_k\}^{1/n} \to 1,\ n \to \infty$ за ймовірністю.

8.5. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.о.р.в.в., які мають показниковий розподіл з параметром 1. Довести, що випадкова величина $\eta_n = \{\prod_{k=1}^{n} \xi_k\}^{1/n}$ збігається за ймовірністю, і знайти границю.

8.6. Для дійсної неперервної на $[0,1]$ функції знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 ... \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) dx_1 ... dx_n$$

8.7. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 ... \int_0^1 \exp\left\{-(x_1 + ... + x_n)\frac{m}{n}\right\} dx_1 ... dx_n.$$

8.8. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 ... \int_0^1 \sin^{2m}\frac{\mathrm{A}}{2n}(x_1 + ... + x_n)\, dx_1 ... dx_n.$$

8.9. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \dots \int_0^1 \ln \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}\; dx_1 \dots dx_n .$$

Приклад розв'язання задачі

Приклад 11. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.в.в., причому ξ_n приймає значення 2^n і 2^{-n} з імовірністю $\frac{1}{2}$. Чи виконується для цієї послідовності ЗВЧ?

Розв'язання.

Обчислимо м.с. і дисперсію в.в. ξ_n.

Маємо $M\xi_n = 0$; $D\xi_n = 2^{2n} \cdot \frac{1}{2} + 2^{2n} \cdot \frac{1}{2} = 4^n$.

Теореми Чебишева і Маркова для цієї послідовності в.в. не можуть бути застосовані.

Оцінимо ймовірність

$$P\{\frac{|\xi_1 + \dots + \xi_n|}{n} > \varepsilon\} \geq P\{\frac{|\xi_1 + \dots + \xi_n|}{n} > \frac{\varepsilon}{\xi_{n-1}} 2^{n-1}, \xi_n = 2^n\} \times$$

$$\times P\{\xi_{n-1} = 2^{n-1}, \xi_n = 2^n\} = \frac{1}{4} P\{\frac{|\xi_1 + \dots + \xi_{n-2} + 2^{n-1} + 2^n|}{n} > \varepsilon\} \to \frac{1}{4} \text{ при } n \to \infty.$$

Отже, ЗВЧ не виконується для заданої послідовності.

9. Центральна гранична теорема

Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.в.в. Позначимо $a_\kappa = M\xi_\kappa$, $\sigma_\kappa^2 = D\xi_\kappa$, $B_n^2 = \sum_{\kappa=1}^{n} \sigma_\kappa^2$, $F_\kappa(x) = P\{\xi_\kappa < x\}$.

Кажуть, що для послідовності в.в. $\{\xi_n, n \geq 1\}$ виконано:

а) умова Ліндеберга, якщо для $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{\kappa=1}^{n} \int_{|x-a_\kappa|>\varepsilon B_n} (x - a_\kappa)^2 dF_\kappa(x) = 0;$$

б) умова Ляпунова, якщо для деякого $\delta > 0$

$$P(A \cap B \cap C) = 1/4 \quad .$$

Теорема. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.в.в. з кінцевими дисперсіями.

Якщо для цієї послідовності виконується умова Ліндеберга, то

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{1}{B_n}\sum_{\kappa=1}^{n} (\xi_k - a_k) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \overline{e}^{\frac{t^2}{2}} 2t = \Phi^*(x) \quad \text{(ЦГТ)}.$$

Якщо послідовність $\{\xi_n, n \geq 1\}$ задовольняє умові рівномірної малості, тобто для $\forall \varepsilon > 0$

$\max_{1\le\kappa\le n} P\{\frac{1}{B_n}|\xi_\kappa - a_\kappa| > \varepsilon\} \to 0, n \to \infty$, та виконується ЦГТ, то виконується умова Ліндеберга.

Наслідок 1. Для послідовності н.о.р.в.в. з кінцевим другим моментом виконується ЦГТ.

Наслідок 2. Якщо для послідовності $\{\xi_n, n \geq 1\}$ виконується умова Ляпунова, то справедлива ЦГТ.

9.1. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.в.в. таких, що ξ_n має рівномірний розподіл на $[a_{n-1},\ a_{n+1}]$, $a_1, a_2,..,$ — послідовність дійсних чисел, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A<\infty$,

$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$.

Знайти $P\left\{0 < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < 1\right\}$.

9.2. При яких значеннях α для п.н.в.в. із задачі 8.2 справедлива ЦГТ?

9.3. Нехай $\{\xi_n, n\geq 1\}$ п.н.о.р.в.в. з нульовим м.с. і кінцевою дисперсією

$$0 < \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{|\xi_1 + ... + \xi_n|}{\sqrt{n}} < a\right\} = b < 1.$$

Знайти $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{|\xi_1 + ... + \xi_n|}{\sqrt{n}} < 2a\right\}$.

9.4. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.в.в. таких, що $M\xi_n = 0, P\{\xi_n = \pm 2^n\} = \frac{1}{2}$. Чи справедлива для цієї послідовності ЦГТ?

9.5. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.в.в. таких, що $P\{\xi_n = \pm 1\} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$ і $P\{\xi_n = \pm \sqrt{n}\} = \frac{1}{2n}$. Чи виконується для цієї послідовності ЦГТ?

9.6. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.о.р.в.в. з нульовим м.с. і одиничними дисперсіями. Довести, що випадкові величини

$$\eta_n = \sqrt{n}\ (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/(\xi_1^2 + \xi_n^2) \qquad \zeta_n = (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$$

асимптотично нормальні.

9.7. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.о.р.в.в., які мають пуассонівський розподіл з параметром λ. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_{2i-1} - \xi_{2i})}{\sqrt{n}} < x \right\}$.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 12. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — п.н.о.р.в.в. з нульовим м.с. і кінцевими дисперсіями, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Знайти $\sigma^2 = D\,\xi_к$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right\} = 0{,}4$.

Розв'язання.

Для даної послідовності в.в. справедлива ЦГТ; тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}\,\sigma} < x \right\} = \Phi^*(x).$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ \dfrac{S_n}{\sqrt{n}\,\sigma} > x\sigma \right\} = 1 - \Phi^*(x)$.

За допомогою табл. 2 додатка, знаходимо, що $1 - \Phi^*(x) = 0{,}5 - \Phi(x) = 0{,}4$ при $x = 0{,}26$. Таким чином, $\sigma = \dfrac{1}{x} \approx 3{,}85$ і $\sigma^2 \approx 14{,}82$.

10. Вінеровський процес

Випадковий процес $\xi(t)$, $t \geq 0$, називається процесом з незалежними прирістами (ПНП), якщо в.в. $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, ..., $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ незалежні у сукупності для всіх $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

ПНП $\xi(t)$, $t \geq 0$, називається однорідним, якщо розподіл $\xi(t+s) - \xi(s)$ не залежить від s, $\xi(0) = 0$ (ОПНП).

ОПНП $w(t)$, $t \geq 0$ називається вінеровським, якщо:

1) $w(0) = 0$ з імовірністю 1;
2) $M(w(t+h) - w(t)) = 0$;
3) $M(w(t+h) - w(t))^2 = \sigma^2 h$;
4) $M|w(t+h) - w(t)|^3 = O(h)$.

Якщо $\sigma^2 = 1$, то вінеровський процес називається стандартним.

При виконанні умов 1) — 4) для $\forall\, t\, w(t)$ має нормальний розподіл $N(0, \sigma^2 t)$.

Функція $R(t, s) = M(\xi(t) - M\xi(t))(\xi(s) - M\xi(s))$ називається **кореляційною** функцією випадкового процесу $\xi(t)$.

10.1 Нехай $w(t)$ — вінеровський процес. Знайти сумісну щільність розподілу $w(s)$ і $w(t)$, $0 < s < t < 1$, при умові, що $w(1) = 0$.

10.2. Нехай $w(t)$ — вінеровський процес. Знайти коваріацію $w(s)$ і $w(t)$, $s < t < 1$, при умові, що $w(1) = 0$.

10.3. Нехай $w(t)$ — вінеровський процес. Довести, що $w_1(t) = -w(t)$, $w_2(t) = \dfrac{1}{c} w(tc^2)$, $c = \text{const} > 0$, $t > 0$ і $w_3(t) = \begin{cases} tw\left(\dfrac{1}{t}\right), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ будуть вінеровськими процесами.

10.4. Нехай $w_1(t)$ і $w_2(t)$ — незалежні вінеровські процеси. Довести, що процес $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(w_1(t) + w_2(t))$, $t \geq 0$ — теж вінеровський.

10.5 Нехай $w(t)$ — вінеровський процес; τ — незалежна від нього в.в., яка має розподіл показників з париметром λ. Знайти характеристичну функцію в.в. $w(\tau)$.

10.6. Довести, якщо $w(t)$ — стандартний вінеровський процес, то

$M(w(t) - w(s))^{2n+1} = 0$,

$M(w(t) - w(s))^{2n} = (2n-1)!!\,(t-s)^n$, $t > s$.

10.7. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $w(t) - tw(1)$, $0 \leq t \leq 1$, де $w(t)$ — вінеровський процес.

10.8. Знайти сумісну щільність в.в. $w(t_1), ..., w(t_n)$, $0 < t_1 <... t_n$.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 13. Знайти кореляційну функцію вінеровського процесу $w(t)$, $t \geq 0$.

Розв'язання.

Оскільки $M\,w(t) = 0$, то $R(t,s) = M\,w(t)\,w(s)$. Нехай $s < t$, тоді $R(t,s) = M \geq (w(t) - w(s))\,w(s) + Mw^2(s) = M(w(\text{t}) - w(s))Mw(s) + {}+\sigma^2 s = \sigma^2 s$. При цьому скористалися тим, що процес $w(t)$ має незалежні прирісти. Аналогічно при $t \leq s$, $R(t,s) = \sigma^2 t$. Тому $R(t,s) = {}= \sigma^2 \min(t,\text{s})$.

11. Стаціонарні процеси

Випадковий процес $\xi\ (t)$ називається **стаціонарним** у **вузькому сенсі**, якщо сумісний розподіл в.в. $\xi(t_1+\tau), \xi(t_2+\tau), .., \xi(t_n+\tau)$ не залежить від τ для будь-якого n і довільних $\tau, t_1, t_2, ..., t_n$.

Випадковий процес $\xi\ (t)$ називається стаціонарним у **широкому сенсі**, якщо $M\ \xi(t) = m = \text{const}$ і кореляційна функція має вигляд $M(\xi(t)-m)\ (\overline{\xi(s)-m}) = R(t-s)$.

Теорема Хінчіна

Для того, щоб неперервна функція $R(t)$ була кореляційною функцією **стаціонарного** у **широкому сенсі** процесу, необхідно і достатньо, щоб

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)\ .$$

$F(x)$ — обмежена, монотонно неспадна, неперервна зліва функція, яка називається **спектральною** функцією.

Якщо $F(x)$ — абсолютно неперервна, тобто $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$, то функція $f(u)$ називається спектральною щільністю.

Якщо $\int_{-\infty}^{\infty} |R(t)|\ dt < \infty$, то $f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}R(t)dt$.

11.1. Нехай $\Pi(t)$, $t \geq 0$ — пуассонівський процес з параметром λ. Довести, що процес $\xi\ (t) = \Pi\ (t+1) - \Pi\ (t)$, $t \geq 1$ є стаціонарним у широкому сенсі.

11.2. Нехай $\xi\ (t) = \sum_{k=1}^{n} b_k \xi_k(t)$, де $\xi_k(t) = \xi_k \cos\lambda_k\, t + \eta_k \sin\lambda_k\, t$, λ_k — сталі, $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$, випадкові величини ξ_κ і η_κ задовольняють наступним умовам:

$M\,\xi_\kappa = M\,\eta_\kappa = 0$, $D\,\xi_\kappa = D\,\eta_\kappa = 1$, $k = 1, 2, .., n$

і $M\,\xi_i\,\xi_j = M\,\eta_i\,\eta_j = 0$, $i \neq j$,

$M\,\xi_i\,\eta_i = 0$ при $i, j = 1, 2, ..., n$.

Довести, що $\xi(t)$ — стаціонарний у широкому сенсі процес.

11.3. Нехай спектральна щільність стаціонарного у широкому сенсі випадкового процесу дорівнює:

$$f(u)=\begin{cases} a, & \text{якщо } |u|\le b \\ o, & \text{якщо } |u|>b \end{cases}.$$

Знайти кореляційну функцію $R\,(t)$.

11.4. Нехай спектральна щільність стаціонарного у широкому сенсі випадкового процесу дорівнює:

$$f(u)=\begin{cases} o, & \text{якщо } |u|<b \\ c^2, & \text{якщо } \mathrm{b}\le|u|\le 2b \\ o, & \text{якщо } |u|>2b \end{cases}.$$

Знайти кореляційну функцію $R\,(t)$.

11.5. Визначити спектральну щільність стаціонарного у широкому сенсі випадкового процесу, якщо кореляційна функція

$$R(t)=\begin{cases} \sigma^2(1-|t|), & |t|\le 1 \\ o, & |t|>1 \end{cases}.$$

11.6. Визначити спектральну щільність стаціонарного у широкому сенсі випадкового процесу, якщо кореляційна функція

$$R(t)=\exp\,\{-\alpha\ |t|\}\ (1+\alpha\ |t|)\,.$$

11.7. Нехай ξ — випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$; □ — незалежна від ξ випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на інтервали $(o,\ 2\pi)$. Довести, що випадковий процес $\xi(t)=\exp\ \{i\ \ (\xi\ \ t+\varphi\},\ \ t\ge ($ — є стаціонарним у широкому сенсі.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 14. Нехай ξ_1 і ξ_2 — н.о.р.в.в., які приймають значення 1 і -1 з імовірністю $\frac{1}{2}$.

Довести, що випадковий процес $\xi(t)=\cos\ \lambda\ t\cdot\xi_1+\sin\ \lambda\ t\cdot\xi_2$ не є стаціонарним у вузькому сенсі, але є стаціонарним у широкому сенсі.

Розв'язання.

$$M\xi(t)=\cos\lambda t M\xi_1+\sin\lambda t M\xi_2=0$$

$$M\xi(t)\xi(s)=M(\xi_1\cos\lambda t+\xi_2\sin\lambda t)(\xi_1\cos\lambda s+\xi_2\sin\lambda s)=$$

$=\cos\lambda t\cos\lambda s+\sin\lambda t\sin\lambda s=\cos\lambda(t-s)$, тобто $\xi\,(t)$ — стаціонарний у широкому сенсі процес.

Далі $P\{\xi(0)=1\}=P\{\xi_1=1\}=\frac{1}{2}$, а $P\{\xi(\frac{\pi}{6\lambda})=1\}=P\{\xi_1\sqrt{3}+\xi_2=2\}=0$ тобто $\xi(t)$ — не є стаціонарним у вузькому сенсі процесом.

12. Емпірична функція розподілу

Випадковою вибіркою об'єму n (або просто **вибіркою**) називається випадковий вектор $x_1, x_2, ..., x_n$, де x_i — незалежні і однаково розподілені, $F(x)=P\{x_i<x\}$, $i=1,2,...,n$ іноді кажуть, що вибірка $x_1, x_2, ..., x_n$ узята із генеральної сукупності в.в. ξ з функцією розподілу $F(x)$.

Вибірка, розташована у порядку зростання, називається **варіаційним рядом**:

$x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$.

Наприклад:

$x_{(1)}=\min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $x_n=\max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Якщо вибірка має r різних елементів $y_1, ..., y_r$, причому елемент y_i зустрічається m_i разів, то $w_i=\frac{m_i}{n}$ називається частотою елемента y_i, і $\sum_{i=1}^{n} m_i = n$.

Статистичним рядом називається послідовність пар (y_i, m_i), а ламана з вершинами(y_i, w_i) — **полігоном** частот вибірки.

Емпірічною функцією розподілу називається функція

$F_n(x)=\frac{k}{n}$, якщо $x\in(x_{(k)},x_{(k+1)})$, $k=0, 1, ..., n$, $x_{(0)}=-\infty$, $x_{(n+1)}=$

$=\infty$, або $F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(x_{(k)}<x)$, $I(x_{(k)}<x)=\begin{cases}1, \text{якщо } x_{(k)}<x,\\ 0, \text{якщо } x_{(k)}\ge x\end{cases}$.

Теорема Глівенко

$P\{\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{-\infty<x<\infty} |F_n(x)-F(x)|=0\}=1$.

Теорема Колмогорова

Якщо функція $F(x)$ неперервна, то при будь-якому фіксованому $t>0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{n} \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n(x)-F(x)\right| \le t\} = k(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2 \cdot t^2}.$$

Нехай ξ — неперервна в.в. з невідомою щільністю $p(x)$. Для оцінки $p(x)$ по вибірці $x_1, x_2, ..., x_n$ розіб'ємо область значень ξ на інтервали h_i, $i = 1, .., s$.

x_i^* — середини інтервалів, υ_i — кількість елементів вибірки, які потрапили в інтервал h_i. Тоді $\dfrac{\upsilon_i}{nh_i}$ — оцінка щільності у точці x_i^*. Прямокутники з основами h_i та висотами $\dfrac{\upsilon_i}{nh_i}$ у прямокутній системі координат називаються **гістограмою вибірки**. Якщо на гістограмі ординати, відповідні до x_i^*, послідовно з'єднати відрізками прямих, то отримана ламана буде **полігоном частот**.

12.1. Записати вибірку 4, 2, 10, 3, 5, 4, 4, 10, 7, 3, 2, 4, 2, 3, 5, 2 у вигляді:

а) варіаційного ряду;

б) статистичного ряду.

12.2. Побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу для вибірки, яка подана статистичним рядом:

а)

y_i	2	4	7	10
m_i	5	8	10	2

;

б)

y_i	1	3	5	7
m_i	2	10	8	20

.

12.3. Знайти емпіричну функцію розподілу для вибірки, яка подана статистичним рядом:

а)

y_i	2	5	7	8
m_i	1	3	2	8

;

б)

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	8	17	16	10	6	2	0	1

.

12.4. Побудувати гістограму вибірки, яка подана у вигляді таблиці частот.

Інтервал	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20	20–22	22–24
Кількість елементів вибірки, що потрапили в інтервал	2	4	8	12	16	10	3

12.5. Побудувати гістограму і полігон частот вибірки, що подано у вигляді таблиці частот.

$x_i; x_{i+1}$	–3; –2	–2; –1	–1; 0	0; 1	1; 2	2; 3	3; 4	4; 5
m_i	3	10	15	24	25	13	7	3

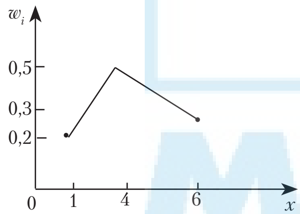
Приклад розв'язання задачі

Приклад 15. Побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу для вибірки, яка подана статистичним рядом:

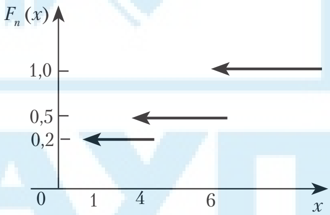
y_i	1	4	6
m_i	10	25	15

Розв'язання.

Полігон частот



Емпірична функція розподілу



13. Метод моментів

Для оцінки невідомих параметрів розподілів часто використовують метод моментів.

Нехай $x_1, ..., x_n$ — вибірка з генеральної сукупності в.в. ξ з функцією розподілу $F(x, \theta)$, де $\theta = (\theta_1,.., \theta_r), \quad \theta \in \Theta \subseteq R^2$.

Нехай ця в.в. ξ має r моментів $\alpha_k = M\xi^k, \quad k = 1, 2,..., r$.

При цьому вони є функціями від незалежних параметрів $\alpha_k = \alpha_k(\theta)$. Метод моментів полягає у тому, що треба прирівняти вибіркові моменти з теоретичними, тобто:

$$\alpha_k(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k = 1,\ 2,.., r.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно $\theta_1, \ldots, \theta_r$, отримаємо значення оцінок параметрів за методом моментів (*ММ*). Оцінка $\hat{\theta}_n$ невідомого параметра θ називається **незміщеною**, якщо $M\hat{\theta}_n = \theta$. Якщо $\hat{\theta}_n \to \theta$ при $n \to \infty$ за ймовірністю, то оцінка $\hat{\theta}_n$ називається **слушною**. Оцінки, які знайдені за допомогою *ММ*, як правило, слушні, але зміщені.

13.1. Використовуючи *ММ,* знайти у вибірці $x_1, \ldots, x_n$, де $P\{x_k = m\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$, $m = 0,\ 1, \ldots$, оцінку $\hat{\lambda}_n$ параметра λ. Чи буде ця оцінка незміщеною і слушною?

13.2. Нехай $x_1, \ldots, x_n$ — н.о.р.в.в., які мають рівномірний розподіл на відрізку $[-a, a]$. Знайти оцінку параметра a^2 за допомогою *ММ*. Чи буде вона незміщеною і слушною?

13.3. Побудувати за допомогою *ММ* слушні оцінки параметрів a і b за результатами n незалежних спостережень в.в. $x_1, \ldots, x_n$, кожна з яких має нормальний розподіл $N(0,1)$ або $N(a,1)$ з імовірністю b і $(1 - b)$ відповідно, $-\infty < a < \infty$, $0 \le b \le 1$.

13.4. Нехай $x_1, \ldots, x_n$ — н.о.р.в.в. з щільністю розподілу вигляду

$$P\ (x,\theta) = \begin{cases} \kappa(\theta) x e^{-x^2/\theta^2}, & 0 \le x < \infty \\ 0, \quad x < 0, & \theta > 0 \end{cases}.$$

Знайти оцінку параметра θ за *ММ*. Чи буде вона незмінною і слушною?

13.5. Невід'ємні в.в. $x_1, \ldots, x_n$ взаємно незалежні і мають однакову щільність розподілу

$$P(x) = \frac{\beta^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-x\beta},\ x > 0,\ \beta > 0,\ m > 0.$$

Знайти оцінки для невідомих параметрів β і m за допомогою *ММ*. Чи будуть ці оцінки слушними? Нехай при $n = 10$, в.в. $x_1, \ldots, x_{10}$ прийняли значення:

0,1 0,4 0,5 0,7 0,6 0,1 0,05 0,8 0,15 0,1

Знайти значення оцінок.

13.6. Використавши *ММ*, знайти за вибіркою $x_1,\dots,x_n$, де $P\{x_k = m\} = (1-P)^m \cdot P,\ \ m = 0,\ 1,\dots,$ оцінку $\hat{P}_n$ параметра *Р*. Чи буде ця оцінка слушною? Знайти $M\hat{P}_n^{-1}$, $D\hat{P}_n^{-1}$.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 16. Використовуючи *ММ*, знайти за допомогою вибірки $x_1, \dots, x_n$, де $P\{x_k = m\} = \dfrac{a^m}{(a+1)^{m+1}},\quad m = 0,\ 1,\dots,\ a > 0,$ оцінку $\hat{a}_n$ параметра *а*. Чи буде ця оцінка незміщеною та слушною?

Розв'язання.

Знайдемо м.с. випадкової величини ξ, яка має такий розподіл: $M\xi = \sum\limits_{m=1}^{\infty} m \cdot \dfrac{a^m}{(a+1)^{m+1}}$. Позначимо $\dfrac{a}{a+1}$ через *Р*, $P < 1$.

Тоді $\sum\limits_{m=0}^{\infty} P^m = (1-P)^{-1}$.

Оскільки ряд збіжний, продиференціюємо праву та ліву частини рівності за параметром *Р*, отримаємо, що

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot P^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{a}{a+1}\right)^{m-1} = \frac{1}{(1-P)^2} = (a+1)^2.$$

Отже, $M\xi = a$ і оцінка параметра *а* буде мати вигляд $\hat{a}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Ця оцінка незміщена, тому що $M\hat{a}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Mx_i$ і слушна відповідно до закону великих чисел.

14. Достатні статистики

Нехай $X = (x_1, \dots, x_n)$ — вибірка з генеральної сукупності ξ з функцією розподілу $F(x,\theta)$; $P(x,\theta)$ — щільність розподілу ξ.

Функція $L(x,\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(x_i\theta)$ є щільністю розподілу випадкового вектора *X* і називається **функцією правдоподібності**.

У дискретному випадку $P(x,\theta) = P\{\xi = x\}$. Будь-яка функція (яка має міру) від вибірки називається **статистикою**. Статистика $T = T(X)$ називається достатньою для сімейства розподілів $F(x,\theta)$, якщо умовний розподіл випадкового вектора $X = (x_1, .., x_n)$ за умови, що $T(X) = t$, не залежить від параметра θ, тобто статистика T має всю інформацію про параметр θ. Очевидно, сама вибірка X завжди є **достатньою** статистикою, але ця статистика тривіальна, тому що не скорочує даних.

Теорема факторизації. Для того, щоб статистика $T(X)$ була достатньою, необхідно і достатньо, щоб $L(x,\theta) = g(T(x),\theta)h(x)$. Достатня статистика називається повною, якщо будь-яка функція від неї з нулевим при усіх θ м.с. сама дорівнює нулю майже напевно при всіх розподілах $F(x,\theta)$.

14.1. Випадкові величини $(x_1, .., x_n)$ незалежні і однаково рівномірно розподілені на відрізку$[0, \theta]$. Показати, що $x_n = \max x_i$ — повна достатня статистика.

14.2. Нехай $x_1, .., x_n$ — н.о.р.в.в. з щільністю $P(x,\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}$.

Показати, що $x_{(1)} = min\, x_i$ — повна достатня статистика.

14.3. В.в. $x_1, .., x_n$ — н.о.р., щільність $P(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}, x \geq 0, \theta > 0$

Знайти повну достатню статистику і записати щільність її розподілу.

14.4. $x_1, .., x_n$ н.о.р.в.в., з щільністю $P(x,\theta) = c\,(\theta)\exp\{-\theta x\}, 0 \leq x \leq \theta.$ Яке з наступних тверджень є правильним?

а) існує лише тривіальна достатня статистика;

б) вектор $\{\max\ x_i; \sum_{i=1n}^{n} x_i\}$ — достатня статистика;

в) вектор $\{\min\ x_i; \sum_{i=1n}^{n} x_i\}$ — достатня статистика;

г) $\sum_{i=1}^{n} x_i$ — достатня статистика.

14.5. Нехай $x_1, .., x_n$ — н.в.в., причому

$$P\{x_i = k\} = \frac{\lambda}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0,\ 1,..,\ \lambda > 0.$$

Знайти функцію правдоподібності і повну достатню статистику. Знайти закон розподілу достатньої статистики.

14.6. Нехай $x_1, .., x_n$ — н.о.р.в.в. з щільністю розподілу

$$P(x,\theta)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+(x-\theta)^2}\ .$$

Показати, що для них існує тільки тривіальна достатня статистика.

14.7. В.в. ξ має логнормальний розподіл з параметрами (α, σ^2), якщо $\eta = \ln \xi$ має нормальний розподіл $N(\alpha, \sigma^2)$.

1. Знайти щільність розподілу ξ, $M\xi$, $D\xi$.

2. Знайти достатню статистику послідовності н.о.р.в.в. $x_1, x_2, .., x_n$, які мають логнормальний розподіл.

14.8. Показати для розподілу Вейбула зі щільністю $P(x,\theta)=\frac{\lambda x^{\lambda-1}}{\theta^{\lambda}}\cdot e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}$, $x\geq 0$, що повною достатньою статистикою для θ є $T(x)=\sum_{i=n}^{n}x_i^{\lambda}$.

Для перевірки повноти достатньої статистики корисним є наступне твердження: якщо

$$L(x,\theta)=c(\theta)\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(\theta)T_k(x)\right\}, \qquad (*)$$

то статистика $T(x)=\{T_1\ (x),...,T_m(x)\}$ є повною.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 17. Нехай $x_1, .., x_n$ — н.о.р.в.в. зі щільністю

$$P(x,a,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Знайти повну достатню статистику для параметрів $\theta = (\alpha, \sigma^2)$.

Розв'язання

Функція правдоподібності має вигляд:

$$L(x,a,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\right\}=$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n(\overline{x}-a)^2\right]\right\},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \ x = (x_1, ..., x_n).$$

Згідно із теоремою факторизації статистика $(\bar{x}, \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2)$ є достатньою для θ = (α, σ²). Звідки також випливає, що при відомому значенні σ^2 достатньою статистикою для параметра a є $\bar{x}$, а при відомому a достатньою статистикою для σ^2 є $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$. Згідно із (*) всі ці статистики є повними.

15. Довірчі інтервали для параметрів біномного, пуассонівського та показникового розподілів

Довірчим називають інтервал, який із заданою довірчою ймовірністю $1 - \alpha$ покриває оцінюваний параметр.

Якщо при n незалежних випробуваннях деяка подія, імовірність якої у кожному випробуванні дорівнює P, мала місце m разів, то при великих n

$$\hat{P} - \frac{c_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})} < P < \hat{P} + \frac{C_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})},$$

де $\hat{P} = \frac{m}{n}$, а c_α — таке значення аргументу функції Лапласа, що $\Phi(c_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$, або $\Phi^*(c_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$;

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \begin{cases} 0,5 + \Phi(x), \ x \geq 0 \\ 0,5 - \Phi(-x), \ x < 0 \end{cases}.$$

$1-\alpha$	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
c_α	1,28	1,64	1,96	2,57	3,29

Довірчий інтервал для параметра λ пуассонівського розподілу при великих n має вигляд:

$$\bar{x} - c_\alpha\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}} < \lambda < \bar{x} + c_\alpha\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}, \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ — вибірково середнє.}$$

Довірчий інтервал для м.с. λ показникового розподілу зі щільністю

$$P_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{\frac{-x}{\lambda}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

при великому об'ємі вибірки ($n > 15$) буде

$$\frac{\overline{x}}{1+\frac{c_\alpha}{\sqrt{n}}}<\lambda<\frac{\overline{x}}{1-\frac{c_\alpha}{\sqrt{n}}}.$$

При $n \leq 15$ довірчий інтервал для м.с. показникового розподілу визначається виразом $v_1\overline{x}<\lambda<v_2\overline{x}$, де $v_1=\dfrac{2n}{\chi_1^2},\quad v_2=\dfrac{2n}{\chi_2^2}$.

Значення χ_1^2 і χ_2^2 вибираються з табл. 3 додатка для χ^2 розподілу з кількістю степенів вільності $\kappa = 2n$ наступним чином:

$$P\{\chi^2<\chi_2^2\}=\frac{\alpha}{2};\quad P\{\chi^2>\chi_1^2\}=\frac{\alpha}{2}.$$

15.1. При проведенні 30 незалежних випробувань, відмова спостерігалася 8 разів. Визначити довірчій інтервал для ймовірності відмови при довірчій імовірності 0,95, якщо кількість відмов має біноміальний закон розподілу.

15.2. Проведено 100 незалежних випробувань, у результаті яких подія A спостерігалася 40 разів. Визначити довірчий інтервал для ймовірності появи події A при довірчих ймовірностях 0,95 і 0,99, якщо кількість появи події A має біноміальний розподіл.

15.3. На телефонній станції проводилися спостереження за кількістю неправильних з'єднань за хвилину. Спостереження дали наступні результати:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	8	17	16	10	6	2	0	1

Нехай кількість неправильних з'єднань за хвилину має пуассонівський розподіл з параметром λ. Знайти довірчий інтервал для параметра λ при довірчій ймовірності 0,99.

15.4. Через рівні проміжки часу реєстрували кількість розладів апаратури. Отримано наступні результати:

Кількість розладів x_i	0	1	2	4
m_i	109	65	22	1

Покладаючи, що кількість відмов апаратури має розподіл Пуассона, знайти довірчий інтервал для параметра λ при довірчій імовірності 0,95.

15.5. При випробуваннях 10 однотипних приладів реєструється момент виходу з ладу кожного пристрою. Результати спостережень:

Номер приладу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i, (год.)	200	350	600	450	400	400	500	350	450	550

Знайти оцінку математичного сподівання часу безвідмовної роботи та довірчий інтервал для м.с. λ при довірчій імовірності 0,9, якщо час безвідмовної роботи приладу має показниковий розподіл.

15.7. Умова задачі аналогічна 15.5, тільки кількість приладів 8 і результати спостережень наступні:

Номер приладу	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i, (год.)	100	150	400	250	520	680	1500	1200

Довірча ймовірність 0,8.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 18. Нехай випадкові інтервали між послідовними відмовами апаратури однаково показниково розподілені з м.с. λ. Для визначення параметра λ спостерігалося 25 відмов, а загальний термін безвідмовної роботи з початку випробувань до останньої відмови дорівнює $\sum_{i=1}^{25} x_i = 1500$ год. Визначити межі довірчого інтервалу для λ при довірчій властивості 0,8.

Розв'язання

Знайдемо довірчий інтервал за допомогою функції Лапласа.

За умови задачі $\bar{x} = \frac{1500}{25} = 60$, далі при $1 - \alpha = 0{,}8$, $c_\alpha = 1{,}28$.

$$\frac{60}{1+\frac{1{,}28}{5}} < \lambda < \frac{60}{1-\frac{1{,}28}{5}}$$, тобто $47{,}8 < \lambda < 80{,}6$.

16. Критерій Колмогорова–Смірнова і χ^2 для перевірки однорідності та незалежності двох вибірок

Для перевірки гіпотези H_0 про належність двох вибірок обсягом n і m однієї генеральної сукупності використовується критерій Колмогорова–Смірнова. За міру відмінності приймається величина

$$\lambda_q = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n^{(1)}(x) - F_m^{(2)}(x)\right|,$$

де $F_n^{(1)}(x)$ і $F_m^{(2)}(x)$ — емпіричні функції розподілу для першої та другої вибірки. З таблиці розподілу Колмогорова за заданим рівнем значущості α знайдемо критичне значення λ_α, тобто $\alpha = 1 - k(\lambda_\alpha)$ (див. розділ 12). Наведемо значення λ_α при різних α:

α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	1,079	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

Якщо $\lambda_q > \lambda_\alpha$ то гіпотеза H_0 відхиляється. Для застосування критерію Колмогорова–Смірнова необхідно виконання умови неперервності невірної функції розподілу. Для перевірки однорідності даних, які мають дискретну структуру, використовують критерій χ^2. Крім того, за допомогою цього методу можливо аналізувати водночас будь-яку кількість вибірок. Нехай проведено $к$ незалежних серій незалежних спостережень, які складаються з $n_1, ..., n_к$ спостережень.

При цьому у кожному випробуванні спостерігалася ознака, яка приймала одне з l різних значень, v_{ij} — кількість появ i-го значення в j серії, $n_j = \sum_{i=1}^{l} v_{ij}$, $n = n_1, ..., n_к$ — загальна кількість спостережень. Потрібно перевірити гіпотезу H_0 про те, що всі спостереження проводилися під однією і тією самою випадковою величиною.

Мірою відмінності критерію є величина

$$\chi_q^2 = n\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k}\left(v_{ij} - \frac{v_{i0}n_j}{n}\right)^2 \Big/ v_{i0}n_j, \quad v_{i0} = \sum_{j=1}^{k} v_{ij}.$$

У таблиці χ^2-розподілу (табл. 3 додатку) за заданим рівнем значущості α та за числом степенів вільності $m = (l-1)(\kappa-1)$ знаходимо число $\chi^2_{1-\alpha;\ (l-1)(\kappa-1)}$, тобто $P\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha;\ (l-1)(\kappa-1)}\} = 1-\alpha$. Якщо $\chi_q^2 >> \chi^2_{1-\alpha;\ (l-1)(\kappa-1)}$, то гіпотеза H_0 відхиляється, а у противному разі приймається. Критерій χ^2 дає змогу перевірити гіпотезу H_0 про незалежність двох в.в. ξ і η. Мірою відмінності критерію є величина

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k}\frac{(v_{ij}-m_{ij})^2}{m_{ij}},$$ де υ_{ij} — кількість випадків коли водночас спостерігалися $\xi = x_i$, $\eta = y_j$ (для неперервних в.в. i і j — номери відповідних інтервалів)

$$m_{ij} = {v_{0i}v_{0j}}/{n},\ v_{0j} = \sum_{i=1}^{l} v_{ij},\ v_{i0} = \sum_{j=1}^{k} v_{ij},$$ l і κ — кількість значень, які приймали в.в. ξ і η, $n = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} v_{ij}$ — об'єм вибірки.

Вибір табличного значення $\chi^2_{1-\alpha;\ (l-1)(\kappa-1)}$ і прийняття рішення проводяться аналогічно описаному вище для критерію χ^2 з перевірки однорідності двох вибірок.

Рівень значущості розглянутих критеріїв — це ймовірність помилкового відхилення гіпотези H_0, якщо вона вірна.

16.1. Із продукції двох станків беруть дві вибірки по 38 виробів.

Розмір виробу	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56
$m_i^{(1)}$	2	1	2	2	1	1	4	1	1	0	5	0	0	6	4	3	5
$m_i^{(2)}$	2	0	0	2	3	0	1	6	0	5	2	3	1	5	3	3	2

Використовуючи критерій Колмогорова–Смірнова, перевірте гіпотезу про те, що вибірки належать до однієї і тієї ж генеральної сукупності при рівні значущості $\alpha = 0{,}1$.

16.2. У першому потоці з 300 студентів оцінку “2” отримали 33 студенти; “3” — 43; “4” — 80; “5” — 144, а у другому потоці інші 300 студентів мали: “2” — 39; “3” — 35; “4” — 72; “5” — 154. Чи можна вважати обидва потоки однорідними при рівні значущості 0,05?

16.3. Вісім незалежних вимірювань у першій лабораторії дали такі результати: 0,869; 0,874; 0,867; 0,875 0,870; 0,869; 0,864; 0,872. Десять вимірювань у другій лабораторії дали такі результати: 0,865; 0,870; 0,866; 0,871; 0,870; 0,868; 0,871; 0,870; 0,869; 0,874. Перевірити гіпотезу про однорідність цих вибірок, використовуючи критерій Колмогорова–Смірнова, $\alpha = 0{,}01$.

16.4. Двовимірна в.в. (ξ, η) може мати чотири значення: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). 180 незалежних спостережень дали наступні результати: значення (0,0) з'явилося 39 разів; (0,1) — 50; (1,0) — 53; (1,1) — 38.

Чи можна вважати, що ξ і η незалежні? $\alpha = 0{,}1$.

16.5. Серед 300 чоловік, які вступили до вищого навчального закладу, 97 мали оцінку “5” у школі; 48 отримали “5” на вступних іспитах по тому ж предмету, причому 18 чоловік мали “5” і у школі, і на вступних іспитах. Перевірити гіпотезу про незалежність оцінок “5” у школі і на іспитах. $\alpha = 0{,}1$.

16.6. Проведено 200 спостережень над випадковими величинами ξ і η, які приймають значення 1, 2 і 1, 2, 3 відповідно. Результати спостережень наведено у таблиці (кількість появи пари υ_{ij}).

Значення ξ	Значення η			
	1	2	3	υ_{i0}
1	23	50	25	100
2	52	41	7	100
υ_{0j}	77	91	32	200

Перевірити за допомогою критерію χ^2 незалежність в.в. ξ і η, $\alpha = 0{,}05$.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 19. Проведено 300 спостережень одночасно над в.в. ξ і η, які приймають значення 1, 2 і 1, 2, 3 відповідно. Кількість спостережень пар υ_{ij} наведено у таблиці.

Значення ξ	Значення η			
	1	2	3	υ_{i0}
1	32	68	50	150
2	40	70	40	150
υ_{0j}	72	138	90	300

Перевірити за допомогою критерію χ^2 незалежність в.в ξ і η, $\alpha = 0{,}01$.

Розв'язання

Знайдемо m_{ij}. Матриця $(m_{ij})_{\substack{i=1,2\\ j=1,2,3}}$ буде такою: $m_{ij} = \begin{pmatrix} 36 & 69 & 45 \\ 36 & 69 & 45 \end{pmatrix}$.

Матриця складена з елементів — $((v_{ij} - m_{ij})^2) = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 25 \\ 16 & 1 & 25 \end{pmatrix}$.

Тепер знайдемо матрицю, елементами якої є величини $(v_{ij} - m_{ij})^2 \big/ m_{ij}$.

Отримаємо $\begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}014 & 0{,}55 \\ 0{,}44 & 0{,}014 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.

Додаючи елементи цієї матриці, знайдемо, що $\chi_q^2 = 2{,}008$. Кількість степенів вільності $m = 2$, а $\chi^2_{0{,}99;\,2} = 9{,}2$. Оскільки $\chi_q^2 < \chi^2_{0{,}99;\,2}$, то гіпотеза про незалежність ξ і η приймається.

17. Лема Неймана–Пірсона

Нехай $F(x,\theta)$ — функція розподілу в.в. ξ. Про вибірку з генеральної сукупності в.в. ξ висунуто дві гіпотези.

Основна: $H_0 : \theta = \theta_0$ і альтернативна: $H_1 : \theta = \theta_1$. Тоді правило відбору однієї з гіпотез, або статистичний критерій, визначається підмножиною K (критична область) множини значень $(x_1, ..., x_n)$ та має вигляд, якщо $(x_1, ..., x_n) \in K$, то приймається гіпотеза H_1, у противному разі — H_0.

Імовірність $\alpha = P_{\theta_0}(K)$, тобто ймовірність прийняття гіпотези H_1, якщо в дійсності справедлива H_0, називається похибкою 1-го роду. Ймовірність $\beta = P_{\theta_1}(\bar{K})$, тобто ймовірність прийняти H_0, якщо справедлива H_1, називається похибкою 2-го роду.

Якщо K задано у вигляді $\{(x_1, ..., x_n) \in K\} = \{\eta_n = \eta_n(x_1, ..., x_n) > c\}$, то функцію $\eta_n(x_1, ..., x_n)$ називають **статистикою критерію**.

Нехай $p(x,\theta)$ — щільність розподілу в.в. ξ. Згідно із лемою Неймана–Пірсона

$$\eta_n = \prod_{k=1}^{n} [p(x_k, \theta_1)/p(x_k, \theta_0)] \text{ та } K = \{ (x_1, ..., x_n) : \eta_n > c\}$$

константа c знаходиться з умови $\alpha = P_{\theta_0}(\eta_n > c) = \psi(c)$.

Цей критерій серед усіх критеріїв з фіксованою похибкою 1-го роду α має найменшу похибку 2-го роду β. Аналогічно формулюється критерій для дискретних розподілів.

17.1. Знайти **статистику** критерію Неймана–Пірсона та критичну область для розрізнення за вибіркою $x_1, ..., x_n$ гіпотез:

$$H_0 : P\{x_k = i\} = P_i^{(0)},\ \ i = 1, 2, ..., N,$$

$$H_1 : P\{x_k = i\} = P_i^{(1)},\ \ i = 1, 2, ..., N.$$

17.2. Нехай $x_1, ..., x_n$ — вибірка з пуассонівського розподілу з параметром λ. Побудувати критерій Неймана–Пірсона перевірки гіпотези $H_0 : \lambda = \lambda_0$ проти альтернативи $H_1 : \lambda = \lambda_1 (\lambda_1 > \lambda_0)$. Знайти похибку 2-го роду .

17.3. За n-незалежним спостереженням в.в. побудувати критерій для перевірки гіпотези H_0 : розподіл нормальний N (0,1) проти альтернативної гіпотези H_1 : розподіл нормальний N (1,1). Яка повинна бути найменша кількість спостережень n, щоб похибки 1-го та 2-го роду не перевищували 0,01?

17.4. $x_1, ..., x_n$ — н.о.р.в.в., які мають нормальний розподіл $N (a,4)$. Перевірити гіпотезу $H_0 : a = 0$ проти альтернативної гіпотези $H_1 : a = 1$. Який повинен бути найменший обсяг вибірки n, для того щоб похибка 1-го роду дорівнювала 0,05, а похибка 2-го роду була не більше 0,01?

17.5. Нехай $x_1, ..., x_n$ — вибірка з показникового розподілу зі щільністю $P(x,\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\exp\{-\dfrac{x}{\lambda}\}, x \ge 0.$

Побудувати критерій Неймана–Пірсона перевірки гіпотези $H_0 : \lambda = \lambda_0$ проти альтернативної $H_1 : \lambda = \lambda_1$. Знайти похибку 2-го роду.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 20. Нехай $x_1, ..., x_n$ — вибірка з нормального розподілу $N (a, \sigma^2)$. Побудувати критерій Неймана–Пірсона перевірки гіпотези $H_0 : a = a_0$ проти альтернативи $H_1 : a = a_1$, σ^2 вважати відомим.

Для визначеності будемо вважати, що $a_1 > a_0$.

$$\eta_n = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - a_1)^2 - (x_i - a_0)^2\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{n}{\sigma^2}(a_1 - a_0)\bar{x} - \frac{n}{2\sigma^2}(a_1^2 - a_0^2)\right\}.$$

Нерівність $\eta_n > c$ еквівалентна

$$x > \sigma^2 \ln c \Big/ n(a_1 - a_0) + \frac{a_1 + a_0}{2},$$ або

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{x}-a_0\right)}{\sigma}>\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}\left(a_1-a_0\right)}\ln c+\frac{\sqrt{n}}{2\sigma}\left(a_1-a_0\right)=f(c).$$

Оскільки для $N(a_0, \sigma^2)$ $\overline{x}$ має розподіл $N\left(a_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, то маємо

$$\psi(c)=P_{a_0}\left(\eta_n>c\right)=P_{a_0}\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(x-a_0\right)>f(c)\right\}=$$

$$=1-\Phi^*\left(f(c)\right)=\begin{cases}0{,}5-\Phi\left(f(c)\right), & f(c)\geq 0\\ 0{,}5+\Phi\left(-f(c)\right), & f(c)<0\end{cases}.$$

При $c>0$ функція $f(c)$ неперервна, тому $\psi(c)$ – неперевна функція і для будь-якого $\alpha\in(0{,}1)$ однозначно визначена величина c_α, де $f\left(c_\alpha\right)=f_\alpha$, а $\Phi\left(f_\alpha\right)=0{,}5-\alpha$.

Таким чином, $K=\left\{\ \left(x_1,...,x_n\right): \sqrt{n}\left(\overline{x}-a_0\right)\big/\sigma>f_\alpha\ \right\}$.

Знайдемо похибку 2-го роду критерію

$$\beta=P_{\alpha_1}\left\{\sqrt{n}\left(\overline{x}-a_0\right)\big/\sigma\leq f_\alpha\right\}=P_{\alpha_1}\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{x}-a_1\right)\leq-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(a_1-a_0\right)+f_\alpha\right\}=$$

$$=\Phi^*\left(f_\alpha-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(a_1-a_0\right)\right)=\begin{cases}0{,}5+\Phi\left(f_\alpha-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(a_1-a_0\right)\right), & f_\alpha-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(a_1-a_0\right)\geq 0\\ 0{,}5-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(a_1-a_0\right)-f_\alpha\right), & f_\alpha-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(a_1-a_0\right)<0\end{cases}.$$

18. Перевірка гіпотез рівності математичних сподівань і дисперсій двох вибірок

Нехай X і Y дві в.в., кожна з яких має нормальний розподіл $N(a_x,\sigma_x^2)$ і $N(a_y,\sigma_y^2)$. Потрібно за двома вибірками обсягу n_1 і n_2 з генеральних сукупностей X і Y перевірити гіпотезу $H_0: a_x = a_y$ проти альтернативи $H_1: \left|a_x-a_y\right|>0$.

Критична область визначається нерівністю

$$c = \frac{\left|\bar{x} - \bar{y}\right|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_2}}} > c_\alpha \text{, де } \bar{x} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i\,,\ \bar{y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} y_1,$$

α – похибка 1-го роду,

$2\Phi\left(c_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

У випадку, коли $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ і значення σ^2 невідоме, критична область визначається нерівністю:

$$t = \frac{\left|\bar{x} - \bar{y}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)\dfrac{(n_1 - 1)\hat{S}_x^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_y^2}{n_1 + n_2 - 2}}} > t_{\alpha,\ n_1 + n_2 - 2},$$

де

$$\hat{S}_x^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i - \bar{x}\right)^2, \quad \hat{S}_y^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_i - \bar{y}\right)^2.$$

Величина $t_{\alpha,\ n_1+n_2-2}$ визначається за таблицею розподілу Стьюдента при кількості степенів вільності $\kappa = n_1 + n_2 - 2$ та ймовірності $1 - \alpha$. При $\alpha = 0{,}05$

$t_{0,05;18} = 2{,}10$, $t_{0,05;12} = 2{,}18$, $t_{0,05;9} = 2{,}26$.

Для перевірки гіпотези $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_\gamma^2$ відносно $H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_\gamma^2$ критична область визначається нерівністю $F = \hat{S}_x^2 \big/ \hat{S}_y^2 > F_{(\alpha;k_1,k_2)}$.

Тут $\hat{S}_x^2 \geq \hat{S}_y^2$, що завжди можна зробити, якщо поміняти індекси, $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$.

Величина $F\left(\alpha; k_1, k_2\right)$ знаходиться за таблицею розподілу Фішера–Снедекора.

$F_{(0,05;4,5)} = 5{,}19$; $F_{(0,05;8,14)} = 2{,}70$;

$F_{(0,05;9,14)} = 2{,}65$; $F_{(0,05;10,14)} = 2{,}60$.

18.1. $\bar{x} = 0{,}103$, $\bar{y} = 0{,}368$ — вибіркові середні двох вибірок обсягу $n_1 = n_2 = 50$ з нормальних сукупностей $N(a_1, 1)$ і $N(a_2, 2)$. Перевірити гіпотезу $H_0 : a_1 = a_2$ проти альтернативної $H_1 : a_1 < a_2$. Похибку 1-го роду вважати 0,01.

18.2. У результаті спостережень за в.в. X і Y отримані наступні вибірки:

X: 45, 48, 53, 44, 59, 60, 41, 43, 57;

Y: 51, 50, 42, 44, 39, 40, 48, 38, 59, 55, 51.

Чи можна вважати, що в.в. мають однакові м.с.? Похибка 1-го роду дорівнює 0,05. Передбачається, що в.в. X і Y підпорядковані нормальному закону з рівними дисперсіями.

18.3. Постановка задачі аналогічна 18.2.

X: 2,50; 2,50; 2,60; 2,75; 2,80; 2,80; 2,95;

Y: 2,50; 2,80; 2,85; 2,90; 2,90; 2,95; 3,40.

Чи можна вважати, що в.в. X і Y мають однакові м.с., $\alpha = 0{,}05$?

18.4. З нормальної генеральної сукупності $\sigma^2 = 25$ узяти дві вибірки обсягом $n_1 = n_2 = 9$. Середнє першої вибірки $\bar{x} = 2$, другої — $\bar{y} = 3$. Чи можна пояснити цю відмінність випадковими причинами при похибці 1-го роду 0,05?

18.5. Одним і тим самим приладом було проведено дві серії вимірювань:

1) 2,5; 3,2; 3,5; 3,8; 3,5;

2) 2,0; 2,7; 2,5; 2,9; 2,3; 2,6.

а) Вважаючи, що вимірювання підпорядковуються нормальному закону з однаковими дисперсіями, перевірити гіпотезу H_0 про значущість відмінності між м.с. вимірювань з похибкою 1-го роду 0,05.

б) Перевірити гіпотезу H_0 про те, що дисперсії однакові для всіх вимірювань, $\alpha = 0{,}05$.

18.6. За двома вибірками з нормальних сукупностей обсягом $n_1 = 11$, $n_2 = 15$ отримано $S_x^2 = 0{,}76$ і $S_y^2 = 0{,}38$.

При $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про рівність дисперсій двох нормальних сукупностей:

$$S_x^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i - \bar{x}\right)^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_i - \bar{y}\right)^2.$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 21. За двома вибірками обсягом $n_1 = 25$, $n_2 = 50$ з генеральних сукупностей в.в. X і Y, які мають нормальний розподіл $N(a_k, \sigma_x^2)$ і $N(a_y, \sigma_y^2)$, визначено $\bar{x} = 9{,}79$, $\bar{y} = 9{,}60$.

Перевірити гіпотезу $H_0 : a_x = a_y$ при $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}0$.

Розв'язання.

Маємо $c = \dfrac{|\overline{x}-\overline{y}|}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} = \dfrac{9{,}79-9{,}60}{0{,}3\sqrt{\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{50}}} = 2{,}59.$

Порівняємо значення c з $c_\alpha = 2{,}57$ (табл. п. 15), 2,59 > 2,57, тому гіпотезу про рівність м.с. в.в. X і Y відхиляємо.

Приклад 22. За двома вибірками обсягом $n_1 = 10$, $n_2 = 15$ з генеральних сукупностей в.в. X і Y, які мають нормальний розподіл, розраховано вибіркові дисперсії $\hat{S}_x^2 = 9{,}6$ і $\hat{S}_y^2 = 5{,}7$. Перевірити гіпотезу про рівність дисперсій в.в. X і Y; $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання.

Розрахуємо $F = \hat{S}_x^2 \big/ \hat{S}_y^2 = \dfrac{9{,}6}{5{,}7} = 1{,}68, \quad k_1 = 9,\ k_2 = 14.$

Порівняємо F з $F(0{,}05; 9{,}14) = 2{,}65$. Маємо $1{,}68 < 2{,}65$; і тому гіпотезу про рівність дисперсій в.в. X і Y не відхиляємо.

Відповіді, вказівки, розв'язання

1.1. $k\,(2-k)$

1.2. $\Omega = \{(x,y,z) : 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l,\ 0 \le z \le l\}$,
$A = \{(x,y,z) : x+y > z,\ x+z > y,\ y+z > x\},\ P(A) = 1/2$.

1.3. $3/4$.

1.4. Якщо r — радіус кола, то сторона вписаного квадрата дорівнює $r\sqrt{2}$. Тому шукана ймовірність дорівнює 2π.

1.5. Позначимо через x відстань від середини голки до найближчої паралелі, $0 \le x \le a$, через □ — кут, який утворює голка з цією паралеллю, 0 ≤ □ ≤ π. Тоді $\Omega = \{(x,\varphi) : 0 \le x \le a,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$, $A = \{(x,\varphi) : x \le l\ \sin\varphi\}$. Отже,

$$P(A) = \frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi} l\ \sin\ \varphi d\varphi = 2l/a\pi.$$

1.6. a^2 при $0 < a < 1$ і 1 при $a \ge 1$.

1.7. $\pi a^2/4$ при $0 < a < 1$, $\sqrt{a^2-1} + \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\left(\frac{1}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\right)$.

1.8. $1/12$.

1.9. $(4\ln 2+3)/18$.

1.10. $(4\ln 2+1)/8$.

1.11. $6/19$.

2.1. Доведемо, що події A і $\overline{B}$ незалежні.

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A-(A\cap B)) = P(A) - P(A\cap B) = P(A)(1-P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Інші твердження доводяться аналогічно.

2.2. Доведення проводять аналогічно доведенню задачі 2.1.

2.5. $P(A) = 1/2$, $P(B) = 7/8$, $P(A\cap B) = 3/8$, $P(A)P(B) = 7/16$. Отже, події залежні.

2.6. Незалежні.

2.7. $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(A\cap B\cap C) = 1/4$, $P(A)P(B)P(C) = 1/8$.

2.8. а) $1 - \prod_{k=1}^{n}(1-P_k)$; б) $\prod_{k=1}^{n}(1-P_k)$; в) $\sum_{k=1}^{n} P_k \prod_{i\neq k}(1-P_i)$.

3.1. $P_n(m_0-1) \le P_n(m_0)$ і $P_n(m_0+1) \le P_n(m_0)$. Розпишемо першу нерівність

$c_n^{m_0-1} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1} \le c_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0}$. Після скорочення отримаємо $\frac{q}{n-m_0+1} \le \frac{p}{m_0}$, тобто $m_0 \le p_n + p$.

Аналогічно розписуючи другу нерівність, отримаємо $m_0 \le p_n - q$.

3.2. Під успіхом розуміємо появу грані з номером, кратним 3.

Тоді $p = 1/3$, $P_6(2) = C_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243}$.

3.3. а) $m_0 = 2$, $m_0 = 3$; $P_{14}(2) = P_{14}^3 \approx 0,25$;

б) $P\{\mu_n \ge 4\} = 1 - \sum_{i=0}^{3} P\{\mu_n = i\} \approx 0,302$.

3.4. 24 або 25.

3.5. $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2 \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n \approx \frac{1}{\sqrt{pn}}$ при великих n. Тут використовується комбінаторна тотожність:

$$\sum_{\kappa=0}^{n}(C_n^{\kappa})^2 = C_{2n}^n$$

та формула Стірлінга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$.

3.6. $n = 5000$, $p = 0{,}001$, $np = 5$. Скористаємось теоремою Пуассона:

$$P\{\mu_n \geq 2\} = 1 - p_n(0) - p_n(1) \approx 1 - e^{-5} - 5e^{-5} = 0{,}9596.$$

3.7. $np = 4,\ P\{\mu_n \leq 3\} \approx e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4} + \frac{32}{3}e^{-4} = 0{,}4334$.

3.8. Скористатися локальною теоремою Муавра–Лапласа:

а) 0,0532; б) 0,1219.

3.9. У силу інтегральної теореми Муавра–Лапласа:

$$P\ \{\mu_n \leq 80\} = P\ \{\frac{-50}{\sqrt{49{,}75}} \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{10}{\sqrt{49{,}75}}\} = P\ \{-7{,}09 \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\leq 1{,}43\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7{,}09}^{1{,}43} e^{-t^2/2} dt = \Phi\ (1{,}43) + \Phi\ (7{,}09) \approx 0{,}9236.$$

Значення $\Phi\ (7{,}09) \approx 0{,}5$ з точністю до 10^{-10}.

3.10. а) 0, 0005; б) 0, 9510; в) 0, 9043.

4.1. Знайти сумісний розподіл ξ і η. Показати, що для $\forall\ i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6.$

$$P\{\xi = i, \eta = j\} = P\{\xi = i\}P\{\eta = j\} = \frac{1}{36}.$$

4.2. Сумісний розподіл має вигляд

$$P\{\xi = i, \eta = j\} = \begin{cases} 0, & i < j \\ \dfrac{1}{36}(6 - i + 1), & i = j \\ \dfrac{1}{36}, & i > j \end{cases}$$

$$M\xi = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = 7/2, \quad D\xi = 35/12.$$

Розподіл $\eta : P\{\eta = i\} = \dfrac{(13-2i)}{36}, \quad i = 1, 2, ..., 6;$

$$M\eta = \frac{91}{36}, \quad D\eta = \frac{155}{1296}, \quad \operatorname{cov}(\xi, \eta) = \frac{85}{72}, \quad \rho(\xi, \eta) = 0{,}68.$$

4.3. Ні. Розподіл $\gamma = \xi\eta$ має вигляд

$$P\{\gamma = 0\} = \frac{1}{2}, \quad P\{\gamma = \pm 1\} = \frac{1}{4};$$

$$P\{\gamma = 1, \eta = 1\} = \frac{1}{8} \neq P\{\gamma = 1\}P\{\eta = 1\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

$$M\xi = 0, \quad D\xi = 1, \quad M\eta = 0, \quad D\eta = 1/2.$$

$$\operatorname{cov}(\gamma, \eta) = M\xi\eta^2 = M\xi \cdot M\eta^2 = 0.$$

Отже, $\rho(\gamma, \eta) = 0$.

4.4. Скориставшись визначенням $\rho(\xi, \eta)$.

4.5. $P\{\xi = i\} = \dfrac{i-1}{36}, \ i = 2, ..., 7; \quad P\{\xi = i\} = \dfrac{13-i}{36}, \ i = 8, ..., 12;$

$$P\{\eta = \pm i\} = \frac{6-i}{36}, \ i = 0, 1, ..., 5; \quad \xi = \xi_1 + \xi_2, \ \eta = \xi_1 - \xi_2,$$

де ξ_1 — кількість очок на першому кубику, а ξ_2 — на другому. Відповідно до задачі 4.1. ξ_1 і ξ_2 — н.с.в., і далі твердження $\rho(\gamma, \eta) = 0$ випливає із задачі 4.4. Величини ξ і η будуть залежними, тому що

$P\{\xi=i,\ \eta=i\}=P\{\xi_1=\frac{i+j}{2},\ \xi_2=\frac{i-j}{2}\}$ і, наприклад, при $i=2,\ j=1$

$0=P\{\xi=2,\ \eta=1\}\neq P\{\xi=2\}P\{\eta=1\}=\frac{5}{1296}$.

4.6. а) 0; $\sqrt{21}/5$.

4.7. $(\alpha^2-\beta^2)/(\alpha^2+\beta^2)$.

4.8. а) так; б) не завжди, тому що попарно некорельованих в.в. $M\zeta\xi\eta$ не обов'язково дорівнює $M\zeta M\xi\eta$. Наприклад, $P\{\xi=\pm1\}=\frac{1}{2}$; $P\{\zeta=\pm1\}=\frac{1}{2}$, а $\eta=\xi\zeta$.

Ці в.в. попарно некорельовані, а $1=M\zeta\xi\eta\neq M\zeta M\xi\eta=0$.

5.1.

$$F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le-2\\ \frac{1}{8}(x+2)^2, & -2<x\le0\\ \frac{1}{2}(x+1)-\frac{x^2}{8}, & 0<x\le2\\ 1, & x>2\end{cases}.$$

5.2. $\frac{1}{4}(1+|x|)\exp\{-|x|\}$.

5.3. $P\{\xi+\eta=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{\xi=i\}P\{\eta=k-i\}=\frac{k+1}{(n+1)^2},\ k=0,1,...,n$

і

$$P\{\xi+\eta=k\}=\sum_{s=0}^{2n-k}P\{\xi=n-i\}P\{\eta=k-n+i\}=\frac{2n-k+1}{(n+1)^2},\ k=n+1,..,2n.$$

5.4.

$$P\{\xi_1+\xi_2=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{\xi_1=i\}\,P\{\xi_2=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}\,\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\,\lambda_1^i\,\lambda_2^{k-i}=(\lambda_1+\lambda_2)^k\frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

5.5. $P_{\xi_1+\xi_2}(x)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\ \{-\dfrac{(x-u-a_1)^2}{2{\chi_1}^2}-\dfrac{(u-a_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\}dz.$

Позначимо $z=u-a_{2,}$ $w=x-a_1-a_2$. Тоді

$$P_{\zeta_1+\zeta_2}(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{1}{2}([z\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{w\sigma_2^2}{\sigma_1\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}]^2+\frac{w^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2}w^2/(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{\frac{1}{2}(x-a_1-a_2)^2/(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}.$$

5.6. — 5.7. Доведення здійснювати по індукції.

5.8. Скористатися тим, що якщо ξ_1 і ξ_2 — н.в.в., то

$$P_{\zeta_1/\zeta_2}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|v|P_{\zeta_1}(vx)P_{\zeta_2}(v)\,dv,$$

і результатом задачі 5.7.

5.9. $P_{\zeta_1}+\xi_2=\begin{cases}0, & x\notin[0,3]\\ x/2, & 0\le x\le 1\\ 1/2, & 1<x\le 2\\ \dfrac{1}{2}(3-x), & 2<x\le 3\end{cases}.$

5.10. $P_{\zeta_2}+\xi_2(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{1}{2}(1-e^{-\lambda(x+1)}), & -1<x\le 1\\ \dfrac{1}{2}(e^{-\lambda(x-1)}-e^{-\lambda(x+1)}), & x>1\end{cases}.$

6.1. а) $P/(1-qz)$; б) $e^{\lambda(z-1)}$.

6.2. а) $P_0=P_1=P_2=\dfrac{1}{3}$; б) $P_k=\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$, $k=1,2,\ldots$;

в) $P_k=\dfrac{1}{N+1}$, $k=0,1,\ldots,N$.

6.3. а) Нехай $P\{\xi_1 = k\} = e^{-\lambda_1}\dfrac{\lambda_1^k}{k!}$, а $P\{\xi_2 = k\} = e^{-\lambda_2}\dfrac{\lambda_2^k}{k!}$ і ξ_1, ξ_2 — н.в.н. Тоді

$P_{\xi_1+\xi_2}(z) = P_{\xi_1}(z)P_{\xi_2}(z) = \exp\{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)\}$, отже, $\xi_1 + \xi_2$ має пуассонівський розподіл з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$;

б) якщо $P\{\xi_i = k\} = C_{n_i}^k P_i^k q_i^{n_i-k}$, $i = 1, 2$, то твердження справедливе, коли $P_1 = P_2$;

в) не виконується.

6.4. $P(z_1, z_2) = \exp\{\lambda[z_1(Pz_2 + q) - 1]\}$;

$$M\xi = \frac{\partial}{\partial z_1}P(z_1, z_2)\Big|_{z_1=z_2=1} = \lambda,\quad M\eta = \frac{\partial}{\partial z_2}P(z_1, z_2)\Big|_{z_1=z_2=1} = \lambda P;$$

$M\xi(\xi-1) = \dfrac{\partial^2}{\partial z_1^2}P(z_1, z_2)\Big|_{z_1=z_2=1} = \lambda^2$, тоді $D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$;

аналогічно $M\eta(\eta-1) = \lambda^2 P^2$ і $D\eta = \lambda P$;

$$M\xi\eta = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}P(z_1, z_2)\Big|_{z_1=z_2=1} = \lambda P + \lambda^2 P,$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi \cdot M\eta = \lambda P,\quad \rho(\xi, \eta) = \sqrt{P}.$$

6.5. $P(z_1, z_2) = P_1(z_1, z_2)P_2(z_2)$.

6.6. $P_n = (1-q)P_{n-1} + q(1 - P_{n-1} - f_{n-1})$,

$$f_n = (1-q)f_{n-1} + qP_{n-1},\quad P_0 = 1,\quad f_0 = 0.$$

Твірна функція для послідовності P_n, $n = 0, 1, \ldots$ дорівнює $(1-(1-q)z)^2 \big/ [(1-z)(1+z(3q-2)+z^2(1-3q+3q^2))$, а для послідовності f_n, $n = 0, 1, \ldots$

$$(1-(1-q)z)qz \big/ [(1-z)(1+z(3q-2)+z^2(1-3q+3q^2))].$$

Нехай така в.в. існує. Тоді $P_\xi(z)P_\zeta(z) = P_\eta(z)$, тут

$$P_\xi(z) = \frac{1}{2}(1+z),\quad P_\eta(z) = \frac{1}{8}(1+2z+4z^2+z^3).$$

Зауважимо, що корені $P_\xi(z) = 0$ одночасно є і коренями рівняння $P_\eta(z) = 0$. Але $P_\xi(-1) = 0$, а $P_\eta(-1) = \dfrac{1}{4}$, що призводить до суперечності.

7.1. а) $e^{\lambda(e^{it}-1)}$; б) $(pe^{it}+q)^n$; в) $p \big/ (1-qe^{it})$.

7.2. а) $(e^{itb}-e^{ita}) \big/ [(b-a)it]$; б) $\lambda \big/ (\lambda - it)$;

в) $1 \big/ (1+t^2)$; г) $\exp\{-a|t|\}$.

7.3. $|\varphi(t)|^2$.

7.4. а) нормальний розподіл $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$;

б) рівномірний розподіл на $[-1, 1]$;

в) характеристична функція суми н.в.в. $\xi_1 + \xi_2$, де ξ_1 має розподіл Коші (задача 7.2. (г)), а $P\{\xi_2 = \pm 1\} = 1/2$. Щільність суми буде мати вигляд

$$P_{\xi_1+\xi_2}(x) = \frac{1}{2\pi}\left[1 \big/ (1+(x-1)^2 + 1 \big/ (1+(x+1)^2) \right].$$

7.5. б), д), е). Скористатись теоремами Пойя, Марцинкевича і властивостями характеристичних функцій.

7.6. Характеристична функція в.в. ξ_j має вигляд $e^{\lambda j(e^{it}-1)}$, $j = 1, 2$. Тоді $\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$, котра відповідає характеристичній функції пуассонівського розподілу з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

7.8. $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$

7.9. Ні. Нехай в.в. ξ_1 має рівномірний розподіл на $[c, d]$. Тоді $\varphi_\xi(t) = e^{-a|t|}$, $\varphi_{\xi_1}(t) = \frac{1}{d-c} \frac{(e^{itd} - e^{itc})}{it}$ і $\varphi_\xi(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\,\varphi_{\xi_2}(t)$.

Але характеристична функція в.в. ξ не має нулів, а характеристична функція ξ_1 обов'язково має нулі.

7.10. Нехай $F(x)$ — функція, розподілу якої відповідає характеристична функція $\varphi(t)$. Функція $\left(1-\frac{1}{n}\right)F_1(x) + \frac{1}{n}F(x)$ також є функцією розподілу, $F_1(x) = 1$ при $x > 0$ і $F_1(x) = 0$ при $x \le 0$. Характеристична функція її буде мати вигляд $\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\varphi(t)$. Тоді функція $\left(\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\varphi(t)\right)^n$ також є характеристичною (відповідає сумі n н.о.р.в.в.).

$\left(1+\frac{\varphi(t)-1}{n}\right)^n \to e^{\varphi(t)-1}$ при $n \to \infty$; гранична функція неперервна в нулі. Далі, скориставшись теоремою неперервності, отримаємо, що $\exp\{\varphi(t)-1\}$ – характеристична функція.

8.1. а), б), г), е), ж) — виконуються, в), д) — не виконуються.

8.2. При $\alpha < 1/2$, тому що у цьому разі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} D\xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^{2\alpha-1} = 0$.

8.3. $a/(a^2+t^2)$.

8.4. $\ln \eta_n = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k \to 0$ по ймовірності в силу закона великих чисел. Тут використовувався той факт, що $M \ln \xi_k = \int_0^1 \ln x\, dx = -1$. Тоді $\eta_n \to 1$ по ймовірності.

8.5. $e^c, \; c = \int_0^1 \ln x e^{-x} dx$.

8.6. Нехай $\{\xi_n, \; n \ge 1\}$ — п.н.о.р.в.в., які мають рівномірний розподіл на [0,1]. В силу ЗВЧ

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \to M\xi_1 = \frac{1}{2}, \; n \to \infty$ по ймовірності

$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to f\left(\frac{1}{2}\right), \; n \to \infty$ по ймовірності для неперервної функції $f(x)$.

Відповідно до теореми Лебега, якщо $f(x)$ — обмежена функція, то

$Mf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to Mf\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right), \; n \to \infty$.

Але $Mf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n$.

8.7. $e^{-m/2}$.

8.8. 2^{-m}.

8.9. -1.

9.1. $\Phi(\sqrt{3}) \approx 0{,}46$.

9.2. При $\alpha \geq -\frac{1}{2}$. У цьому прикладі

$$M\xi_k = 0,\ D\xi_k = k^{2\alpha},\ M|\xi_k|^3 = k^{3\alpha},\ B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha}.$$

При $2\alpha + 1 > 0$

$$B_n^2 = n^{2\alpha+1}\left(\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2\alpha} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^{2\alpha} \cdot \frac{1}{n}\right) \approx n^{2\alpha+1}\int_0^1 x^{2\alpha}dx = \frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} \cdot$$

При $\alpha = -\frac{1}{2}$ $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \approx \ln n$. Якщо $\alpha < -1/2$, то обмежені при $n \to \infty$ і, отже, не буде виконана умова рівномірної малості. Аналогічно при

$\alpha > -1/3$ $c_n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^{3\alpha} \approx \frac{n^{3\alpha+1}}{3\alpha+1}$, а при $\alpha = -\frac{1}{3}$ $c_n^3 \approx \ln n$ і при $\alpha < -1/3$ обмежені, оскільки при

$\alpha \geq -1/2$ $n^{3\alpha+1} = 0(n^{3\alpha+3/2})$, то $c_n^3 = 0(B_n^3)$ і умова Ляпунова буде виконана.

9.3. $2\Phi\left(\frac{2a}{\sigma}\right)$, де σ — рішення рівняння $\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = \frac{b}{2}$.

9.4. Не виконується.

9.5. Не виконується.

9.6. Справедливі представлення

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n}\right)^{-1} \quad \text{і} \quad \xi_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n}}\right)^{-1}.$$

Далі скористатися ЗВЧ і ЦГТ.

9.7. $0{,}5 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\lambda}}\right)$, $x \geq 0$ і $0{,}5 - \Phi\left(\frac{-x}{\sqrt{2\lambda}}\right)$, $x < 0$.

10.1. Позначимо через $p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^{\sigma}}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right\}$ одновимірну щільність $w(t)$. Тоді щільністю розподілу величин $w(3)$ і $w(t)$ при умові, що $w(1) = 0$, $0 < s < t < 1$, є наступне відношення:

$$f(s,x,t,y) = p(s,x)p(t-s,y-x)p(1-t-y) \Big/ p(1,0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)(1-t)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{x^2}{s}+\frac{(y-x)^2}{(t-s)}+\frac{y^2}{1-t}\right)\right\}.$$

10.2. s$(1-t)$. Скористатися результатом задачі 10.1.

10.3. Показати, що $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ — ОПНП і перевірити умови (1) – (4) 10.

10.4. Аналогічно 10.3, при цьому незалежність приросту

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(w_1(t)+w_2(t)\right)$ та їх незалежності

$w_1(t)$ і $w_2(t)$ та їх незалежності.

10.5. $\varphi(\tau) = M\exp\{i\tau w(\tau)\} = \lambda \Big/ \left(\frac{\sigma^2\tau^2}{2}+\lambda\right).$

10.6. Скористатися тим, що $w_1(t) - w_1(s)$ має нормальний розподіл $N(0,t-s)$.

10.7. $R(t,s) = \min(t,s) - ts.$

10.8.

$$\frac{1}{2\pi^{n/2}\sigma^n\sqrt{t_1(t_2-t_1)\dots(t_n-t_{n-1})}}\exp\left\{\frac{-x_1^2}{2t_1\sigma^2}-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)\sigma^2}-\dots-\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})\sigma^2}\right\}.$$

11.1. $M\xi(t) = M\Pi(t+1) - M\Pi(t) = \lambda(t+1) - \lambda t = \lambda$

$R(t,s) = M(\xi(t)-\lambda)(\xi(s)-\lambda) = M\xi(t)\xi(s) - \lambda^2$.

Розглянемо 3 випадки:

а) $s \le t-1$; $R(t,s) = M(\Pi(t+1)-\Pi(t))\cdot(\Pi(s+1)-\Pi(s)) - \lambda^2 = 0$;

б) $t-1 < s < t$. У цьому разі

$$(\Pi(t+1)-\Pi(t))(\Pi(s+1)-\Pi(s)) = (\Pi(t+1)-\Pi(s+1)+\Pi(s=1)-\Pi(t))\cdot$$

$$\cdot(\Pi(s+1)-\Pi(t)+\Pi(t)-\Pi(s)) = (\Pi(t+1)-\Pi(s+1))\cdot$$

$$\cdot(\Pi(s+1)-\Pi(t)) + (\Pi(s+1)-\Pi(t))^2 + (\Pi(t+1)-\Pi(s+1))\cdot$$

$$\cdot(\Pi(t)-\Pi(s)) + (\Pi(s+1)-\Pi(t))(\Pi(t)-\Pi(s))$$

Тоді $R(t,s)=\lambda-\lambda(t,s)$;

в) $s=t \quad M\left(\Pi(t+1)-\Pi(t)\right)^2=\lambda^2+\lambda$.

Таким чином,

$$R(t,s)=\begin{cases} 0, & s\le t-1 \\ \lambda-\lambda(t-s), & t-1<s<t \\ \lambda, & s=t \end{cases} \quad \text{і} \quad M\xi(t)=\lambda,$$

тобто $\xi(t)$ — стаціонарний у широкому сенсі процес.

11.2. $M\xi(t)=0,\ M\xi(t)M\xi(s)=\sum_{k=1}^{n} b_k^2\cos\lambda_k(t-s)$.

11.3. $R(t)=2a\dfrac{\sin bt}{t}$.

11.4. $R(t)=2c^2(2\cos bt-1)\dfrac{\sin bt}{t}$.

11.5. $f(u)=\dfrac{\sigma^2}{2\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2$.

11.6. $f(u)=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\alpha^2}{(u^2+\alpha^2)^2}$.

11.7. $M\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{i(tx+\phi)}\dfrac{d\varphi}{2\pi}\pi\ dF(x)=0;$

$$R(t,s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{i(t-s)x}\frac{d\varphi}{2\pi}\ dF(x)=R(t-s).$$

12.1. Обсяг вибірки n = 16. Упорядкувавши елементи вибірки за зростанням, отримаємо варіаційний ряд:

а) 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 10, 10;

б) статистичний ряд записується у вигляді таблиці

y_i	2	3	4	5	7	10
m_i	4	3	4	2	1	2

12.2. а) $F_n(x)\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}2, & 2 < x \le 4 \\ 0{,}52, & 4 < x \le 7 \\ 0{,}92, & 7 < x \le 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}$; б) $F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 0{,}05, & 1 < x \le 3 \\ 0{,}3, & 3 < x \le 5 \\ 0{,}5, & 5 < x \le 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$

12.3. а) $F_n(x)\begin{cases} 0, & 2 \ge x \\ 1/14, & 2 < x \le 5 \\ 4/14, & 5 < x \le 7; \\ 6/14, & 7 < x \le 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases}$ б) $F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 8/60, & 0 < x \le 1 \\ 25/60, & 1 < x \le 2 \\ 41/60, & 2 < x \le 3 \\ 51/60, & 3 < x \le 4 \\ 57/60, & 4 < x \le 5 \\ 59/60, & 5 < x \le 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$.

13.1. $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Оцінка слушна та незміщена $M\hat{\lambda}_n = \lambda, D\hat{\lambda}_n = \frac{\lambda}{n}$.

13.2. $\hat{a}_n^2 = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Оцінка слушна і незміщена.

13.3. $\hat{a}_n = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1}{\overline{x}}$, $\hat{b}_n = 1 - \dfrac{\overline{x}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1}$.

13.4. $\bar{u}_n = \dfrac{2\bar{x}}{\sqrt{\pi}}$. Оцінка слушна і незміщена.

13.5. $\bar{в}_n = \dfrac{\bar{x}}{\sigma^2 - \bar{x}^2}, \;\; \bar{m}_n = \dfrac{\bar{x}^2}{\sigma_2 - \bar{x}_2}$ де $\sigma_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Ці оцінки слушні. У чисельному прикладі $\hat{m}_n = 1{,}678$ і $\hat{\beta}_n = 4{,}79$.

13.6. $\hat{P}_n = n \Bigg/ \left(n + \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$.

Оцінка слушна.

$$M\hat{P}_n^{-1} = P^{-1}; \;\; D\hat{P}_n^{-1} = \frac{(1-P)}{nP^2}.$$

14.1. Функція правдоподібності матиме вигляд

$$L(x,\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n, & \text{якщо } x_n \le \theta \\ 0, & \text{у протилежному разі} \end{cases}.$$

Відповідно до теореми факторизації $T(x) = x_n$, $x = (x_1, ..., x_2)$.
Функція розподілу x_n має вигляд $P\{x_{(n)} < t\} = F^n(t)$,

де
$$F(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ t/\theta, & 0 \le t \le \theta \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Нехай для функції $\varphi(t)$, $t \ge 0$ виконується умова

$$M_\theta \varphi(T) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta \varphi(t)\, t^{n-1} dt = 0, \;\; \forall \theta > 0.$$

Диференціюючи за θ тотожність $\int_0^\theta \varphi(t)\, t^{n-1} dt \equiv 0$, отримаємо $\varphi(\theta)\theta^{n-1} \equiv 0$, тобто $\varphi(\theta) = 0, \;\; \forall \theta > 0$. Таким чином, достатня статистика $T(x) = x_n$ — повна.

14.3. $T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i;\ P_T(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t/\theta}\cdot\ \frac{1}{\theta^n}.$

14.4. б) вектор $\left\{\max_{1\le i\le n}x_i;\ \sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$ — достатня статистика.

14.5. $L(x,\lambda)=e^{-n\lambda}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i,\ T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i,$

$T(x)$ має розподіл Пуассона з параметром $n\lambda$.

14.6. $L(x,\theta)=\frac{1}{\pi^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(x_i-\theta)^2}$. Тут не можна знайти статистику T, яка дає факторизаційне уявлення, розмірність якого менше n.

14.7. $P_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x>0,\ M\xi=\exp\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right),$

$D\xi=\exp\{2a+\sigma^2\}(e^{\sigma^2}-1),\ T(x)=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i,\ \sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i\right).$

15.1. (0,108; 0,424).

15.2. а) (0,304; 0,496); б) (0,276; 0,526).

15.3. (1,530; 2,470).

15.4. (0,502; 0,718).

15.5. $\bar{x}$ = 425 год., (270,70 год.; 779,82 год.).

15.6. $\bar{x}$ = 600 год., (408 год.; 1032 год.).

16.1. $\lambda_q=0{,}581$, $\lambda_{0,1}=1{,}224$; $\lambda_{0,1}>\lambda_q$, гіпотеза не відхиляється.

16.2. $\chi^2_q=2{,}07$, $\chi^2_{0,95;3}=7{,}8$; $\chi^2_q<\chi^2_{0,95;3}$, гіпотеза не суперечить вхідним даним.

16.3. $\lambda_q=0{,}58$, $\lambda_{0,01}=1{,}627$; $\lambda_q<\lambda_{0,01}$, отже, гіпотеза не суперечить вхідним даним.

16.4. $\chi^2_q=3{,}75$, $\chi^2_{0,9;1}=2{,}7$; $\chi^2_q>\chi^2_{0,9;1}$, гіпотеза незалежності суперечить даним задачі.

16.5. $\chi_q^2 = 0{,}696$, $\chi^2_{0,9;1} = 2{,}7$; $\chi_q^2 < \chi^2_{0,9;1}$, гіпотеза незалежності не суперечить даним задачі.

16.6. $\chi_q^2 = 20{,}48$, $\chi^2_{0,95;2} = 6{,}0$; $\chi_q^2 > \chi^2_{0,95;2}$, гіпотеза незалежності суперечить даним задачі.

17.1. $\eta_n = \sum_{i=1}^{N} m_i \ln \frac{P_i^{(1)}}{P_i^{(0)}}$, де m_i — кількість результатів, що прийняли значення i.

17.2. Критична область $K = \left\{ (x_1,.., x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i > c_1 \right.$, де c_1 знаходиться з рівняння

$$\sum_{j=0}^{c_1} \frac{(n\lambda_0)^j}{j!} e^{-n\lambda_0} = 1-\alpha. \text{ Похибка 2-го роду } \beta = \sum_{j=0}^{c_1} \frac{(n\lambda_1)^j}{j!} e^{-n\lambda_1}$$

17.3. $n = 22$.

17.4. $n = 64$.

17.5. Критична область $K = \left\{ (x_1, .., x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i < c_1 \right\}$, де c_1 знаходиться з рівняння

$$\int_0^{c_1} \frac{(\lambda_0 x)^{n-1}}{(n-1)\ !} \lambda_0 e^{-\lambda_0 x} dx = \alpha. \text{ Похибка 2-го роду } \beta = 1 - \int_0^{c_1} \frac{(\lambda_1 x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx.$$

18.1. $C = 1{,}325$, $C_{0,01} = 2{,}57$; $C < C_{0,01}$, гіпотеза про рівність м.с. не суперечить даним.

18.2. $t = 0{,}94$, $t_{0,05;\,18} = 2{,}10$; $t < t_{0,05;\,18}$, гіпотеза про рівність м.с. не суперечить даним задачі.

18.3. $t = 1{,}67$, $t_{0,05;\,12} = 2{,}18$; $t < t_{0,05;\,12}$, гіпотеза про рівність м.с. не суперечить даним задачі.

18.4. $C = 0{,}43$, $C_{0,05} = 1{,}96$; $C_{0,05} > C$, різниця між середніми пояснюється випадковими причинами.

18.5. а) $t = 3{,}26$, $t_{0,05;\,9} = 2{,}26$; $t > t_{0,05;\,9}$, гіпотеза H_o відхиляється;

б) $F = 2{,}45$, $F_{(0,05;\,4,5)} = 5{,}19$; $F < F_{(0,05;\,4,5)}$, тобто немає причин відхиляти гіпотезу H_o.

18.6. $F = 2{,}05$, $F_{(0,05;\,10,14)} = 2{,}60$;

$F < F_{(0,05;\,10,14)}$. Тобто гіпотеза про рівність дисперсій не суперечить даним задачі.

ДОДАТОК

Таблиця 1

Значення функції $\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

μ \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0, 3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363
10			0,0008	0,0053	0,0181
11			0,0002	0,0019	0,0082
12			0,0001	0,0006	0,0034
13				0,0002	0,0013
14				0,0001	0,0005
15					0,0002
16					0,0001

Таблиця 2

Значення функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,60	0,2257	1,28	0, 3997	1,64	0,4495
0,10	0,0398	0,70	0,2580	1,30	0, 4032	1,65	0,4505
0,20	0,0793	0,80	0,2881	1,33	0, 4082	1,66	0,4515
0,26	0,1026	0,90	0,3159	1,40	0, 4192	1,70	0,4554
0,30	0,1179	1,00	0,3413	1,43	0, 4236	1,76	0,4608
0,40	0,1554	1,10	0,3643	1,50	0, 4332	1,80	0,4641
0,50	0,1915	1,20	0,3849	1,60	0, 4452	1,90	0,4713
1,96	0,4750	2,57	0,4949	3,10	0,4990	3,60	0,4998
2,00	0,4772	2,60	0,4953	3,20	0,4993	3,70	0,4998
2,10	0,4821	2,66	0,4961	3,29	0,4995	3,80	0,4999
2,20	0,4861	2,70	0,4965	3,30	0,4995	3,90	0,4999
2,30	0,4892	2,80	0,4974	3,33	0,4995	4,00	0,49999
2,33	0,4901	2,90	0,4981	3,40	0,4996	5,00	0,499999
2,50	0,4938	3,00	0,4986	3,50	0,4997		

Таблиця 3

Значення χ^2 залежно від імовірності $P(\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}) = 1-\alpha$ і кількості степенів вільності κ

1–а / κ	0,05	0,10	0,90	0,95	0,99
1	0,0039	0,016	2,7	3,8	6,6
2	0,103	0,211	4,6	6,0	9,2
3	0,352	0,584	6,3	7,8	11.3
4	0,71	1,06	7,8	9,5	13,3
5	1,14	1,61	9,2	11.1	15,1
6	1,63	2,20	10,6	12.6	16,8
7	2,17	2,83	12,0	14,1	18,5

Закінчення табл. 3

8	2,73	3,49	13,4	15,5	20,1
9	3,32	4,17	14,7	16,9	21,7
10	3,94	4,86	16,0	18,3	23,2
11	4,6	5,6	17,3	19,7	24,7
12	5,2	6,3	18,5	21,0	26,2
13	5,9	7,0	19,8	22,4	27,7
14	6,6	7,8	21,1	23,7	29,1
15	7,3	8,5	22,3	25,0	30,6
16	8,0	9,3	23,5	26,3	32,0
17	8,7	10,1	24,8	27,6	33,4
18	9,4	10,9	26,0	28,9	34,8
19	10,1	11,7	27,2	30,1	36,2
20	10,9	12,4	28.4	31,4	37,6

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — М., 1986. — 431 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К., 1979. — 407 с.
3. *Дороговцев А. Я., Сильвестров Д. С., Скороход А. В., Ядренко М. Н.* Теория вероятностей: Сб. задач. — К., 1980. — 432 с.
4. *Прохоров А. В., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. — М., 1986. — 327 с.
5. *Климов Г. П., Кузьмин А. Д.* Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решением. — М., 1985. — 232 с.
6. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М., 1985. — 232 с.
7. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 1999.
8. *Горбань С. Ф., Снижко Н. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: МАУП, 1999.
9. *Жлуктенко В., Наконечний С.* Практитум з курсу “Теорія ймовірностей і математична статистика”. — К.: Вид-во КІНГ, 1991.

10. *Жлуктенко В., Наконечний С. І.* Практитум з математичної статистики. — К.: Вид-во КІНГ, 1991.
11. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк, 1999.
12. *Шефтель З. Г.* Теорія ймовірностей. — К., 1994.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *С. Г. Рогузько*
Комп’ютерне верстання *О. Л. Тищенко*

Зам. № ВКЦ-3453

Формат $60\times84/_{16}$. Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний. Наклад 50 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008