МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

“ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ ТА МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА”

(для бакалаврів)

Київ 2008

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики та програмування
С. С. Шкільняк

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування
(протокол № 1 від 30.08.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Шкільняк С. С. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Теорія алгоритмів та математична логіка” (для бакалаврів). — К.: МАУП, 2008. — 54 с.

Методичні матеріали містять пояснювальну записку, тематичний план, зміст самостійної роботи з дисципліни “Теорія алгоритмів та математична логіка”, приклади розв’язання типових задач, питання для самоконтролю, завдання та вправи для самостійного розв’язання, список рекомендованої літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Дисципліна “Математична логіка і теорія алгоритмів” є базовою нормативною дисципліною спеціальностей “інформатика” та “прикладна математика”.

Метою і завданням навчальної дисципліни “Математична логіка і теорія алгоритмів” є засвоєння базових знань з основ математичної логіки і теорії алгоритмів. Поняття і методи математичної логіки необхідні для обґрунтування правильності тих чи інших способів здобуття істинного знання, теорія алгоритмів є теоретичним фундаментом програмування. Апарат математичної логіки і теорії алгоритмів необхідний для адекватного моделювання різноманітних предметних областей, створення сучасних програмних та інформаційних систем. Тому належне оволодіння основними поняттями і методами математичної логіки і теорії алгоритмів необхідне для формування висококваліфікованих спеціалістів у галузях прикладної математики та інформатики.

Предмет навчальної дисципліни “Математична логіка і теорія алгоритмів” включає в себе вивчення базових понять і методів математичної логіки і теорії алгоритмів, розгляд семантичних моделей логіки, формально-аксіоматичних логічних систем, формальних моделей алгоритмів та агоритмічно обчислюваних функцій.

Для засвоєння курсу необхідні знання навички, здобуті при вивченні шкільного курсу математики, курсів дискретної математики, алгебри, програмування. Студент повинен знати основи теорії множин, булеві функції, основи загальної алгебри.

Нормативна навчальна дисципліна “Математична логіка і теорія алгоритмів” є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня “бакалавр”. Курс математичної логіки і теорії алгоритмів потрібен для подальшого вивчення таких розділів математики та інформатики, як системне програмування, бази даних та інформаційні системи, системи штучного інтелекту, моделі та структури даних, сучасні інформаційні технології, комп’ютерна графіка, розпізнавання образів, оптимізація обчислень, системи автоматизованого керування.

Пропоновані методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Теорія алгоритмів та математична логіка” містять розгорнутий тематичний план дисципліни із розкриттям змісту тем. Для кожного змістового модуля наведені приклади розв'язання типових задач, теми для самостійного вивчення, список питань для самоконтролю рівня оволодіння теоретичним матеріалом, задачі та вправи для самостійного розв'язання, а також список рекомендованої літератури.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
дисципліни
"ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ ТА МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА"

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
1	2
	Змістовий модуль I. Пропозиційна логіка (18 год.)
1	Основні поняття логіки. Пропозиційна логіка
2	Пропозиційне числення
3	Секвенційне числення пропозиційної логіки
	Змістовий модуль II. Логіки 1-го порядку (24 год.)
4	Моделі та мови логік 1-го порядку
5	Теорії 1-го порядку
6	Секвенційні числення логік 1-го порядку
	Змістовий модуль III. Нетрадиційні логіки (10 год.)
7	Інтуїціоністська логіка
8	Модальні логіки
	Змістовий модуль IV. Формальні моделі алгоритмів та АОФ (20 год.)
9	МНР. Машини Тьюрінга. Нормальні алгоритми
10	Примітивно рекурсивні, частково рекурсивні, рекурсивні функції. Теза Чорча
	Змістовий модуль V. Теорія алгоритмів. Арифметика (24 год.)
11	Кодування. Нумерації. Універсальні функції
12	Розв'язність та нерозв'язність

1	2
13	Відносна обчислюваність. Складність обчислень
14	Арифметичність. Арифметична ієрархія
Разом годин: 216	

ЗМІСТ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
з дисципліни
“ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ ТА МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА”

Змістовий модуль І. Пропозиційна логіка

Тема 1. Основні поняття логіки. Пропозиційна логіка

Предмет математичної логіки і теорії алгоритмів. Поняття висловлення, предиката. Числення, формальні системи. Алгоритми, відносні алгоритми. Алгоритмічно обчислювані функції. Алгоритмічна перелічність, розв’язність.

Пропозиційна логіка. Логічні зв’язки, їх властивості. Мова пропозиційної логіки. Пропозиційні формули (ПФ). Тавтології. Основні закони пропозиційної логіки.

Логічний (тавтологічний) наслідок, логічна (тавтологічна) еквівалентність. Несуперечливість множини ПФ. Відношення логічного наслідку для множин ПФ.

Література [1; 5; 9; 10; 14; 15, 24, 29]

Тема 2. Пропозиційне числення

Аксіоматичні логічні системи гільбертівського типу. Пропозиційне числення, його аксіоми і правила виведення.

Приклади виведень у пропозиційному численні.

Теорема тавтології. Коректність та повнота пропозиційного числення. Розв’язність пропозиційного числення.

Автоматизація пошуку виведень. Метод резолюцій пропозиційної логіки.

Література [3; 5; 9; 10; 13—15; 26]

Тема 3. Секвенційне числення пропозиційної логіки

Аксіоматичні логічні системи генценівського типу. Секвенції. Секвенційні форми, секвенційні дерева.

Пропозиційне секвенційне числення, його коректність і повнота.

Приклади виведень у пропозиційному секвенційному численні.

Література [5; 10; 22; 29; 35]

Теми для самостійного вивчення

1. Софізми. Парадокси. Закони пропозиційної логіки.

Література [5; 9; 24]

2. Доведення теореми тавтології. Наслідки ТТ.

Література [7; 10; 14]

3. Метод модельних множин у пропозиційній логіці.

Література [10; 29; 32]

4. Правило перетину. Теорема Генцена про елімінацію перетинів.

Література [5; 10; 22; 29]

Приклади розв'язків типових задач

Приклад 1.1. Встановіть, чи транзитивне відношення логічного наслідку для множин формул.

Маємо $\{\Phi\vee\Psi\vee\neg\Phi\} \models \{\Phi\vee\Psi, \Psi\vee\neg\Phi\}$ та $\{\Phi\vee\Psi, \Psi\vee\neg\Phi\} \models \Psi$, але $\{\Phi\vee\Psi\vee\neg\Phi\} \not\models \Psi$. Отже, із $\Gamma \models \Delta$ та $\Delta \models \Sigma$ не мусить випливати $\Gamma \models \Sigma$.

Приклад 1.2. Доведіть у ПЧ: якщо $\vdash A\vee B$, то $\vdash \neg\neg A\vee B$.

Маємо $\vdash \neg\neg A\vee\neg A$ (аксіома), тому $\vdash \neg A\vee\neg\neg A$ за ПК. Звідси та з умови $\vdash A\vee B$ маємо $\vdash B\vee\neg\neg A$ за П4, тому $\vdash \neg\neg A\vee B$ за ПК.

Приклад 1.3. Доведіть чи спростуйте із використанням ТТ:

1) якщо $\vdash A\to B$ та $\vdash C\to D$, то $\vdash A\vee C\to B\vee D$.

2) якщо $\vdash A\vee C\to B\vee D$, то $\vdash A\to B$ та $\vdash C\to D$?

Неважко переконатись, що $\{A\to B, C\to D\} \models A\vee C\to B\vee D$. Звідси і з умови $\vdash A\to B$ та $\vdash C\to D$ дістаємо $\vdash A\vee C\to B\vee D$ за ТТ.

Нехай із $\vdash A\vee C\to B\vee D$ випливає $\vdash A\to B$ та $\vdash C\to D$. Звідси необхідно $A\vee C\to B\vee D \models (A\to B)\&(C\to D)$. При $\tau(A) = \tau(C) = \tau(D) = T$ та $\tau(B) = F$ маємо $\tau(A\vee C\to B\vee D)=T$ та $\tau((A\to B)\&(C\to D)) = F$. Отже, твердження 2) неправильне.

Приклад 1.4. Використовуючи пропозиційне секвенційне числення, встановіть правильність $A \vee B \to C \models A \& B \to C$

Будуємо виведення секвенції $\vdash A \vee B \to C, \dashv A \& B \to C$.

$$\vdash A \vee B \to C, \dashv A \& B \to C$$

$$\vdash A \vee B, \dashv A \& B \to C \qquad \vdash C, \dashv A \& B \to C$$

$$\vdash A, \dashv B, \vdash A \& B \to C \qquad \vdash C, \vdash A \& B, \dashv C \times$$

$$\vdash A, \dashv B, \vdash A \& B, \dashv C$$

$$\vdash A, \dashv B, \vdash A, \vdash B, \dashv C \times$$

Збудували замкнене секвенційне дерево, тому $A \vee B \to C \models A \& B \to C$.

Приклад 1.5. Використовуючи пропозиційне секвенційне числення, встановіть правильність $A \& B \to C \models A \vee B \to C$.

Будуємо виведення секвенції $\vdash A \& B \to C, \dashv A \vee B \to C$.

$$\dashv A \& B \to C, \dashv A \vee B \to C$$

$$\dashv A \& B, \dashv A \vee B \to C \qquad \vdash C, \dashv A \vee B \to C$$

$$\dashv A, \dashv A \vee B \to C \qquad \dashv B, \dashv A \vee B \to C \qquad \vdash C, \vdash A \vee B, \dashv C \times$$

$$\dashv A, \vdash A \vee B, \dashv C \qquad \dashv B, \vdash A \vee B, \dashv C$$

$$\dashv A, \vdash A, \dashv C \times \qquad \dashv A, \vdash B, \dashv C \qquad \dashv B, \vdash A, \dashv C \qquad \dashv B, \vdash B, \dashv C \times$$

Отримали незамкнене дерево, тому неправильно, що $A \& B \to C \models A \vee B \to C$.

За двома незамкненими листами можна прочитати такі два контрприклади:

— $\tau(A) = F, \ \tau(B) = T, \ \tau(C) = F$;

— $\tau(A) = T, \ \tau(B) = F, \ \tau(C) = F$.

Приклад 1.6. Використовуючи метод резолюцій, встановіть правильність $\{P \vee Q, \neg P \vee R, \neg Q \vee S, \neg R \vee S \vee P, \neg S \vee P\} \models P$.

Виведемо 0 із множини $\{P \vee Q, \neg P \vee R, \neg Q \vee S, \neg R \vee S \vee P, \neg S \vee P, \neg P\}$.

Із $P \vee Q$ та $\neg P \vee R$ за ПР маємо $Q \vee R$.

Із $Q \vee R$ та $\neg Q \vee S$ за ПР маємо $R \vee S$.

Із $R \vee S$ та $\neg R \vee S \vee P$ за ПР маємо $S \vee P$.

Із $S \vee P$ та $\neg S \vee P$ за ПР маємо P.

Із P та $\neg P$ за ПР маємо 0.

Ми довели, що множина $\{P \vee Q, \neg P \vee R, \neg Q \vee S, \neg R \vee S \vee P, \neg S \vee P, \neg P\}$ суперечлива, тому твердження про наявність $\models$ правильне.

Приклад 1.7. Використовуючи метод резолюцій, встановіть, чи суперечлива множина $\{P \vee Q, Q \vee S \vee \neg P, \neg Q\}$?

Із $P \vee Q$ та $\neg Q$ за ПР маємо P.

Із P та $Q \vee S \vee \neg P$ за ПР маємо $Q \vee S$.

Із $Q \vee S$ та $\neg Q$ за ПР маємо S.

Із $\neg Q$ та $Q \vee S \vee \neg P$ за ПР маємо $S \vee \neg P$.

Із $S \vee \neg P$ та $P \vee Q$ знову маємо $Q \vee S$.

Для пропозиційних символів, що входять до складу диз'юнктів нашої множини ми вивели літери P та S, маємо в множині $\neg Q$ як одиничний диз'юнкт. Тому розглянемо таку оцінку: $\tau(P)=T$, $\tau(S)=T$, $\tau(Q) = F$. При такій оцінці всі диз'юнкти множини приймають значення T, звідки множина несуперечлива.

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає математична логіка?
2. Що таке софізм? Наведіть приклади софізмів.
3. Що таке парадокс? Наведіть приклади парадоксів.
4. У чому сутність аксіоматичного методу?
5. Що таке числення? Наведіть приклади числень.
6. Що таке алгоритм? Вкажіть характерні властивості алгоритмів.
7. Що таке алгоритмічно обчислювана функція?
8. Що таке алгоритмічно перелічна множина? Алгоритмічно розв'язна множина?
9. Сформулюйте основні закони традиційної логіки.
10. Що таке висловлення? Наведіть приклади висловлень.
11. Що таке предикат? Наведіть приклади предикатів.
12. Який зв'язок висловлень та предикатів?
13. Дайте визначення предиката як математичного поняття.

14. Дайте визначення істинного предиката, виконуваного предиката.
15. Чи може бути (частково) істинний предикат невиконуваним?
16. Що таке область істинності та область хибності предиката?
17. Що таке формальна система?
18. Що таке правило виведення? Як записуємо правила виведення?
19. Що таке теорема?
20. Що таке виведення?
21. Дайте визначення пропозиційних композицій — логічних зв'язок $\neg$, $\vee$, **&**, $\to$, $\leftrightarrow$, $\oplus$.
22. Які пропозиційні композиції можна вибрати за базові?
23. Дайте індуктивне визначення пропозиційної формули (ПФ).
24. Що таке префіксна (польська) форма запису? інфіксна форма запису?
25. Що таке скорочення пропозиційної формули? Наведіть приклади ПФ та їх скорочень.
26. Як виражаються **&**, $\to$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$ через $\neg$ та $\vee$?
27. Що таке істинна оцінка мови ПЛ?
28. Дайте визначення тавтології. Наведіть приклади тавтологій.
29. Що таке суперечність? Наведіть приклади суперечностей.
30. Вкажіть тавтології, які виражають основні закони традиційної логіки.
31. Запишіть основні властивості пропозиційних композицій.
32. Дайте визначення логічного (тавтологічного) наслідку для ПФ. Наведіть приклади.
33. Дайте визначення логічної (тавтологічної) еквівалентності ПФ. Наведіть приклади.
34. Що таке логічний (тавтологічний) наслідок скінченної множини ПФ?
35. Вкажіть основні властивості відношень $\models$ та $\sim_{т}$.
36. Що таке суперечлива множина ПФ?
37. Дайте визначення відношення логічного наслідку для множин ПФ. Наведіть приклади.
38. Чи правильно, що відношення логічного наслідку для множин ПФ рефлексивне? транзитивне? Відповідь аргументуйте.
39. Вкажіть основні властивості відношення логічного наслідку для множин ПФ.
40. Сформулюйте теорему семантичної еквівалентності.
41. Сформулюйте теорему заміни еквівалентних.

42. Що таке аксіоматичні системи гільбертівського типу?
43. Що таке пропозиційне числення? Вкажіть аксіоми та правила виведення.
44. Сформулюйте правило комутативності (ПК).
45. Сформулюйте правило modus ponens (MP).
46. Сформулюйте теорему коректності для ПЧ.
47. Сформулюйте теорему тавтології для ПЧ.
48. Які ви знаєте наслідки теореми тавтології?
49. Чому теорему тавтології називають теоремою повноти ПЧ?
50. Вкажіть алгоритм розв'язання ПЧ.
51. Що таке літера? Що таке диз'юнкт?
52. Що таке контрарна пара літер?
53. Що таке резольвента диз'юнктів?
54. Як формулюється правило резолюцій?
55. У чому полягає коректність правила резолюцій?
56. Що таке резолютивне виведення?
57. Що таке спростування множини диз'юнктів?
58. У чому полягає властивість підформульності?
59. Що таке секвенційні числення?
60. Дайте визначення секвенції в генценівському варіанті.
61. Що таке секвенційна форма?
62. Вкажіть базові секвенційні форми пропозиційного рівня.
63. Що таке секвенція відмічених (специфікованих) формул?
64. Дайте визначення замкненої секвенції специфікованих формул.
65. Вкажіть базові секвенційні форми для випадку секвенцій специфікованих формул.
66. Як задаються виведення в секвенційних численнях?
67. Що таке секвенційне дерево? Дайте визначення.
68. Дайте визначення замкненого секвенційного дерева.
69. Дайте визначення вивідної секвенції.
70. Сформулюйте теорему коректності для секвенційних числень.
71. Дайте визначення модельної множини пропозиційних формул.
72. Сформулюйте теорему повноти для секвенційних числень.
73. Сформулюйте правило перетину.
74. Сформулюйте теорему Генцена про елімінацію перетинів.

Завдання та вправи для самостійного розв'язання

Тема 1. Основні поняття логіки. Пропозиційна логіка

1. Проаналізуйте наступні міркування. Якщо вони некоректні, то які закони логіки порушують?
   1) Якщо ти їси менше, то будеш голоднішим. Якщо ти будеш голоднішим, то їстимеш більше. Отже, якщо ти їси менше, то їси більше.
   2) Той, хто хоче щось вивчити, цього не знає. Незнаючий — невіглас. Отже, тільки невігласи хочуть вчитись.
   3) Студенти, які хочуть вчитися, вчаться і без заохочення. Студентів, які не хочуть вчитися, заохочувати марно. Отже, студентів заохочувати не потрібно.
   4) Сіль та цукор білі. Ніщо не може бути одночасно цукром і сіллю. Отже, ніщо не може бути білим.
   5) Злодій не хоче брати щось погане. Надбання доброго — добра справа. Отже, злодій робить добру справу (античний софізм).
   6) Вчитель завжди хоче, щоб його учень став мудрим і перестав бути невігласом. Таким чином, він хоче, щоб його учень став тим, чим він не є, та перестав бути тим, чим він є. Отже, він хоче перевести його із буття в небуття, тобто знищити (античний софізм).
   7) Якщо тобі холодно, ти тепло вдягаєшся. Якщо тепло вдягнутися, то стане гаряче. Якщо тобі гаряче, ти роздягаєшся. Отже, якщо тобі холодно, ти роздягаєшся.
2. Покажіть, що кожна алгоритмічно розв'язна множина є алгоритмічно перелічною.
3. Доведіть, що формула Ф є теоремою $\Leftrightarrow$ Ф має виведення.
4. Доведіть, що наведені закони ПЛ є тавтологіями.
   1) Закони комутативності для $\vee$ та &:

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P;$$
$$P \& Q \Leftrightarrow Q \& P.$$

   2) Закони асоціативності $\vee$ та &:

$$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R);$$
$$(P \& Q) \& R \Leftrightarrow P \& (Q \& R);$$
$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R \Leftrightarrow P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R).$$

3) Закони дистрибутивності для ∨ та &:

$$(P\vee Q)\&R \Leftrightarrow (P\&R)\vee(Q\&R);$$
$$(P\&Q)\vee R \Leftrightarrow (P\vee R)\&(Q\vee R).$$

4) Закони ідемпотентності для ∨ та &:

$$P \Leftrightarrow P\vee P;$$
$$P \Leftrightarrow P\&P.$$

5) Закони поглинання:

$$P\&(P\vee Q) \Leftrightarrow P;$$
$$P\vee(P\&Q) \Leftrightarrow P.$$

6) Закон зняття подвійного заперечення:

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P.$$

7) Закони де Моргана:

$$\neg(P\vee Q) \Leftrightarrow (\neg P)\&(\neg Q);$$
$$\neg(P\&Q) \Leftrightarrow (\neg P)\vee(\neg Q).$$

8) Закон контрапозиції:

$$(\Phi\rightarrow\Psi) \Leftrightarrow (\neg\Psi\rightarrow\neg A).$$

9) Закони комутативності $\Leftrightarrow$ та $\oplus$:

$$(P\Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q\Leftrightarrow P);$$
$$(P\oplus Q) \Leftrightarrow (Q\oplus P).$$

10) Закони асоціативності $\Leftrightarrow$ та $\oplus$:

$$(P\Leftrightarrow Q)\Leftrightarrow R = P\Leftrightarrow(Q\Leftrightarrow R);$$
$$(P\oplus Q)\oplus R = P\oplus(Q\oplus R).$$

5. Знайдіть ПФ Ψ таку, щоб наступна ПФ була тавтологією:

1) $(\Psi\&A\rightarrow\neg B)\rightarrow((B\rightarrow\neg A)\rightarrow\Psi)$;

2) $((C\rightarrow\neg A\&B)\rightarrow\Psi)\rightarrow\Psi\&C\&(B\rightarrow A)$.

6. Доведіть властивості відношень $\models$ та $\sim_т$:

1) відношення $\models$ рефлексивне і транзитивне;

2) відношення $\sim_т$ рефлексивне, транзитивне і симетричне;

3) Φ тавтологія $\Leftrightarrow\ \models \Phi$;

4) $\Phi \sim_{т} \Psi \Leftrightarrow\ \models \Phi\Leftrightarrow\Psi \Leftrightarrow \Phi\Leftrightarrow\Psi$ тавтологія.

7. Доведіть: $\{\Phi_1, ..., \Phi_m\} \models \Psi \Leftrightarrow \{\Phi_1, ..., \Phi_m, \neg\Psi\}$ суперечлива.
8. Встановіть, чи правильно:

1) $\{A, A\to B\} \models B$;

2) $\{B, A\to B\} \models A$;

3) $\{\neg A, A\to B\} \models \neg B$;

4) $\{\neg B, A\to B\} \models \neg A$;

5) $\{A\vee B, \neg A\vee C\} \models B\vee C$;

6) $\{A\to B, C\to D\} \models A\vee C\to B\vee D$;

7) $\{A\to B, C\to D\} \models A\&C\to B\&D$;

8) $\{A\to B, C\to D\} \models A\vee C\to B\&D$;

9) $\{A\to B, C\to D\} \models A\&C\to B\vee D$;

10) $A\&D\to B\vee C \models (A\to B)\vee(A\to C)\vee(D\to B)$;

11) $\{A\to B, C\to D, A\vee C\} \models B\vee D$;

12) $\{A\to B, C\to D, \neg B\vee\neg D\} \models \neg A\vee\neg C$;

13) $\{A\vee B, B\to C, \neg A\vee\neg C\} \models \neg A\vee D$;

14) $\{A\vee B\to C\to D, \neg A\&\neg B\} \models C\&\neg D$;

15) $\{A\to C, B\to D, A\vee B\} \models D\&C$.

9. Встановіть, в якому відношенні щодо $\models$ перебувають ПФ $A\&B\to C\&D$, $A\vee B\to C\&D$, $A\&B\to C\vee D$ та $A\vee B\to C\vee D$.

Тема 2. Пропозиційне числення

1. Доведіть в пропозиційному численні без використання ТТ:

1) $\vdash A\to B\to A$;

2) $\vdash A\to\neg A\to B$;

3) $\vdash B\to A\vee B$;

4) $\vdash (\neg A\to B)\vee\neg A$;

5) $\vdash A\vee A\to A$;

6) $\vdash (A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$;

7) якщо $\vdash A\to C$ та $\vdash B\to C$, то $\vdash A\vee B\to C$;

8) якщо $\vdash A\to B\to C$ та $\vdash B$, то $\vdash A\to C$;

9) якщо $\vdash A\vee(B\to C)$ та $\vdash B$, то $\vdash A\vee C$;

10) якщо $\vdash A\to B\to C$ та $\vdash A\to B$, то $\vdash A\to C$;

11) якщо $\vdash A\vee B\vee C$, то $\vdash C\vee A\vee B$ та $\vdash A\vee C\vee B$;

12) якщо $\vdash A\vee B\vee C$, то $\vdash C\vee B\vee A$, $\vdash B\vee C\vee A$ та $\vdash B\vee A\vee C$;

13) якщо $\vdash A\vee B$, то $\vdash \neg A\to C\vee B$;

14) якщо $\vdash A\to B$, то $\vdash A\vee C\to B\vee C$;

15) якщо $\vdash A\vee A\vee B$, то $\vdash A\vee B$;

16) якщо $\vdash A\vee B\vee A\vee C$, то $\vdash B\vee A\vee C$.

2. Чи правильно:

1) якщо $\vdash A\&C\to B\&D$, то $\vdash A\to B$ та $\vdash C\to D$?

2) якщо $\vdash A\vee C\to B\&D$, то $\vdash A\to B$ та $\vdash C\to D$?

3) якщо $\vdash A\&C\to B\vee D$, то $\vdash A\to B$ та $\vdash C\to D$?

4) якщо $\vdash A\to B$ та $\vdash C\to D$, то $\vdash A\&C\to B\&D$?

5) якщо $\vdash A\to B$ та $\vdash C\to D$, то $\vdash A\&C\to B\vee D$?

6) якщо $\vdash A\to B$ та $\vdash C\to D$, то $\vdash A\vee C\to B\&D$?

3. Чи правильно:

1) a) якщо $\vdash (A\to B)\to C$, то $\vdash A\to C$;
b) якщо $\vdash A\to C$, то $\vdash (A\to B)\to C$?

2) a) якщо $\vdash A\to B\&C$, то $\vdash A\to B$;
b) якщо $\vdash A\to B$, то $\vdash A\to B\&C$?

3) a) якщо $\vdash A\&B\to C$, то $\vdash A\to C$;
b) якщо $\vdash A\to C$, то $\vdash A\&B\to C$?

4) a) якщо $\vdash A\vee C\to B$, то $\vdash A\to B$;
b) якщо $\vdash A\to B$, то $\vdash A\vee C\to B$?

4. Чи правильно: якщо ($\vdash A \Leftrightarrow \vdash B$), то $\vdash A\Leftrightarrow B$?

5. Доведіть чи спростуйте методом резолюцій пропозиційної логіки:

1) $\{A\to B,\ C\to D,\ A\vee C\}\models B\vee D$;

2) $\{B\to A,\ C\to D,\ B\&\neg D\}\models A\&\neg C$;

3) $\{\neg A\to B,\ Q\to D,\ \neg B\vee\neg D\}\models A\vee\neg Q$;

4) $\{A\to C,\ \neg D\to B,\ \neg A\to\neg B\}\models \neg C\to D$;

5) $\{A\to B,\ C\to D,\ \neg B\vee D\&C\}\models \neg A\vee\neg C$;

6) $\{A \lor B \lor C,\ \neg A \lor C,\ \neg B\} \models \neg C$;

7) $A \& D \to B \lor C \models (A \to B) \lor (A \to C) \lor (D \to B)$.

6. Використовуючи метод резолюцій пропозиційної логіки, встановіть, в якому відношенні щодо $\models$ перебувають ПФ $A \& B \to C \& D$, $A \lor B \to C \& D$, $A \& B \to C \lor D$ та $A \lor B \to C \lor D$.

Тема 3. Секвенційне числення пропозиційної логіки

1. Доведіть властивості відношення логічного наслідку для множин формул.

   G1) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \models \Delta$.

   G2) Нехай $\Gamma \models \Delta$ та $\Delta \subseteq \Sigma$. Тоді $\Gamma \models \Sigma$.

   П1) $\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$.

   П2) $\Gamma \models \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$.

   П3) $\Phi \lor \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$.

   П4) $\Gamma \models \Delta, \Phi \lor \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$.

   П5) $\Phi \& \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Psi, \Gamma \models \Delta$.

   П6) $\Gamma \models \Delta, \Phi \& \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \Psi$.

   П7) $\Phi \to \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$.

   П8) $\Gamma \models \Delta, \Phi \to \Psi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta, \Psi$.

   П9) $\Phi \leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Psi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$.

   П10) $\Gamma \models \Delta, \Phi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta, \Psi$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta, \Phi$.

2. Використовуючи властивості П5—П10 відношення $\models$ введіть похідні секвенційні форми ${}_{\vdash}\!\to$, ${}_{\dashv}\!\to$, ${}_{\vdash}\!\&$, ${}_{\dashv}\!\&$, ${}_{\vdash}\!\leftrightarrow$, ${}_{\dashv}\!\leftrightarrow$.

3. Збудуйте в пропозиційному секвенційному численні виведення чи доведіть його відсутність, вказавши контрприклад, для вказаних нижче формул (побудова в секвенційному численні виведення формули Φ означає побудову виведення секвенції ${}_{\dashv}\Phi$):

   1) $(A \lor B \to C) \to (A \to C)$;

   2) $(A \to B \& C) \to (A \to C)$;

   3) $(A \to C) \to (B \to C) \to (A \to B \lor C)$;

   4) $(A \to C) \to (B \to C) \to (C \to A \lor B)$;

   5) $(A \to B) \to (A \to C) \to (A \& B \to C)$;

   6) $(A \to B) \to (A \to C) \to (B \& C \to A)$;

7) $((A \to B) \to C) \to (A \vee C)$;

8) $(A \to B) \& (B \to C) \to (\neg A \to C)$;

9) $((A \to C) \to D) \& \neg D \to A \& \neg C$;

10) $(A \to B) \& (A \to C) \& (A \to D) \to \neg A$;

11) $(A \& B \to C) \to (A \to C) \vee (B \to C)$;

12) $((A \to B) \to (C \to D)) \to (A \to C) \& (D \to B)$.

4. Використовуючи пропозиційне секвенційне числення, встановіть, чи правильно:

1) $\{A \vee B, \neg A \vee C\} \models B \vee C$;

2) $\{A \to B, C \to D\} \models A \vee C \to B \vee D$;

3) $\{A \to B, C \to D\} \models A \& C \to B \& D$;

4) $\{A \to B, C \to D\} \models A \vee C \to B \& D$;

5) $\{A \to B, C \to D\} \models A \& C \to B \vee D$;

6) $\{A \to B, C \to D, A \vee D\} \models B \vee C$;

7) $\{A \vee B, B \to C, \neg A \vee \neg C\} \models \neg A \vee D$;

8) $\{A \vee B \to C \to D, \neg A \& \neg B\} \models C \& \neg D$;

9) $\{A \to C, B \to D, A \vee B\} \models D \& C$;

10) $\{A \to B, C \to D, \neg B \vee \neg D\} \models \neg A \vee \neg C$.

Змістовий модуль II. Логіки 1-го порядку

Тема 4. Моделі та мови логік 1-го порядку

Квазіарні, фінарні, n-арні функції та предикати. Композиції (операції) над предикатами в логіках 1-го порядку. Квантори.

Моделі логік 1-го порядку, алгебраїчні системи (АС).

Мови логік 1-го порядку, поняття терма та формули. Вільні та зв’язані змінні. Замкнені терми та формули.

Виразність предикатів, множин, функцій в АС. Мова арифметики. Арифметичні предикати, множини, функції. Істинні арифметичні формули.

Істинність та виконуваність формул, всюди істинність. Тавтологічний, логічний та слабкий логічний наслідок.

Еквівалентні перетворення формул. Пренексна нормальна форма.

Література [3; 5; 9; 10; 14; 15; 17—19; 22; 29; 32]

Тема 5. Теорії 1-го порядку

Теорії 1-го порядку, аксіоми і правила виведення. Моделі теорії 1-го порядку. Приклади теорій 1-го порядку. Формальна арифметика.

Приклади виведень у теоріях 1-го порядку. Теорема тавтології. Теорема дедукції.

Несуперечливість, максимальність (повнота), розв'язність теорій 1-го порядку.

Теорема Гьоделя про повноту та її наслідки. Теорема компактності.

Теореми Гьоделя про неповноту. Їх значення.

Література [5; 9; 10; 14; 15; 18; 22; 27; 29; 32]

Тема 6. Секвенційні числення логік 1-го порядку

Секвенційні числення логік 1-го порядку. Секвенційні форми.

Коректність та повнота секвенційних числень 1-го порядку.

Приклади побудови виведень у секвенційних численнях 1-го порядку.

Література [5; 10; 22; 29]

Теми для самостійного вивчення

1. Доведіть незалежність кожної схеми логічних аксіом та кожного правила виведення від інших схем аксіом та правил виведення числення предикатів.

   Література [14]

2. Доведіть синтаксичні варіанти теорем еквівалентності та рівності.

   Література [10]

3. Доведіть синтаксичні варіанти теорем про варіанту, про пренексні операції та про пренексну форму.

   Література [10]

4. Доведіть, що чисте числення 1-арних предикатів розв'язне (його сигнатура містить тільки 1-арні ПС і не містить ФС та символу =).

   Література [9; 14]

5. Видалимо з теорії *Ar* функціональний символ × і аксіоми Ar5 та Ar6. Доведіть, що отримана таким чином теорія повна і розв'язна.

   Література [9; 14]

Приклади розв'язків типових задач

Приклад 2.1. Формула $\exists x_1 ... \exists x_k((x_1 \neq x_2) \& ... \& (x_1 \neq x_k) \& ... \& (x_{k-1} \neq x_k))$, яку позначимо E_k, стверджує: існує $\geq k$ різних елементів області інтерпретації. Отже, E_k є n-істинною для всіх $n \geq k$.

Формула $\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_k \forall y((y = x_1) \vee ... \vee (y = x_k))$, яку позначимо G_k, стверджує, що існує $\leq k$ різних елементів області інтерпретації. Отже, G_k є n-істинною для всіх $1 \leq n \leq k$.

Звідси формула $E_k \& G_k$ k-істинна, причому $E_k \& G_k$ не є n-істинною для кожного $n \neq k$.

Приклад 2.2. Формула $\Phi_x[t] \to \exists x \Phi$ всюди істинна.

Нехай X — множина вільних імен формули $\Phi_x[t] \to \exists x \Phi$. Припустимо супротивне: існує $\boldsymbol{A} = (A, \sigma)$ така, що $\boldsymbol{A} \not\models \Phi_x[t] \to \exists x \Phi$. Тоді існує $d \in A^X$ таке, що $(\Phi_x[t] \to \exists x \Phi)_A(d) = F$, звідки $(\Phi_x[t])_A(d) = T$ та $(\exists x \Phi)_A(d) = F$. Нехай $t_A(d) = b \in A$; в силу $(\Phi_x[t])_A(d) = T$ тоді $\Phi_A(d \nabla x \mapsto b) = T$. Але $(\exists x \Phi)_A(d) = F$, тому для всіх $a \in A$ $\Phi_A(d \nabla x \mapsto a) = F$, зокрема, $\Phi_A(d \nabla x \mapsto b) = F$. Дістали суперечність.

Приклад 2.3. Предикат "$x=1$" в АС $(\boldsymbol{N}, \{+, =\})$ виражається формулою $\forall u \forall v(x = u+v \to u = u + u \vee v = v+v) \& \neg x = x+x$.

Предикат "$|x-y| = 2$" в АС $(\boldsymbol{Z}, \{|x-y| = 1, =\})$ виражається формулою $\exists z(|x-z| = 1 \& |z-y| = 1 \& \neg x = y$.

Предикат "$|x-y| = 3$" в АС $(\boldsymbol{Z}, \{y = x+3, =\})$ виражається формулою $y = x+3 \vee = y+3$.

Предикат "$z = x+1$" в АС $(\boldsymbol{Z}, \{<, =\})$ виражається формулою $(x<z) \& \neg \exists v(x<v \& v<z)$.

Приклад 2.4. Предикат "x є простим числом" арифметичний. Він виражається в АС $(\boldsymbol{N}, \sigma_{ar})$ формулою $\forall y \forall z(x = y \times z \to y = 1 \vee z=1) \& \neg x = 1$.

Приклад 2.5. Предикат "$x \leq y$" в АС $(\boldsymbol{N}, \sigma_{ar})$, $(\boldsymbol{R}, \sigma_{ar})$ та $(\boldsymbol{Z}, \sigma_{ar})$ виражається відповідно арифметичними формулами $\exists z(x+z=y)$, $\exists z(x + z \times z = y)$ та $\exists z \exists u \exists v \exists w(x+z \times z+u \times u+v \times v+w \times w=y)$.

Приклад 2.6. Довести в численні предикатів: *якщо* $\vdash A$, *то* $\vdash \forall x A$.

Якщо $\vdash A$, то за П1 $\vdash \forall x A \vee A$, звідки за ТТ $\vdash \neg A \to \forall x A$. Тоді $\vdash \exists x \neg A \to \forall x A$ за П5, тобто $\vdash \forall x A \vee \forall x A$. Тепер $\vdash \forall x A$ за П2.

Приклад 2.7. Довести в численні предикатів: *якщо* $\vdash\forall x\mathrm{A}$, *то* $\vdash\mathrm{A}$.

Маємо $\vdash\neg\mathrm{A}\to\exists x\neg\mathrm{A}$ (аксіома Ax3), звідси за ТТ $\vdash\neg\exists x\neg\mathrm{A}\to\mathrm{A}$, тобто $\vdash\forall x\mathrm{A}\to\mathrm{A}$. Звідси і з умови $\vdash\forall x\mathrm{A}$ за МР маємо $\vdash\mathrm{A}$.

Приклад 2.8. Довести в численні предикатів: *якщо* $\vdash\mathrm{A}\to\mathrm{B}$, *то* $\vdash\exists x\mathrm{A}\to\exists x\mathrm{B}$ *та* $\vdash\forall x\mathrm{A}\to\forall x\mathrm{B}$.

Маємо $\vdash\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ (умова) та $\vdash\mathrm{B}\to\exists x\mathrm{B}$ (аксіома Ax3), звідки за ТТ $\vdash\mathrm{A}\to\exists x\mathrm{B}$, тому за П5 дістаємо $\vdash\exists x\mathrm{A}\to\exists x\mathrm{B}$.

З умови маємо $\vdash\neg\mathrm{B}\to\neg\mathrm{A}$ за ТТ, маємо $\vdash\neg\mathrm{A}\to\exists x\neg\mathrm{A}$ (аксіома Ax3), звідси за ТТ $\vdash\neg\mathrm{B}\to\exists x\neg\mathrm{A}$. За П5 $\vdash\exists x\neg\mathrm{B}\to\exists x\neg\mathrm{A}$, тому $\vdash\neg\exists x\neg\mathrm{A}\to\neg\exists x\neg\mathrm{B}$ за ТТ, тобто $\vdash\forall x\mathrm{A}\to\forall x\mathrm{B}$.

Приклад 2.9. Для встановлення $\models(\exists x\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x))\to\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x)$ побудуємо виведення секвенції $\dashv(\exists x\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x))\to\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x)$.

$$\dashv(\exists x\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x))\to\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x).$$
$$\downarrow$$
$$\vdash\exists x\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x),\ \dashv\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x)$$
$$\swarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\searrow$$

$$\vdash\exists x\mathrm{P}(x),\ \dashv\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x)\qquad\qquad \vdash\mathrm{Q}(x),\ \dashv\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x)$$
$$\downarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow$$
$$\dashv\exists x\mathrm{P}(x),\ \vdash\mathrm{P}(x),\ \dashv\exists x\mathrm{Q}(x)\qquad\qquad \vdash\mathrm{Q}(x),\ \vdash\mathrm{P}(x),\ \dashv\exists x\mathrm{Q}(x)$$
$$\downarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow$$
$$\dashv\mathrm{P}(x),\ \vdash\mathrm{P}(x),\ \dashv\exists x\mathrm{Q}(x),\ \dashv\exists x\mathrm{P}(x)\ \times\qquad\qquad \vdash\mathrm{Q}(x),\ \vdash\mathrm{P}(x),\ \dashv\mathrm{Q}(x),\ \dashv\exists x\mathrm{Q}(x)\ \times$$

Отримали замкнене секвенційне дерево, тому справджується $\models(\exists x\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x))\to\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x)$.

Питання для самоконтролю

1. Які логічні операції використовуються в логіках 1-го порядку?
2. Що є семантичними моделями логік 1-го порядку?
3. Що таке іменна множина? Наведіть приклади іменних множин.
4. Які ви знаєте операції над іменними множинами?
5. Що таке квазіарна функція? фінарна функція?
6. Дайте визначення V-квазіарної функції на A, V-квазіарного предиката на A.

7. Дайте визначення X-арної функції, n-арної функції.
8. Як ви розумієте властивість еквітонності? Дайте визначення еквітонної функції.
9. Дайте визначення композицій квантифікації $\exists x$ та $\forall x$.
10. Наведіть основні властивості композицій $\exists x$ та $\forall x$.
11. Дайте визначення алгебраїчної системи. Наведіть приклади АС.
12. Дайте визначення алгебраїчної системи з доданою сигнатурою.
13. Що таке сигнатура мови 1-го порядку?
14. Дайте визначення терма мови 1-го порядку.
15. Дайте визначення формули мови 1-го порядку.
16. У чому полягають відмінності мов 1-го порядку?
17. Що таке розширення мови 1-го порядку? звуження мови 1-го порядку?
18. Що таке область дії квантора?
19. Дайте визначення зв'язаного та вільного входження змінної у формулу. Наведіть приклади.
20. Дайте визначення вільної змінної формули. Наведіть приклади.
21. Дайте визначення замкненого терма та замкненої формули. Наведіть приклади.
22. Що таке колізія? Як уникати колізій?
23. Яка сигнатура мови арифметики?
24. Що таке арифметичний терм? арифметична формула? Наведіть приклади.
25. Що таке інтерпретація (модель) мови 1-го порядку?
26. Дайте визначення формули, істинної при інтерпретації на $\boldsymbol{A}$.
27. Дайте визначення всюди істинної формули. Наведіть приклади.
28. Дайте визначення формули, виконуваної при інтерпретації на $\boldsymbol{A}$.
29. Дайте визначення виконуваної формули. Наведіть приклади.
30. Що таке замикання формули? Сформулюйте семантичну теорему замикання.
31. Як визначається істинна оцінка мови 1-го порядку?
32. Що таке тавтологія мови 1-го порядку?
33. Як співвідносяться класи тавтологій та всюди істинних формул?
34. Дайте визначення тавтологічного наслідку. Наведіть приклади.
35. Дайте визначення тавтологічної еквівалентності. Наведіть приклади.
36. Дайте визначення логічного наслідку. Наведіть приклади.
37. Дайте визначення логічної еквівалентності. Наведіть приклади.

38. Дайте визначення слабкого логічного наслідку. Наведіть приклади.
39. Що таке логічний наслідок скінченної множини формул?
40. Вкажіть основні властивості відношень $\models$, $\models$, $\|\!=$ та $\sim$.
41. Дайте визначення відношення логічного наслідку для множин формул.
42. Вкажіть основні властивості відношення логічного наслідку для множин формул.
43. Сформулюйте теорему заміни еквівалентних для логік 1-го порядку.
44. Що таке k-істинна формула? скінченно-істинна формула?
45. Як співвідносяться класи скінченно-істинних та всюди істинних формул?
46. Наведіть алгоритм розв'язання проблеми k-істинності.
47. Сформулюйте семантичну теорему еквівалентності.
48. Сформулюйте семантичні теореми рівності для термів та для формул.
49. Що таке варіанта? Сформулюйте семантичну теорему про варіанту.
50. Що таке пренексна форма? Пренексна формула?
51. Які ви знаєте пренексні операції?
52. Сформулюйте теорему про пренексну форму.
53. Що таке виразний предикат? виразна множина? виразна функція? Наведіть приклади.
54. Що таке стандартна інтерпретація (модель) мови арифметики?
55. Що таке істинна арифметична формула? Наведіть приклади.
56. Що таке арифметичний предикат? арифметична множина? арифметична функція? Наведіть приклади.
57. Що таке теорія 1-го порядку?
58. Чому множина аксіом теорії 1-го порядку розбивається на множину логічних аксіом та множину власних аксіом? Вкажіть множину логічних аксіом теорій 1-го порядку.
59. Вкажіть множину правил виведення теорій 1-го порядку.
60. Що таке розширення теорії 1-го порядку? Звуження теорії 1-го порядку?
61. Яке розширення теорії 1-го порядку називають простим?
62. Дайте визначення еквівалентних теорій 1-го порядку.
63. Що таке потужність теорії 1-го порядку?
64. Що таке числення предикатів 1-го порядку?

65. Чому висновок правила П5 не є логічним наслідком засновку.
66. Що таке модель теорії 1-го порядку?
67. Наведіть приклади теорій 1-го порядку та їх моделей.
68. Вкажіть множину власних аксіом формальної арифметики.
69. Що таке стандартна модель формальної арифметики?
70. Що таке істинна в теорії формула?
71. Сформулюйте теорему істинності.
72. Сформулюйте теорему тавтології та її наслідок.
73. Сформулюйте правило $\forall$-введення.
74. Сформулюйте правило $\exists$-дистрибутивності та правило $\forall$-дистрибутивності.
75. Як формулюються правило узагальнення та правило уособлення?
76. Сформулюйте синтаксичну теорему замикання.
77. Сформулюйте правило підстановки та теорему підстановки.
78. Сформулюйте правило симетрії та правило транзитивності.
79. Як формулюється теорема дедукції?
80. Сформулюйте наслідок теореми дедукції.
81. Чому важлива умова замкненості формули A в формулюванні теореми дедукції?
82. Сформулюйте синтаксичні варіанти теорем рівності та еквівалентності,
83. Сформулюйте синтаксичні варіанти теорем про зведення до пренексної форми.
84. Дайте визначення несуперечливої теорії 1-го порядку.
85. Дайте визначення повної теорії 1-го порядку.
86. Чому суперечливі теорії 1-го порядку тривіальні?
87. Чому числення предикатів 1-го порядку неповне?
88. Сформулюйте теорему несуперечливості та теорему суперечливості.
89. Сформулюйте теорему Ліндентбаума.
90. Що означає розв’язність теорії 1-го порядку?
91. Що означає перелічність теорії 1-го порядку?
92. Чи існують неперелічні теорії 1-го порядку із алгоритмічно перелічною множиною аксіом?
93. Сформулюйте теорему розв’язності та її наслідок.
94. Сформулюйте теорему про модель.
95. Наведіть 1-ше та 2-ге формулювання теореми Гьоделя про повноту.

96. Чому 1-ше формулювання теореми Гьоделя про повноту називають теоремою адекватності?
97. Що таке скінченно аксіоматизована теорія 1-го порядку?
98. Що таке скінченно аксіоматизована частина теорії 1-го порядку?
99. Сформулюйте теорему компактності.
100. Сформулюйте першу та другу теореми Гьоделя про неповноту.
101. У чому полягає значення теорем Гьоделя про неповноту?
102. Наведіть базові секвенційні форми секвенційних числень чистих логік предикатів 1-го порядку.
103. Сформулюйте теорему коректності для секвенційних числень логік 1-го порядку.
104. Опишіть процедуру побудови секвенційного дерева для випадку секвенційних числень логік 1-го порядку.
105. Сформулюйте теорему повноти для секвенційних числень логік 1-го порядку.

Завдання та вправи для самостійного розв'язання

Тема 4. Моделі та мови логік 1-го порядку

1. Вкажіть формули L_{ar}, що виражають такі предикати:
   1) "існує більше трьох парних чисел";
   2) "не існує простих чисел, кратних 10";
   3) "існує не більше трьох повних кубів";
   4) "існує менше чотирьох повних квадратів";
   5) "існує рівно 3 парних чисела, що є точними кубами";
   6) "існує більше двох простих чисел, не кратних 5";
   7) "неправильно, що існує рівно 2 числа, що є сумою чотирьох квадратів";
   8) "існує менше чотирьох парних непростих числа";
   9) "множина парних чисел нескінченна";
   10) "існує єдине парне просте число";
   11) "існує принаймі 4 непарних простих числа";
   12) "кожне парне число, більше за 2, є сумою двох простих чисел";
2. Вкажіть формули L_{ar}, що виражають такі функції:
   1) функції $x-y$; $x \dot{-} y$, $|x-y|$;
   2) функції $[x/y]$; $\mathrm{mod}(x, y)$;
   3) функції $HCD(x, y)$; $HCK(x, y)$;

4) функції [$\sqrt{x}$]; [$\sqrt[x]{y}$];

5) функції mod(x, [y/z]);

6) функції HCK([$\sqrt{x}$], y);

7) функції [$\sqrt{HCD([x/y], z)}$].

3. Вкажіть формули L_{set}, які означають:
   1) "$X \subset Y$";
   2) "$X = Y \cup Z$";
   3) "$X = 2^{Y}$";
   4) "$X = (Y \cap Z) \backslash S$";
   5) "$X = Y \backslash (Z \cup S)$";
   6) "$X \cap Y = Z \backslash S$";
   7) "$Z \cup S = 2^{X \backslash Y}$".
4. Встановіть, чи правильно:
   1) $\models \forall x \exists y A \rightarrow \exists y \forall x A$;
   2) $\models \exists y \forall x A \rightarrow \forall x \exists y A$;
   3) $\models \exists x A \vee \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \vee B)$;
   4) $\models \exists x (A \& B) \Leftrightarrow \exists x A \& \exists x B$;
   5) $\models \forall x A \& \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \& B)$;
   6) $\models \forall x (A \vee B) \Leftrightarrow \forall x A \vee \forall x B$;
   7) $\models \exists x A \vee B \rightarrow A \vee \exists x B$;
   8) $\models A \& \forall x B \rightarrow \forall x A \& B$;
   9) $\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow \exists x B)$;
   10) $\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$.
5. Чи правильно:
   1) a) $\models \exists x (P \& Q) \rightarrow \exists x P \& Q$?
      b) $\models \exists x P \& Q \rightarrow \exists x (P \& Q)$?
      c) $\forall x P \rightarrow \exists x Q \Vdash \forall x P \rightarrow Q$?
   2) a) $P \rightarrow Q \models \forall x P \rightarrow \forall x Q$?
      b) $\forall x P \rightarrow \forall x Q \models P \rightarrow Q$?
      c) $\forall x P \rightarrow \forall x Q \Vdash \exists x P \rightarrow \exists x Q$?

3) a) $\forall x P \to Q \models \forall x(P \to Q)$?

b) $\exists x(P \to Q) \models \exists x P \to Q$?

c) $\forall x P \to \exists x Q \Vert\!= P \to \exists x Q$?

4) a) $\models \forall x(P \vee Q) \to \forall x P \vee Q$?

b) $\models \forall x P \vee Q \to \forall x(P \vee Q)$?

c) $\exists x P \to \exists x Q \Vert\!= \forall x P \to \forall x Q$?

6. Встановіть, в якому відношенні щодо $\models$ та $\Vert\!=$ перебувають формули вигляду:

1) $A \to B$ та $\exists x A \to \exists x B$;

2) $A \to B$ та $\forall x A \to \forall x B$;

3) $\forall x(A \vee B)$ та $\forall x A \vee \forall x B$;

4) $\exists x A \& \exists x B$ та $\exists x(A \& B)$;

5) $\forall x(A \vee B)$ та $\forall x A \vee B$;

6) $\exists x A \vee B$ та $\exists x(A \vee B)$;

7) $\forall x(A \& B)$ та $\forall x A \& B$;

8) $\exists x A \& B$ та $\exists x(A \& B)$;

9) $\exists x(A \to B)$ та $\exists x A \to B$;

10) $\forall x(A \to B)$ та $\forall x A \to B$.

7. Вкажіть пренексну форму для наступних формул:

1) $\forall x A(x) \to \forall y(\exists z B(x, y, z) \to \neg \forall x A(x) \& \exists x C(x, y))$;

2) $\forall x \neg \exists y A(x, y) \to \forall x B(x) \to \neg \exists y A(x, y)$;

3) $\neg \forall x A(x) \& \exists x B(x) \vee \forall x(\forall y C(x, y) \to A(y))$;

4) $\forall x \exists y A(x, y, z) \& \neg \exists x B(x, y) \to \forall x C(x, y)$;

5) $\forall x A(x) \to \forall y(\forall z B(x, y, z) \to \neg \forall x A(x))$;

6) $\exists z(x = y + z) \to (x = y) \vee \exists z((x = y + z) \& \neg(z = 0))$.

Тема 5. Теорії 1-го порядку

1. Вкажіть виведення в численні предикатів наступних формул:

1) $\vdash \exists x A \& B \leftrightarrow \exists x(A \& B)$, якщо x не вільна в B;

2) $\vdash \forall x A \& B \leftrightarrow \forall x(A \& B)$, якщо x не вільна в B;

3) $\vdash \exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$;

4) $\vdash \forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$;

5) $\vdash \exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$;

6) $\vdash \forall x A \& \forall x B \leftrightarrow \forall x(A \& B)$;

7) $\vdash \forall x(A \& B) \to \forall x A \& B$;

8) $\vdash (A \to \forall x B) \to (\forall x A \to B)$;

9) $\vdash (\exists x A \to \forall x B) \to \forall x(A \to B)$;

10) $\vdash (\forall x A \to \exists x B) \to \exists x(A \to B)$;

11) $\vdash \exists x(A \to B) \to (\forall x A \to \exists x B)$;

12) $\vdash \forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$;

13) $\vdash \forall x(A \to B) \to (\exists x A \to \exists x B)$;

14) $\vdash (\forall x A \to \forall x B) \to \exists x(A \to B)$;

15) $\vdash (\exists x A \to \exists x B) \to \exists x(A \to B)$.

2. Встановіть, чи правильно:

1) $\vdash \exists x \forall y A \to \forall y \exists x A$;

2) $\vdash \forall y \exists x A \to \exists x \forall y A$;

3) $\vdash \exists x A \& \exists x B \to \exists x(A \& B)$;

4) $\vdash \exists x(A \& B) \to \exists x A \& \exists x B$;

5) $\vdash \forall x A \vee \forall x B \to \forall x(A \vee B)$;

6) $\vdash \forall x(A \vee B) \to \forall x A \vee \forall x B$;

7) $\vdash \exists x A \& B \to \exists x(A \& B)$;

8) $\vdash \exists x(A \& B) \to \exists x A \& B$;

9) якщо $\vdash \exists x A \& B$, то $\vdash \exists x(A \& B)$.

3. Чи можна ослабити умову замкнености формули A в формулюванні теореми дедукції, щоб ця теорема залишалась правильною?

Тема 6. Секвенційні числення логік 1-го порядку

1. Збудуйте в секвенційному численні виведення чи доведіть його відстутність для наступних формул:

1) $\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to \exists x B)$;

2) $\forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$;

3) $\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to \forall x B)$;

4) $\exists x(A \to B) \to (\forall x A \to \exists x B)$;

5) $\exists x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$;

6) $\exists x(A \to B) \to (\exists x A \to \exists x B)$;

7) $(\forall x A \to \forall x B) \to \forall x (A \to B)$;

8) $(\forall x A \to \forall x B) \to \exists x (A \to B)$;

9) $(\exists x A \to \exists x B) \to \forall x (A \to B)$;

10) $(\exists x A \to \exists x B) \to \exists x (A \to B)$;

11) $(\exists x A \to \forall x B) \to \forall x (A \to B)$;

12) $\exists x (A \vee B) \Leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$;

13) $\forall x (A \& B) \Leftrightarrow \forall x A \& \forall x B$;

14) $\exists x (A \& B) \to \exists x A \& \exists x B$;

15) $\exists y \forall x A \to \forall x \exists y A$;

16) $\forall x \exists y A \to \exists y \forall x A$;

17) $\exists x (A \vee \exists x B) \to \exists x \neg A$.

Змістовий модуль III. Нетрадиційні логіки

Тема 7. Інтуїціоністська логіка

Нетрадиційні логіки. Інтуїціоністська логіка.

Семантика можливих світів (реляційна семантика) інтуїціоністської логіки.

Інтуїціоністські числення гільбертівського та генценівського типу.

Література [5; 9; 29; 35]

Тема 8. Модальні логіки

Модальні логіки. Алетичні модальні логіки. Системи *T*, *B*, *S*4, *S*5.

Реляційна семантика алетичної модальної логіки.

Темпоральні модальні логіки.

Епістемічні логіки. Деонтичні логіки.

Література [3; 5; 10; 12; 17; 23; 25; 29]

Теми для самостійного вивчення

1. Встановіть, які властивості відношення $\triangleright$ описують наступні схеми аксіом [3, 23]:

   1) $\Box\Phi \to \Diamond\Phi$;

   2) $\Diamond\Phi \to \Box\Phi$;

   3) $\Diamond\Phi \Leftrightarrow \Box\Phi$;

   4) $\Diamond\Box\Phi \to \Box\Diamond\Phi$.

2. Дайте повний опис пропозиційного числення *Sd* логіки санкцій Андерсона [10, 23]. Покажіть, що в численні *Sd*:

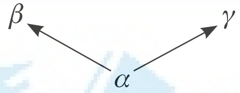
   1) $\vdash \mathbf{O}A \to \mathbf{P}A$;

   2) $\vdash \mathbf{O}(A \to B) \to (\mathbf{O}A \to \mathbf{O}B)$.

Приклади розв'язків типових задач

Приклад 3.1. З'ясуйте, чи є інтуїціоністськи істинною формула $A \vee \neg A$.

Вкажемо для цієї формули контрмодель — реляційну модель $\boldsymbol{M}$ таку, що $\boldsymbol{M} \not\models A \vee \neg A$.

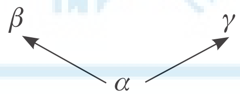


Задамо $\boldsymbol{I}(A, \alpha)=F$, $\boldsymbol{I}(A, \beta)=T$, $\boldsymbol{I}(A, \gamma)=F$. Зрозуміло, що неправильно $\alpha \models A$. Для $\alpha \models \neg A$ необхідно $\alpha \not\models A$, $\gamma \not\models A$, $\beta \not\models A$. Але $\boldsymbol{I}(A, \beta) = T$, тому $\beta \models A$. Отже, неправильно $\alpha \models \neg A$, звідки $\alpha \not\models A \vee \neg A$, тому $\boldsymbol{M} \not\models A \vee \neg A$.

Таким чином, формула $A \vee \neg A$ не є інтуїціоністськи істинною.

Приклад 3.2. З'ясуйте, чи є інтуїціоністськи істинною формула $(A \to B) \vee (B \to A)$.

Вкажемо для цієї формули контрмодель $\boldsymbol{M}$ таку, що $\boldsymbol{M} \not\models (A \to B) \vee (B \to A)$.



Задамо $\boldsymbol{I}(A, \alpha)=F$, $\boldsymbol{I}(B, \alpha)=F$, $\boldsymbol{I}(A, \beta)=T$, $\boldsymbol{I}(B, \beta)=F$, $\boldsymbol{I}(A, \gamma)=F$, $\boldsymbol{I}(B, \gamma)=T$. Тоді $\beta \models A$ та $\beta \not\models B$, звідки, враховуючи $\alpha \rhd \beta$, неправильно $\alpha \models A \to B$. Але $\gamma \models B$ та $\gamma \not\models A$, тому, враховуючи $\alpha \rhd \gamma$, неправильно $\alpha \models B \to A$. Отже, неправильно $\alpha \models (A \to B) \vee (B \to A)$, тому $\boldsymbol{M} \not\models (A \to B) \vee (B \to A)$.

Таким чином, формула $(A \to B) \vee (B \to A)$ не є інтуїціоністськи істинною.

Приклад 3.3. Опишіть мінімальне темпоральне числення K_t.

Аксіомами системи K_t є аксіоми пропозиційної логіки і аксіоми, що задаються такими схемами:

$AxNr_{\uparrow})\Box_{\uparrow}(\Phi\to\Psi)\to(\Box_{\uparrow}\Phi\to\Box_{\uparrow}\Psi)$;

$AxNr_{\downarrow})\Box_{\downarrow}(\Phi\to\Psi)\to(\Box_{\downarrow}\Phi\to\Box_{\downarrow}\Psi)$;

$AxT_{\uparrow})\Phi\to\Box_{\uparrow}\Diamond_{\downarrow}\Phi$;

$AxT_{\downarrow})\Phi\to\Box_{\downarrow}\Diamond_{\uparrow}\Phi$.

Правила виведення складаються з правил виведення пропозиційної логіки, до яких додаються правила модалізації для $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$:

$ПМ_{\uparrow})\Phi \models \Box_{\uparrow}\Phi$;

$ПМ_{\downarrow})\Phi \models \Box_{\downarrow}\Phi$.

Питання для самоконтролю

1. У чому сутність програми Гільберта?
2. У чому сутність підходу Брауера до побудови інтуїціоністської логіки?
3. Які закони класичної логіки не діють для інтуїціоністської логіки?
4. Наведіть визначення формули мови інтуїціоністської пропозиційної логіки.
5. Наведіть визначення формули мови інтуїціоністської логіки предикатів 1-го порядку.
6. Що таке модель можливих світів (реляційна модель) інтуїціоністської логіки?
7. Як задається відображення інтерпретації для випадку інтуїціоністської пропозиційної логіки?
8. Що означає узгодженість світів із відношенням $\triangleright$?
9. Як задається значення формули в світі α для інтуїціоністської пропозиційної логіки? Як визначається істинність формули в реляційній моделі такої логіки?
10. Дайте визначення інтуїціоністськи істинної формули інтуїціоністської пропозиційної логіки.
11. Що таке контрмодель?
12. Що є світами реляційної моделі для випадку інтуїціоністської логіки предикатів?
13. Як задається відображення інтерпретації для інтуїціоністської логіки предикатів?
14. Що означає узгодженість світів із відношенням ⛳ для випадку інтуїціоністської логіки предикатів?

15. Як задається значення формули в світі α для інтуїціоністської логіки предикатів?
16. Дайте визначення інтуїціоністськи істинної формули інтуїціоністської логіки предикатів.
17. Вкажіть приклади тавтологій, які не є інтуїціоністськи істинними.
18. Вкажіть приклади всюди істинних формул, які не є інтуїціоністськи істинними.
19. Що таке інтуїціоністське пропозиційне числення? Вкажіть його аксіоми.
20. Як співвідносяться множини теорем класичного та інтуїціоністського пропозиційних числень?
21. Що таке інтуїціоністське секвенційне пропозиційне числення?
22. Що таке інтуїціоністська специфікація? інтуїціоністський префікс?
23. Які умови замкненості секвенції в інтуїціоністському секвенційному численні?
24. Наведіть базові секвенційні форми інтуїціоністських секвенційних пропозиційних числень.
25. Що таке інтуїціоністське числення предикатів? Вкажіть логічні аксіоми та правила виведення.
26. Що таке інтуїціоністське секвенційне численнями предикатів?
27. Наведіть базові секвенційні форми інтуїціоністських секвенційних числень предикатів.
28. Яке співвідношення між інтуїціоністською та класичною логіками?
29. Що таке модальність?
30. Які модальності називають атлетичними? темпоральними? епістемічними? деонтичними? Наведіть приклади.
31. Які співвідношення пов'язують модальні оператори $\Box$ та $\Diamond$?
32. Дайте визначення формули мови систем алетичної модальної логіки.
33. Опишіть системи K, T, B, $S4$, $S5$ алетичної модальної логіки.
34. Що таке модель можливих світів (реляційна модель) алетичної модальної логіки?
35. Чому відношення на світах $\triangleright$ називають відношенням досяжності?
36. Як задається значення формули в світі α?
37. Як визначається істинність формули в реляційній моделі?

38. Дайте визначення реляційної T-моделі, B-моделі, $S4$-моделі, $S5$-моделі.
39. Дайте визначення: T-істинної формули; B-істинної формули; $S4$-істинної формули; $S5$-істинної формули.
40. Які співвідношення пов'язують аксіоми AxB, AxS4, AxS5 та властивості відношення досяжності $\triangleright$?
41. Сформулюйте теореми коректності та повноти для систем алетичної модальної логіки.
42. Назвіть базові часові (темпоральні) оператори? Які співвідношення їх пов'язують?
43. Дайте визначення формули мови систем темпоральної модальної логіки.
44. Опишіть мінімальне темпоральне числення.
45. Опишіть темпоральні числення T_t, B_t, $S4_t$, $S5_t$.
46. Опишіть реляційну семантику темпоральної логіки.
47. Як ми розуміємо відношення $\triangleright$ для випадку реляційної моделі темпоральної логіки?
48. Як задається значення формули в світі α для випадку темпоральної логіки?
49. Що вивчає деонтична логіка? Що таке деонтичний світ?
50. Як конкретизувати концепцію семантики можливих світів для деонтичної логіки?
51. Які ви знаєте деонтичні оператори?
52. Опишіть мову деонтичної логіки.
53. Які властивості відношення досяжності $\triangleright$ для випадку реляційної семантики деонтичної логіки?
54. Що вивчає епістемічна логіка? Вкажіть основні модальності епістемічної логіки.
55. Які особливості має епістемічна логіка знання?
56. Опишіть мову епістемічної логіки знання з одним експертом.
57. Як визначається реляційна семантика епістемічної логіки знання з одним експертом?
58. Як трактується відношення досяжності $\triangleright$ для випадку реляційної семантики епістемічної логіки?
59. Назвіть аксіоми: реальності знання; позитивної рефлексії; негативної рефлексії.
60. Опишіть мову епістемічної логіки знання з n експертами.
61. Які особливості реляційної семантики епістемічної логіки знання з n експертами?

Завдання та вправи для самостійного розв'язання

Тема 7. Інтуїціоністська логіка

1. Збудуйте реляційну модель $\boldsymbol{M}$ інтуїціоністської логіки таку, що $\boldsymbol{M}|\neq (A\Leftrightarrow B)\vee(B\Leftrightarrow C)\vee(A\Leftrightarrow C)$. Зауважимо, що $(A\Leftrightarrow B)\vee(B\Leftrightarrow C)\vee$ $\vee$ $(A\Leftrightarrow C)$ — тавтологія класичної логіки.
2. Збудуйте таку реляційну модель $\boldsymbol{M}$ інтуїціоністської логіки: $\boldsymbol{M}|\neq$ $(A_1\Leftrightarrow A_2)\vee(A_1\Leftrightarrow A_3)\vee\ldots\vee(A_1\Leftrightarrow A_n)\vee\ldots\vee(A_{n-1}\Leftrightarrow A_n)$. Це засвідчує, що інтуїціоністська логіка не може задаватися жодною скінченною множиною істиннісних значень.
3. Збудуйте реляційну модель $\boldsymbol{M}$ інтуїціоністської логіки таку, що $M|= \neg\forall x P(x)$ та $\boldsymbol{M}|\neq \exists x P(x)$.
4. Збудуйте виведення в ІПЧ та в ІСПЧ для наступних формул:

   1) $A\rightarrow\neg\neg A$;

   2) $A\rightarrow\neg A\rightarrow B$;

   3) $\neg\neg(\neg\neg A\rightarrow A)$;

   4) $\neg\neg\neg A\rightarrow\neg A$;

   5) $A\rightarrow B\rightarrow A\&B$;

   6) $\neg\neg(A\rightarrow B)\rightarrow A\rightarrow\neg\neg B)$;

   7) $(A\rightarrow B\rightarrow C)\rightarrow(B\rightarrow A\rightarrow C)$;

   8) $(A\rightarrow B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$.
5. Доведіть в ІПЧ та в ІСПЧ:

   1) якщо $|\!\!-A\rightarrow B$ та $|\!\!-B\rightarrow C$, то $|\!\!-A\rightarrow C$;

   2) якщо $|\!\!-\neg\neg(A\rightarrow B)$ та $|\!\!-\neg\neg A$, то $|\!\!-\neg\neg B$.
6. Збудуйте у відповідних інтуїціоністських численнях виведення чи доведіть його відсутність, збудувавши контрмодель, для таких формул:

   1) $\neg\neg(A\vee\neg A)$;

   2) $A\rightarrow B\rightarrow A$;

   3) $\neg(A\&B)\rightarrow\neg A\vee\neg B$;

   4) $\neg(A\vee B)\rightarrow\neg A\&\neg B$;

   5) $\neg A\vee\neg B\rightarrow\neg(A\&B)$;

   6) $\neg A\&\neg B\rightarrow\neg(A\vee B)$;

   7) $((A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow A$;

   8) $(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$;

9) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;

10) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$;

11) $(\neg B \to A) \to (\neg A \to B)$;

12) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;

13) $(A \to B \vee C) \to (A \to B) \vee (A \to C)$.

Тема 8. Модальні логіки

1. В якому відношенні щодо логічного наслідку перебувають предикати P, $\Box P$ та $\Diamond P$?
2. Дайте повні описи B-числення, $S4$-числення та $S5$-числення.
3. Поясніть зв'язок аксіоми Ax$\Box$ із рефлексивністю відношення досяжності $\triangleright$.
4. Поясніть зв'язок аксіом AxB, AxS4, AxS5 із відповідними властивостями відношення $\triangleright$ для B-систем, $S4$-систем, $S5$-систем.
5. Покажіть, що формули вигляду $\Box A \to A$, $A \to \Box A$, $\Box A \to \Box\Box A$, $\Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Box B)$ істинні не на всіх реляційних моделях. Наведіть відповідні приклади таких моделей.
7. Доведіть в T-численні:

   1) якщо $\vdash A \to B$, то $\vdash \Box A \to \Box B$ та $\vdash \Diamond A \to \Diamond B$;

   2) якщо $\vdash A \Leftrightarrow B$, то $\vdash \Box A \Leftrightarrow \Box B$ та $\vdash \Diamond A \Leftrightarrow \Diamond B$;

   3) $\vdash \Diamond(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$;

   4) $\vdash \Diamond(A \vee B) \Leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$;

   5) $\vdash \Box(A \& B) \Leftrightarrow (\Box A \& \Box B)$;

   6) $\vdash (\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$;

   7) $\vdash \Diamond(A \& B) \to (\Diamond A \& \Diamond B)$;

   8) $\vdash \Box(A \to \Diamond(B \to C)) \to \Diamond(B \to \Box A \to \Diamond B)$.
8. Вкажіть схеми аксіом та правила виведення:

   1) пропозиційної темпоральної $S4_t$-системи;

   2) пропозиційної темпоральної $S5_t$-системи;

   3) пропозиційної темпоральної B_t-системи.
9. Вкажіть схеми аксіом та правила виведення:

   1) пропозиційної епістемічної $S4_{(2)}$-системи;

   2) пропозиційної епістемічної $S4_{(3)}$-системи;

   3) пропозиційної епістемічної $S5_{(2)}$-системи;

   4) пропозиційної епістемічної $S5_{(3)}$-системи.

10. Дайте повний опис пропозиційних епістемічних систем $T_{(1)}$, $S4_{(1)}$, $S5_{(1)}$ та $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$. Визначіть реляційну семантику таких систем.
11. Поясніть парадоксальність деонтичної формули $x = y \to \mathbf{0}\, x = y$.

Змістовий модуль IV. Формальні моделі алгоритмів та АОФ

Тема 9. МНР. Машини Тьюрінга. Нормальні алгоритми

Машини з натуральнозначними регістрами (МНР). МНР-обчислюваність.

Машини Тьюрінга (МТ). МТ-обчислюваність.

Нормальні алгоритми Маркова. НА-обчислюваність.

Література [3—5; 7—9; 16; 26; 31]

Тема 10. Примітивно рекурсивні, частково рекурсивні, рекурсивні функції. Теза Чорча

Поняття примітивно рекурсивної функції (ПРФ), частково рекурсивної функції (ЧРФ) та рекурсивної функції (РФ).

Алгебри ЧРФ та ПРФ. Операторні терми.

Теореми про ПРФ. Елімінація примітивної рекурсії.

Еквівалентність формальних моделей алгоритмів. Теза Чорча та її значення.

Література [4; 6—9; 11; 16; 26; 31]

Приклади розв'язків типових задач

Приклад 4.1. МНР-програма для функції $x+y$.

1) $J(1,2,5)$;
2) $S(0)$;
3) $S(2)$;
4) $J(0,0,1)$.

Приклад 4.2. МНР-програма для функції $x - y$.

1) $J(0,1,5)$;
2) $S(1)$;
3) $S(2)$;
4) $J(0,0,1)$;
5) $T(2,0)$.

Приклад 4.3. МНР-програма для функції $f(x, y) = x \cdot y$.

1) $J(3,1,9)$;
2) $J(0,2,6)$;
3) $S(2)$;
4) $S(4)$;
5) $J(0,0,2)$;
6) $Z(2)$;
7) $S(3)$;
8) $J(0,0,1)$;
9) $T(4,0)$.

Приклад 4.4. МТ, яка обчислює функцію $x+y$:

$q_0| \to q_1 \lambda R$;
$q_1| \to q_1 | R$;
$q_1 \# \to q^* |$;
$q_0 \# \to q^* \lambda$.

Приклад 4.5. МТ, яка обчислює функцію $x—y$:

$q_0| \to q_1 \lambda R$;
$q_1| \to q_1 | R$;
$q_1 \# \to q_1 \# R$;
$q_1 \lambda \to q_2 \lambda L$;
$q_2 | \to q_3 \lambda L$;
$q_3 | \to q_3 | L$;
$q_3 \# \to q_3 \# L$;
$q_3 \lambda \to q_0 \lambda R$;
$q_2 \# \to q^* |$;
$q_0 \# \to q_4 \lambda R$;
$q_4 \lambda \to q^* \lambda$.

Приклад 4.6. НА для функції $x—y$:

$|\#| \to \#$;
$\#| \to \#|$;
$\# \to \varepsilon$.

Приклад 4.7. НА для функції $x \cdot y$:

$\# \to **$;
$|* \to *a$;

$*|\to b*$;

$*\to\varepsilon$;

$ab\to ba|$;

$|b\to b|$;

$a\to\varepsilon$;

$b\to\varepsilon$.

Приклад 4.8. НА, який кожне $x\in$T* переводить в слово xx (тут $\#\notin T$):

$\#\#a\to a\#a\#\#$ для всіх $a\in$T;

$\#ab\to b\#a$ для всіх $a, b\in T$;

$\#a\to a$ для всіх $a\in T$;

$\#\#\to\cdot\varepsilon$;

$\varepsilon\to\#\#$.

Приклад 4.9. Функція $f(x_1, x_2) = x_1+x_2$ — ПРФ.

Справді, маємо:

$f(x_1, 0) = x_1 = \boldsymbol{I}_1^1(x_1)$;

$f(x_1, x_2+1) = x_1+(x_2+1) = (x_1+x_2)+1 = \boldsymbol{s}(x_1+x_2) = \boldsymbol{s}(f(x_1, x_2))$.

Отже, функція $f(x_1, x_2)=x_1+x_2$ виникає примітивною рекурсією із функцій $g(x_1)= \boldsymbol{I}_1^1(x_1)$ та $h(x_1, x_2, x_3)=x_3+1 = \boldsymbol{s}(x_3) = \boldsymbol{S}^2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{I}_3^3)(x_1, x_2, x_3)$.

Операторний терм функції x_1+x_2 має вигляд $R(I_1^1, S^2(\mathrm{s}, I_3^3))$.

Приклад 4.10. Функція $f(x_1, x_2) = x_1\cdot x_2$ — ПРФ.

Справді, маємо

$f(x_1, 0) = 0 = \mathbf{o}(x_1)$;

$f(x_1, x_2+1) = x_1\cdot(x_2+1) = x_1\cdot x_2+x_1 = f(x_1, x_2)+x_1$.

Отже, функція $f(x_1, x_2)=x_1\cdot x_2$ виникає примітивною рекурсією із функцій $g(x_1) = \mathbf{o}(x_1)$ та $h(x_1, x_2, x_3) = x_3+x_1$. Згідно із попереднім прикладом функція h є ПРФ, тому f — ПРФ. Операторний терм функції $x_1\cdot x_2$ має вигляд $R(\mathrm{o}, S^3(\oplus, I_3^3, I_1^3))$, де $\oplus$ — операторний терм функції x_1+x_2.

Приклад 4.11. Функція $f(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$ — ЧРФ.

Справді, $[x_1/x_2] = \mu_{x_3}(x_2\cdot(x_3+1)>x_1) = \mu_{x_3}(nsg(x_2\cdot(x_3+1)\dot{-}x_1)=0)$.

Приклад 4.12. Функція $f(x_1) = [\sqrt{x_1}]$ є ПРФ.

Справді, маємо $[\sqrt{x_1}] = \mu_{x_2 \le x_1}(nsg((x_2+1)\cdot(x_2+1) \dot{-} x_1) = 0)$, тому за теоремою про обмежену мінімізацію $[\sqrt{x_1}]$ є ПРФ.

Теми для самостійного вивчення

1. Системи Поста. Обчислюваність за Постом.

   Література [4; 7]
2. Породжувальні граматики.

   Література [21]
3. Доведіть, що класи МТ-обчислюваних та НА-обчислюваних функцій збігаються.

   Література [9]
4. Доведіть, що класи ЧРФ та МНР-обчислюваних функцій збігаються.

   Література [4; 7]

Питання для самоконтролю

1. Що таке МНР?
2. Що таке конфігурація МНР?
3. Опишіть команди МНР.
4. Що таке програма МНР? Як виконується програма МНР?
5. Дайте визначення стандартної МНР-програми.
6. Як визначається конкатенація стандартних МНР-програм?
7. Як визначається обчислюваність функції $f:N^n \to N$ за допомогою МНР-програми P?
8. Що таке МНР-обчислювана функція?
9. Дайте визначення машини Тьюрінга. Які ви знаєте варіанти МТ?
10. Опишіть команди МТ.
11. Що таке конфігурація МТ? початкова конфігурація МТ? фінальна конфігурація МТ?
12. Як змінюється конфігурація МТ при виконанні команди МТ відповідного типу?
13. Як МТ задає вербальне відображення?
14. Дайте визначення детермінованих та недетермінованих МТ.
15. Як визначається обчислюваність функції $f:N^n \to N$ за допомогою МТ?
16. Що таке МТ-обчислювана функція?

17. Дайте визначення нормального алгоритму Маркова.
18. Як визначається обробка слова нормальним алгоритмом?
19. Як НА задає вербальне відображення?
20. У чому полягає відмінність між НА в алфавіті T та НА над алфавітом T?
21. Як визначається обчислюваність функції $f{:}N^n\square N$ за допомогою НА?
22. Що таке НА-обчислювана функція?
23. Дайте визначення операцій суперпозиції S^{n+1}, примітивної рекурсії R, мінімізації M.
24. Вкажіть властивості операцій S^{n+1}, R та M?
25. Дайте визначення базових обчислюваних n-арних функцій.
26. Дайте визначення ПРФ, ЧРФ та РФ.
27. Вкажіть властивості ПРФ, ЧРФ та РФ.
28. Дайте визначення алгебри ЧРФ та алгебри ПРФ.
29. Дайте визначення операторного терма (ОТ) алгебри ЧРФ та ОТ алгебри ПРФ.
30. Сформулюйте теореми про сумування та про мультиплікацію.
31. Дайте визначення операції обмеженої мінімізації. Сформулюйте теорему про обмежену мінімізацію.
32. Сформулюйте теорему про елімінацію операції примітивної рекурсії.
33. Вкажіть співвідношення між різними формальними уточненнями поняття алгоритмічно обчислюваної функції.
34. Сформулюйте тезу Чорча. Аргументуйте правильність тези Чорча.
35. У чому полягає значення тези Чорча?

Завдання та вправи для самостійного розв'язання

Тема 9. МНР. Машини Тьюрінга. Нормальні алгоритми

1. Наведіть МНР-програми для таких функцій:
   1) $f(x, y) = x - 2y$;
   2) $f(x, y, z) = (x - y)+z$;
   3) $f(x, y) = nsg(x+y)$;
   4) $f(x, y) = sg(x\cdot y)$;
   5) $f(x, y, z) = max(x, y)+z$;
   6) $f(x, y, z) = x-min(y, z)$;

7) $f(x, y) = max(x, 2y)$;

8) $f(x) = (x+1)/3$;

9) $f(x) = x!$;

10) $f(x, y) = x^y$.

2. Доведіть, що для кожної МНР-програми можна збудувати еквівалентну їй МНР-програму без команд $T(m, n)$.
3. Наведіть МТ для таких функцій:

1) $f(x, y)) = x \dot{-} y$;

2) $f(x) = sg(x/2)$;

3) $f(x, y) = sg(x+y)$;

4) $f(x, y) = nsg(x \cdot y)$;

5) $f(x, y) = max(x, y)$;

6) $f(x) = x/2$;

7) $f(x, y) = x+2y$;

8) $f(x) = 2^x$;

9) $f(x, y) = x^y$;

10) $f(x) = x!$.

4. Наведіть НА, який:

1) дописує фіксоване слово на початок вхідного слова;

2) дописує фіксоване слово на кінець вхідного слова;

3) стирає перший символ вхідного слова;

4) стирає останній символ вхідного слова;

5) кожне слово $x \in T^*$ переводить в слово $xx^{\boldsymbol{R}}$.

5. Наведіть НА для таких функцій:

1) $f(x, y) = min(x, y)$;

2) $f(x, y) = 3x - 2y$;

3) $f(x, y) = 2x+3y$;

4) $f(x, y, z) = (x+y) - z$;

5) $f(x, y) = 3^x - 2y$;

6) $f(x, y) = 2^x + 3^y$;

7) $f(x, y) = x^y$;

8) $f(x) = x!$.

Тема 10. Примітивно рекурсивні, частково рекурсивні, рекурсивні функції. Теза Чорча

1. Встановіть:
   — чи може бути тотальною функція $\boldsymbol{S}^{n+1}(g, g_1, ..., g_n)$, якщо g нетотальна?
   — чи може бути тотальною функція $\boldsymbol{S}^{n+1}(g, g_1, ..., g_n)$, якщо одна з функцій $g_1, ..., g_n$ нетотальна?
   — чи може бути тотальною функція $\boldsymbol{R}(g, h)$, якщо g нетотальна?
   — чи може бути тотальною функція $\boldsymbol{R}(g, h)$, якщо h нетотальна?
   — чи може бути тотальною функція $\boldsymbol{M}(g)$, якщо g нетотальна?
2. Вкажіть ОТ алгебри ЧРФ для функцій:
   1) $f(x_1) = (x_1)!$;
   2) $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$;
   3) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2+x_3)!$;
   4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^{x_1+x_3}$
   5) $f(x_1) = [log_3(x_1)]$;
   6) $f(x_1) = [\sqrt[3]{x_1}]$;
   7) $f(x_1) = (2x_1+1)!!$;
   8) $f(x_1, x_2) = (2x_2)!!$.
3. Доведіть, що наступні функції є ПРФ:
   1) $nd(x)$ — кількість дільників числа x (беремо $nd(0) = 1$);
   2) $\sigma(x)$ — сума дільників числа x (беремо $\sigma(0) = 0$);
   3) $p(x)$ — x-ве просте число (беремо $p(0) = 2$, $p(1) = 3$ і т. д.);
   4) $spd(x)$ — сума простих дільників числа x; (беремо $spd(0) = 0$);
   5) $kpd(x)$ — кількість простих дільників числа x (тут $kpd(0) = 0$);
   6) $ex(x, y)$ — степінь числа $p(x)$ в розкладі числа y на множники, які є степенями простих чисел;
   7) $HCD(x_1, x_2)$ та $HCK(x_1, x_2)$.
4. Доведіть рекурсивність функції f, заданої такою умовою: $f(n)$ є $(n+1)$-ю цифрою після коми в десятковому розкладі числа e.
5. Доведіть рекурсивність функції f, заданої такою умовою: $f(n)$ є $(n+1)$-ю цифрою після коми в десятковому розкладі числа π.

Змістовий модуль V. Теорія алгоритмів. Арифметика

Тема 11. Кодування. Нумерації. Універсальні функції

Кодування. Нумерації, ефективні нумерації. Канторові нумерації.

Кодування та нумерації МНР-програм, МТ, операторних термів алгебр ЧРФ та ПРФ.

Стандартні нумерації n-арних ЧРФ та ПРФ. Гьодельові нумерації.

s-m-n-теорема.

Універсальні функції. Теореми про універсальні функції. Універсальна ЧРФ, універсальна МТ, універсальна МНР-програма.

Література [4; 7; 8; 11; 16; 26; 31]

Тема 12. Розв'язність та нерозв'язність

Рекурсивно перелічні (РПМ) та рекурсивні (РМ) множини, їх властивості. Теорема Поста.

Частково рекурсивні (ЧРП) та рекурсивні (РП) предикати, їх властивості.

Нерозв'язність проблем зупинки та самозастосовності. Наслідки.

Індексні множини. Теорема Райса, її значення.

Література [4—9; 11; 16; 18; 26; 28; 29; 31]

Тема 13. Відносна обчислюваність. Складність обчислень

Відносна обчислюваність. МНРО-обчислювані функції, α-ЧРФ. Теза Тьюрінга.

Релятивізація теорем.

Складність обчислень, міри обчислювальної складності.

Класи ***P*** та ***NP***. *P*-повні та *NP*-повні проблеми.

Елементарні функції.

Література [2; 4—8; 11; 31]

Тема 14. Арифметичність. Арифметична ієрархія

Арифметичність ЧРФ та РПМ.

Теорема Тарського. Значення теореми Тарського..

Арифметична ієрархія. Алгоритм Тарського-Куратовського.

Література [4; 5; 7—10; 15; 26; 27; 31]

Теми для самостійного вивчення

1. Співвідношення між класами функцій та їх графіків.

Література [4; 7]

2. Замкненість РМ та РПМ відносно теоретико-множинних операцій.

Література [4; 7]

3. Еквівалентні визначення РПМ.

Література [4; 7]

4. Замкненість РП та ЧРП відносно логічних операцій.

Література [4; 7]

5. Доведіть теорему.

Для кожної РФ β існує РФ $f = \varphi_m$ така, що $T_m(x) > \beta(x)$ для всіх x, окрім, можливо, їх скінченної кількості.

Література [2; 4]

6. Вкажіть МНР-програму, яка для заданої РФ f обчислює $f(a)$ за $a + f(a) + 2$ кроки.

Література [4]

Приклади розв'язків типових задач

Приклад 5.1. Існує РФ $t(x)$ така, що для всіх $x \in N$ маємо $D_{t(x)} = E_x$.

Функція $f(x, y) = \begin{cases} y, \text{якщо } y \in Ex, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ; за *s-m-n*-теоремою існує РФ $t(x)$ така: $f(x, y) = \varphi_{t(x)}(y)$ для всіх $x, y \in N$.

Зафіксуємо x. Маємо $y \in D_{t(x)} \Leftrightarrow \varphi_{t(x)}(y) \downarrow \Leftrightarrow f(x, y) \downarrow \Leftrightarrow y \in E_x$. Тому $D_{t(x)} = E_x$.

Приклад 5.2. Існує РФ $s(x, y)$ така: $D_{s(x, y)} = D_x \cup D_y$ для всіх $x, y \in N$.

Функція $f(x, y, z) = \begin{cases} z, \text{якщо } z \in D_x \text{ або } z \in D_y, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ. За *s-m-n*-теоремою існує РФ $s(x, y)$ така: $f(x, y, z) = \varphi_{s(x, y)}(z)$ для всіх $x, y, z \in N$.

Зафіксуємо x та y. Маємо $z \in D_{s(x, y)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x, y)}(z) \downarrow \Leftrightarrow f(x, y, z) \downarrow \Leftrightarrow z \in D_x \cup D_y$. Звідси випливає $D_{s(x, y)} = D_x \cup D_y$.

Приклад 5.3. Для кожної 1-арної ЧРФ f існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x\in N$ маємо $D_{s(x)} = f^{-1}(D_x)$.

Функція $g(x, y) = \varphi_x(f(y))$ є ЧРФ за ТЧ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така: $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх $x, y\in N$. Зафіксуємо x. Маємо $y\in D_{s(x)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow g(x, y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_x(f(y))\downarrow \Leftrightarrow f(y)\in D_x \Leftrightarrow y\in f^{-1}(D_x)$. Звідси $D_{s(x)} = f^{-1}(D_x)$.

Приклад 5.4. Предикат "$y\in E_x$" є ЧРП.

$y\in E_x \Leftrightarrow \exists z\exists k(P_x(z)\downarrow y$ за k кроків). Предикат у дужках є РП, тому за теоремою 5.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 5.5. Предикат "$\{x, y\}\subseteq D_z$" є ЧРП.

Маємо $\{x, y\}\subseteq D_z \Leftrightarrow x\in D_z \,\&\, y\in D_z \Leftrightarrow \exists k(P_z(x)\downarrow y$ за k кроків) & $\exists k(P_z(y)\downarrow y$ за k кроків). У дужках РП, тому наш предикат ЧРП.

Приклад 5.6. Предикат "φ_x неін'єктивна" є ЧРП.

Маємо φ_x неін'єктивна $\Leftrightarrow \exists a\exists b\exists c\ (a\neq b \,\&\, \varphi_x(a) = c \,\&\, \varphi_x(b) = c) \Leftrightarrow \exists a\exists b\exists c\exists k\exists l\ (a \neq b\ \&(P_x(a)\downarrow c$ за k кроків) & $(P_x(b)\downarrow c$ за l кроків)).

Приклад 5.7. Множина $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ — нерекурсивна РПМ.

Предикат "$D_x \neq \varnothing$" є ЧРП, бо $D_x \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists y\exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків), а предикат "$P_x(y)\downarrow$ за k кроків" є РП. Тому $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ є РПМ. Але за теоремою Райса $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ не є РМ.

Приклад 5.8. Множина $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ не є РПМ.

Припустимо, що $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ є РПМ. Тоді за теоремою Райса-Шапіро для кожної РФ g існує скінченна функція θ така, що $\theta\subseteq f$ та θ — 1-арна РФ. Але скінченні функції не можуть бути рекурсивними. Маємо суперечність.

Приклад 5.9. Множини $\{x \mid D_x$ є РМ$\}$ та $\{x \mid D_x$ скінченна$\}$ не є РПМ.

Множина $\varnothing$ скінченна та рекурсивна. Тому $f_\varnothing\in\{\varphi_x \mid D_x$ скінченна$\}$ та $f_\varnothing\in\{\varphi_x \mid D_x$ є РМ$\}$, звідки $\{x \mid D_x$ є РМ$\}$ та $\{x \mid D_x$ скінченна$\}$ не є РПМ.

Приклад 5.10. $M = \{x \mid D_x$ нескінченна$\}\in\boldsymbol{\Pi}_2$.

D_x нескінченна $\Leftrightarrow \forall z\exists y(y>z \,\&\, y\in D_x) \Leftrightarrow \forall z\exists y(y>z \,\&\, \exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків) $\Leftrightarrow \forall z\exists y\exists k(y>z \,\&\, P_x(y)\downarrow$ за k кроків).

Предикати $y>z$ та ($P_x(y)\downarrow$ за k кроків) є РП.

Приклад 5.11. $M = \{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\} \in \Sigma_2$.

$x \in M \Leftrightarrow \varphi_x$ не є РФ $\Leftrightarrow \exists y(\varphi x(y)\uparrow) \Leftrightarrow \exists y \neg \exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$) \Leftrightarrow \exists y \forall k \neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$. Предикат $\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ є РП.

Приклад 5.12. $M = \{x \mid D_x$ є РМ$\} \in \Sigma_3$.

Предикат $(P_u(v)\downarrow$ за w кроків$)$ позначимо $P(u, v, w)$.

Використаємо співвідношення $A \Leftrightarrow \neg B \sim (\neg A \vee \neg B) \& (A \vee B)$.

Тепер маємо: D_x є РМ $\Leftrightarrow \exists z(D_x = \overline{D_z}) \Leftrightarrow$

$\exists z \forall y(y \in D_x \Leftrightarrow \neg(y \in D_z)) \Leftrightarrow \exists z \forall y(\exists k\ P(x, y, k) \Leftrightarrow \neg \exists n P(z, y, n)) \Leftrightarrow$

$\exists z \forall y((\neg \exists k\, P(x, y, k) \vee \neg \exists n P(z, y, n)) \& (\exists k\, P(x, y, k) \vee \exists n P(z, y, n)) \Leftrightarrow$

$\exists z \forall y(\forall k \forall n(\neg P(x, y, k) \vee \neg P(z, y, n)) \& \exists k \exists n(P(x, y, k) \vee P(z, y, n)) \Leftrightarrow$

$\exists z \forall y \forall k \forall n \exists l \exists m((\neg P(x, y, k) \vee \neg P(z, y, n)) \& (P(x, y, l) \vee P(z, y, m)))$.

Предикат у дужках після кванторних префіксів є РП.

Питання для самоконтролю

1. Що таке кодування множини A в множині B? кодування A на B? однозначне кодування A в B? однозначне кодування A на B?
2. Дайте визначення еквівалентних з точністю до кодувань алгоритмів, еквівалентних алгоритмів.
3. Що таке універсальний клас алгоритмів?
4. Що таке нумерація? однозначна нумерація?
5. Які нумерації називають ефективними? Який зв'язок ефективних нумерацій та кодувань?
6. Як визначаються канторові нумерації пар та n-ок натуральних чисел?
7. Вкажіть тотожності для нумераційних функцій C, $\boldsymbol{l}$ та $\boldsymbol{r}$.
8. Вкажіть тотожності для нумераційних функцій C^n, C_{n1}, ..., C_{nn}.
9. Задайте однозначні ефективні нумерації всіх скінченних та всіх скінченних непорожніх послідовностей натуральних чисел на основі канторових нумераційних функцій та на основі подання натуральних чисел у двійковій системі числення.
10. Як задаються кодування та нумерація МНР програм? кодування та нумерація МТ?
11. Опишіть кодування ОТ алгебри ЧРФ та кодування ОТ алгебри ПРФ.
12. Як задати ефективну нумерацію всіх МНР-обчислюваних функцій фіксованої арності n? усіх МТ-обчислюваних функцій фіксованої арності n?

13. Як задати ефективну нумерацію всіх ЧРФ? усіх ПРФ?
14. Які нумерації n-арних ЧРФ вважаємо стандартними?
15. Дайте визначення Гьодельової нумерації n-арних ЧРФ.
16. Дайте визначення спряженої з нумерацією функції.
17. Дайте визначення обчислюваної нумерації.
18. Дайте визначення універсальної функції.
19. Сформулюйте теореми про універсальні функції.
20. Що таке універсальна ЧРФ? універсальна МНР-програма? універсальна МТ?
21. Опишіть принцип роботи універсальної МНР-програми.
22. Як пов'язані універсальні алгоритмічні машини з програмуванням?
23. Сформулюйте s-m-n-теорему в загальному вигляді та в спрощеній формі.
24. Дайте визначення РМ, ПРМ, РПМ.
25. Сформулюйте наслідки тези Чорча для РМ та РПМ.
26. Вкажіть співвідношення між класами ПРМ, РМ та РПМ.
27. Відносно яких теоретико-множинних операцій замкнені класи ПРМ? РМ? РПМ?
28. Наведіть властивості РМ та РПМ
29. Сформулюйте еквівалентні визначення РПМ.
30. Сформулюйте теорему Поста для множин.
31. Як задається стандартна нумерація РПМ?
32. Дайте визначення РП, ПРП, ЧРП.
33. Відносно яких логічних зв'язок замкнені класи ПРП? РП? ЧРП?
34. Вкажіть співвідношення між класами ПРП, РП та ЧРП.
35. Сформулюйте теорему Поста для предикатів.
36. Що таке алгоритмічно розв'язна масова проблема? Частково алгоритмічно розв'язна масова проблема?
37. Як формулюється проблема зупинки? проблема самозастосовності?
38. Сформулюйте наслідки алгоритмічної нерозв'язності проблеми самозастосовності.
39. Наведіть приклади нерекурсивних РПМ та множин, які не є РПМ.
40. Наведіть приклади нерекурсивних ЧРП та предикатів, які не є ЧРП.

41. Наведіть приклади ЧРФ, які не мають рекурсивних довизначень.
42. Сформулюйте теорему про графік.
43. Які множини називають індексними?
44. Чи є індексною діагональна множина D?
45. Сформулюйте теорему Райса. В чому полягає значення теореми Райса?
46. Сформулюйте теорему, дуальну до теореми Райса.
47. Наведіть приклади використання теорем про індексні множини.
48. Що таке функція складності обчислень?
49. Який зв'язок між об'ємом необхідної пам'яті та часом обчислення?
50. Що таке функція, обчислювана за лінійний час?
51. Дайте визначення класів $\boldsymbol{P}$ та $\boldsymbol{NP}$. Яке співвідношення між класами $\boldsymbol{P}$ та $\boldsymbol{NP}$?
52. Що таке NP-повна множина (предикат)?
53. Дайте визначення класів $\boldsymbol{P\text{-}Sp}$ та $\boldsymbol{NP\text{-}Sp}$.
54. Дайте визначення міри обчислювальної складності.
55. Сформулюйте теорему про прискорення.
56. Дайте визначення класу елементарних функцій.
57. Який зв'язок між елементарними функціями та функціями, обчислюваними за елементарний час?
58. Як можна уточнити поняття відносної обчислюваності?
59. Дайте визначення МНР з оракулом.
60. Що таке програма МНРО?
61. Що таке α-обчислювана функція?
62. Що таке α-ЧРФ? Вкажіть елементарні властивості α-ЧРФ:
63. Сформулюйте тезу Тьюрінга:
64. Як задається кодування команд МНРО-програм?
65. Введіть ефективну нумерацію n-арних α-ЧРФ.
66. Дайте визначення α-РФ, α-ЧРФ, α-РМ, α-РПМ, α-РП, α-ЧРП.
67. Сформулюйте релятивні варіанти відомих вам теорем теорії алгоритмів.
68. Дайте визначення арифметичного предиката, арифметичної множини, арифметичної функції.
69. Покажіть арифметичність функцій $\boldsymbol{o}(x)$, $\boldsymbol{s}(x)$, $\boldsymbol{I}_m^n(x_1, ..., x_n)$, $x + y$, $x \times y$, $x \dot{-} y$.

70. Покажіть, що операції $\boldsymbol{S}^{n+1}$ та $\boldsymbol{M}$ зберігають арифметичність функцій.
71. Щодо яких теоретико-множинних операцій замкнений клас арифметичних множин?
72. Яке співвідношення між класами РПМ і арифметичних множин?
73. Сформулюйте теорему Тарського.
74. У чому полягає значення теореми Тарського?
75. Що таке Σ_n-префікс? Π_n-префікс?
76. Дайте визначення класів предикатів Σ_n, Π_n та Δ_n, класів множин Σ_n, Π_n та Δ_n.
77. Вкажіть елементарні властивості класів Σ_n, Π_n та Δ_n.
78. Зобразіть арифметичну ієрархію класів арифметичних предикатів та арифметичних множин.
79. Сформулюйте теорему Кліні про ієрархію.
80. Опишіть алгоритм Тарського-Куратовського.

Завдання та вправи для самостійного розв'язання

Тема 11. Кодування. Нумерації. Універсальні функції

1. Знайдіть $\boldsymbol{l}\,(150)$, $\boldsymbol{r}\,(150)$ та $\boldsymbol{l}\,(200)$, $\boldsymbol{r}\,(200)$.
2. Розв'яжіть наступні рівняння:
   1) $C^3(x, y, z) = 131$;
   2) $C^3(x, y, z) = 226$;
   3) $C^4(x, y, z, v) = 123$;
   4) $C^4(x, y, z, v) = 282$.
3. Задайте ефективну нумерацію множини формул мови арифметики.
4. Задайте ефективну нумерацію множини формул мови теорії множин.
5. Задайте ефективну нумерацію множини формул мови частково впорядкованих множин.
6. Вкажіть МНР-програму та її код для функцій:
   1) $f(x) = 2x$;
   2) $f(x, y) = x - y$;
   3) $f(x) = x/2$;
   4) $f(x) = nsg(x)$;

5) $f(x, y) = sg(x+y)$;

6) $f(x, y) = max(x, y)$.

7. Визначіть всі МНР-програми з кодами від 0 до 100 включно.
8. Вкажіть МТ та її код для функцій та предикатів:

1) $f(x) = sg(x)$;

2) $f(x, y) = nsg(x+y)$;

3) $f(x) = sg(x/2)$;

4) "x — парне число".

9. Наведіть приклад однозначної нумерації n-арних ЧРФ.
10. Доведіть існування таких РФ s :

1) $D^3_{s(x)} = \{(u, v, w) \mid x=u^2+v^2+w^2\}$ для всіх $x \in N$;

2) $E_{s(x,y)} = D_x \cup E_y$ для всіх $x, y \in N$;

3) $D_{s(x,y)} = E_{2x} \cap D_{3y}$ для всіх $x, y \in N$;

4) $E_{s(x,y)} = (D_{3x} \cap E_{2y}) \cup \{x, y\}$ для всіх $x, y \in N$;

5) $D_{s(x,y,z)} = (D_x \cup E_y) \cap D_z$ для всіх $x, y, z \in N$;

6) $E_{s(x,y)} = f^{-1}(E_x \cap D_y)$ для всіх $x, y \in N$ (тут f — фіксована ЧРФ);

7) $D_{s(x,y)} = f(E_y \cup D_x)$ для всіх $x, y \in N$ (тут f — фіксована ЧРФ).

Тема 12. Розв'язність та нерозв'язність

1. Нехай A та B — РПМ, C — РМ, причому $A \cap B = \varnothing$, $A \subseteq C \subseteq A \cup B$. Доведіть, що тоді A є РМ.
2. Нехай f — РФ, g — ін'єктивна РФ така, що E_g — РМ, причому $f(x) \geq g(x)$ для всіх x. Доведіть, що тоді E_f є РМ.
3. Нехай A — РМ, f — сюр'єктивна РФ така, що $f(A) \cap f(N \setminus A) = \varnothing$. Доведіть, що множина $f(A)$ рекурсивна.
4. Доведіть, що множина $L \neq \varnothing$ рекурсивна $\Leftrightarrow$ існує нестрого монотонно зростаюча РФ g така, що $L = E_g$.
5. Доведіть узагальнену теорему Поста: нехай множини A та B — РПМ, причому $A \cap B = \varnothing$ та множина $A \cup B$ рекурсивна. Тоді A та B — рекурсивні множини.
6. Доведіть наступне твердження (принцип редукції): для довільних РПМ A та B існують РПМ L та M такі: $L \subseteq A$, $M \subseteq B$, $L \cap M = \varnothing$, $L \cup M = A \cup B$.
7. Нехай f є ЧРФ, A є РПМ.

1) Доведіть, що тоді множини $f^{-1}(A)$ та $f(A)$ є РПМ.

2) Чи залишиться зазначене вище твердження правильним, якщо слова “ЧРФ” та “РПМ” відповідно замінити на “РФ” та “РМ”?

8. Доведіть: якщо A є РПМ, то $\bigcup\limits_{x\in A} D_x$ та $\bigcup\limits_{x\in A} E_x$ теж РПМ.

9. Доведіть, що для кожного $k\in N$ множина ${}^kD_n = \{x \mid \varphi_n(x) = k\}$ є РПМ. Доведіть, що при фіксованому k ${}^kD_0$, ${}^\mathrm{k}D_1$, ..., ${}^kD_n$, ... є переліком усіх РПМ.

10. Чи існує РФ $f(x, y)$ така: якщо $Px(y)\downarrow$, то це за $\leq f(x, y)$ кроків?

11. Чи має рекурсивні довизначення функція $\varphi_x(y) + \varphi_y(x)$?

12. Нехай предикат $R(x, y)$ є РП.
   1) Чи завжди $\forall x R(x, y)$ є РП?
   2) Чи завжди $\forall x R(x, y)$ є ЧРП?

13. Нехай всі множини R_m, де $m\in N$, рекурсивні.
   1) Чи завжди множина $\bigcap\limits_{m\in N} R_m$ є РМ?
   2) Чи завжди множина $\bigcap\limits_{m\in N} R_m$ є РПМ?

14. Доведіть:
   1) Якщо функція f є ПРФ/РФ, то Γ_f є ПРМ/РМ.
   2) Існують нерекурсивні ЧРФ із скінченним графіком.
   3) Існує РФ f така, що Γ_f не є ПРМ.

15. Зазначте, чи існує РФ s така:
   1) для всіх $x, y\in N$ $D_{s(x, y)} = (E_{2x}\cup D_{x+2y})\cap D_{3y}$;
   2) для всіх $x, y\in N$ $E_{s(x, y)} = (D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{3y, x+y\}$;
   3) для всіх $x, y\in N$ $D_{s(x, y)} = (E_{4x}\cup D_{3y+x})\setminus\{x, y\}$;
   4) для всіх $x, y, z\in N$ $E_{s(x, y, z)} = (D_{5x}\cap E_{x+y})\cup E_{y+3z}$;
   5) для всіх $x\in N$ $D_{s(x)} = \mathrm{C}(D_x^2)$;
   6) для всіх $x\in N$ $D^2_{s(x)} = \mathrm{C}^{-1}(D_x)$;
   7) для всіх $x, y\in N$ $E_{s(x,y)} = f^{-1}(D_{2x}\cup E_y)$? (тут f — фіксована ЧРФ);
   8) для всіх $x, y\in N$ $D_{s(x,y)} = f(D_x\cap E_{3y})$? (тут f — фіксована ЧРФ);
   9) для всіх $x, y, z\in N$ $E_{s(x, y, z)} = E_x\setminus(D_y\cup E_z)$;
   10) для всіх $x, y, z\in N$ $D_{s(x, y, z)} = (E_x\cap \overline{D_y})\setminus D_z)$;
   11) для всіх $x, y, z\in N$ $E_{s(x, y, z)} = D_x\cup E_y\setminus E_z$.

16. Зазначте, чи будуть РПМ наступні множини:

1) $\{x \mid 4 \in D_x\}$;
2) $\{x \mid x \in E_x\}$;
3) $\{x \mid 1 \in E_x^2\}$;
4) $\{x \mid \{1,2\} \subseteq E_x\}$;
5) $\{3x \mid x \in D_x\}$;
6) $\{C(x, y) \mid x \in D_y\}$;
7) $\{C(x, y) \mid x \in E_y\}$;
9) $\{x \mid E_x$ скінченна$\}$;
10) $\{x \mid \varphi_x$ є ПРФ$\}$;
11) $\{x \mid \varphi_x$ не є ПРФ$\}$;
12) $\{x \mid \varphi_x$ ін'єктивна$\}$;
13) $\{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$;
14) $\{x \mid \varphi_x$ не є сюр'єктивна$\}$;
15) $\{x \mid E_x$ є ПРМ$\}$;
16) $\{x \mid \varphi_x$ не є поліном$\}$;
17) $\{x \mid \varphi_x$ є поліном$\}$;
18) $\{x \mid D_x$ скінченна та $\neq \varnothing\}$;
19) $\{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\}$;
20) $\{x \mid E_x = \{1,2\}\}$.

17. Зазначте, чи будуть ЧРП наступні предикати:

1) "$\varphi_x(y+2)$ просте";
2) "$\varphi_{2x}(3y)$ парне";
3) "$(0,1) \in D_x^2$"?
4) "$\{2, y+1\} \subseteq D_{x+5y}$";
5) "$\{x, y\} \subseteq E_{3x+2y}$";
6) "$\{0,1\} \subseteq D_x$";
7) "$\{0,1\} \neq D_x$";
8) "$\{0,1\} = D_x$";
9) "$D_x = D_y$";
10) "$D_x \neq D_y$";
11) "$D_x = N$";
12) "$E_x \neq N$";

13) “$E_x = E_y$”;
14) “$E_x \neq E_y$”;
15) “$E_x \neq D_y$”;
16) “$E_x = D_y$”.

Тема 14. Арифметичність. Арифметична ієрархія

1. Доведіть арифметичність наступних множин та предикатів:
   1) $\{x \mid D_x$ скінченна$\}$;
   2) $\{x \mid E_x$ нескінченна$\}$;
   3) $\{x \mid E_x$ є РМ$\}$;
   4) $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$;
   5) “$D_x \neq N$”;
   6) “$E_x = N$”;
   7) “$D_x = D$”;
   8) $\{x \mid \varphi_x$ неін’єктивна$\}$;
   9) $\{x \mid \varphi_x$ несюр’єктивна$\}$;
   10) $\{C(x, y) \mid x \in D_y\}$.
2. Визначіть місце в арифметичній ієрархії наступних множин та предикатів:
   1) $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$;
   2) “φ_x ін’єктивна”;
   3) $\{x \mid E_x = \varnothing\}$;
   4) $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$;
   5) $\{x \mid D_x$ скінченна$\}$;
   6) $\{x \mid E_x$ нескінченна$\}$;
   7) $\{x \mid \varphi_x$ є ПРФ$\}$;
   8) $\{x \mid E_x$ є ПРМ$\}$;
   9) $\{x \mid \varphi_x$ сюр’єктивна$\}$;
   10) $\{x \mid \varphi_x$ бієктивна$\}$;
   11) $\{x \mid E_x = D\}$;
   12) “$D_x \neq D_y$”;
   13) “$E_x = D_y$”;
   14) “$D_x \neq E_y$”;
   15) “$E_x = E_y$”.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Андерсон Д. А.* Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Вильямс, 2003. — 960 с.
2. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М.: Мир, 1979. — 536 с.
3. *Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К.* Основи дискретної математики. — К.: Наукова думка, 2002. — 579 с.
4. *Катленд Н.* Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. — М.: Мир, 1983. — 256 с.
5. *Клини С.* Математическая логика. — М.: Мир, 1973. — 480 с.
6. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1975. — 240 с.
7. *Лісовик Л. П., Шкільняк С. С.* Теорія алгоритмів. — К., 2003. — 163 с.
8. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965. — 392 с.
9. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
10. *Нікітченко М. С., Шкільняк С. С.* Основи математичної логіки. — К.: ВПЦ Київ. ун-т, 2006. — 246 с.
11. *Успенский В. А., Семенов А. Л.* Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. — М.: Наука, 1987. — 288 с.
12. *Фейс Р.* Модальная логика. — М.: Наука, 1974. — 520 с.
13. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. — М.: Наука, 1983. — 256 с.
14. *Шенфилд Дж.* Математическая логика. — М.: Наука, 1975. — 528 с.
15. *Шкільняк С. С.* Математична логіка: приклади і задачі. — К.: ВПЦ Київ. ун-т, 2002. — 56 с.
16. *Шкільняк С. С.* Теорія алгоритмів: приклади і задачі. — К., 2003. — 93 с.

Додаткова

17. *Андон Ф. И., Яшунин А. Е., Резниченко В. А.* Логические модели интеллектуальных информационных систем. — К.: Наукова думка, 1999. — 396 с.

18. *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. — М.: Мир, 1994. — 396 с.
19. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. — Т. 1, 2. — М.: Наука, 1982.
20. *Гиндикин С. Г.* Алгебра логики в задачах. — М.: Наука, 1972. — 288 с.
21. *Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л.* Алгебра, языки, программирование. — К.: Наукова думка, 1974. — 328 с.
22. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
23. *Ішмуратов А. Т.* Вступ до філософської логіки. — К.: Абрис, 1997. — 360 с.
24. *Кондаков Н. И.* Введение в логику. — М.: Наука. 1967. — 466 с.
25. *Костюк В. Н.* Элементы модальной логики. — К.: Наукова думка, 1978. — 179 с.
26. *Лисовик Л. П., Редько В.Н.* Алгоритмы и формальные системы. — К.: КГУ, 1981. — 112 с.
27. *Манин Ю. И.* Доказуемое и недоказуемое. — М.: Советское радио, 1979. — 168 с.
28. *Манин Ю. И.* Вычислимое и невычислимое. — М.: Советское радио, 1980. — 128 с.
29. *Непейвода Н. Н.* Прикладная логика. — Новосибирск: НГУ, 2000. — 521 с.
30. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. — М.: Наука, 1973. — 400 с.
31. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972. — 624 с.
32. *Справочная* книга по математической логике / Под ред. Дж. Барвайса. — Ч. 1, 4. — М.: Наука, 1982—1983.
33. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. — М.: Просвещение, 1968. — 232 с.
34. *Трохимчук Р. М.* Дискретна математика. — К.: МАУП, 2006.
35. *Такеути Г.* Теория доказательств. — М.: Мир, 1978. — 412 с.
36. *Хромой Я.В.* Математична логіка. — К.: Вища шк., 1983. — 208 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *С. М. Толкачова*
Комп'ютерне верстання *Н. М. Музиченко*

Зам. № ВКЦ-3427

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП