МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

“МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ”

(для бакалаврів)

Київ 2008

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики та програмування *Ю. В. Загороднім*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 1 від 30.08.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Загородній Ю. В. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни "Моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів" (для бакалаврів). — К.: МАУП, 2008. — 54 с.

Методичні матеріали містять пояснювальну записку, тематичний план, теоретичний мінімум, задачі для самоконтролю, загальні рекомендації щодо виконання самостійної роботи, теми завдань, а також список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Сучасний спеціаліст з прикладної математики повинен вміти самостійно підходити до вивчення будь-якого об'єкта природи за допомогою апарату математичного моделювання. Для цього йому потрібно опанувати методи побудови, структурної та параметричної ідентифікації моделей, а також методів їх дослідження. Останні найчастіше залежать від завдання, яке ставиться при дослідженні об'єкта.

У методичних рекомендаціях до виконання самостійної роботи розглядають загальні положення з виконання робіт, а також наводиться список завдань для студентів. Кожне завдання полягає у побудові та дослідженні математичної моделі економічного, соціального чи екологічного процесу. В ході виконання самостійної роботи студент має опанувати методи дослідження математичних моделей.

Матеріал самостійних завдань відповідає темам дисципліни "Моделювання економічних, соціальних та біологічних процесів" у підготовці бакалаврів, спеціалістів, магістрів напряму "Прикладна математика". Зміст поєднує теоретичні питання методики математичного моделювання та основи його практичного застосування у дослідженні реальних процесів.

Метою курсу є ознайомлення з моделями реальних економічних, екологічних та соціальних процесів, формування системи знань з методології, методики та інструментарію побудови і дослідження математичних чи імітаційних моделей, їх аналізу та використання.

Курс "Моделювання економічних, соціальних та екологічних процесів" вивчається студентами спеціальності прикладна математика на 4 курсі в 5-му семестрі, коли вони опанували базові дисципліни спеціальності, такі як "Математичний аналіз", "Теорія ймовірності", "Математичне програмування" та інші.

Задачами вивчення дисципліни є

- теоретико-практична підготовка студентів основам математичного моделювання реальних процесів;
- опанування класів рівнянь для моделювання процесів;
- ознайомлення з відомими моделями економічних, соціальних та екологічних процесів.

В методичних рекомендаціях пропонуються наступні теми для самостійної роботи студентів:

1. Моделі динаміки популяцій з неперервним віком.
2. Модель динаміки фірми в умовах продуктової інновації.

3. Модифікована модель хижак-жертва з врахуванням екологічних факторів.
4. Модель розповсюдження забруднень.
5. Моделювання впливу виробництва на навколишнє середовище.
6. Модель втрати потужності сільського господарства в нестійких екологічних умовах.
7. Дослідження моделі динаміки цін на ринку житла.
8. Дослідження моделі стійкого розвитку з врахуванням інноваційних процесів.
9. Моделювання динаміки стану регіону.
10. Моделі хімічних трансформацій та ферментативних процесів.
11. Моделі росту біологічних об'єктів та інфекційних процесів.
12. Моделі розповсюдження паніки або інфекційного процесу.
13. Моделі протікання інфекційних хвороб та боротьби з ними.
14. Модель економічного росту з врахуванням динаміки знань.
15. Моделювання динаміки інтелектуальних і виробничих ресурсів країни.
16. Моделі руху керованих апаратів та платформ.

Автор сподівається, що методичні рекомендації дадуть користь студентам та фахівцям економічних, екологічних і математичних спеціальностей, а також всім, хто цікавиться проблемами математичного моделювання еколого-економічних систем.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МІНІМУМ: ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Метою самостійної роботи є здобуття студентами знань та навичок з моделювання, проведення системного аналізу об'єкта моделювання, а також побудови та дослідження математичної моделі.

В ході роботи необхідно розглянути такі питання:

1. Визначення об'єкта і цілі його моделювання.
2. Визначення основних числових характеристик об'єкта та зв'язків між ними.
3. Класифікація типів змінних, які описують числові характеристики:
   а) визначення вхідних (керуючих, визначених, оцінюваних, прогнозованих та невизначених) впливів на функціонування об'єкта;

   б) визначення вихідних змінних (значення цільових функцій управління);
   в) інші числові характеристики функціонування об’єкта є внутрішніми.
4. Визначення методів дослідження моделі об’єкту.
5. Вибір системи рівнянь для моделювання процесів.
6. Визначення зв’язків між диференційними, інтегральними і різницевими рівняннями, які описують динаміки одного об’єкта.
7. Вибір та реалізація методів представлення динаміки чисельних характеристик об’єкта системою математичних рівнянь.
8. Реалізація цілі досліджень математичних моделей реальних процесів.
9. Порівняння аналітичних, чисельних та якісних методів дослідження, їх переваги та недоліки.
10. Поняття фазового простору системи динамічних рівнянь.
11. Використання апарату якісних методів дослідження моделей реальних процесів.

Системне моделювання розглядається як представлення та аналіз об’єкта у вигляді системи (*сукупність об’єктів, компонентів або елементів довільної природи, які утворюють деяку цілісність у тому чи іншому контексті*).

В цьому процесі слід виділяти такі категорії: **система**, **середовище**, **границя**, **структура**, **стан**, **поведінка**.

Система — об’єктивна єдність закономірно пов’язаних один з одним предметів, явищ, а також знань про природу і суспільство.

Зовнішнє середовище — множина існуючих поза межами системи елементів довільної природи, які впливають на систему або знаходяться під її впливом в умовах задачі, що розглядається.

Границя системи — це сукупність елементів, які розділяють об’єкти природи на 2 класи: ті, що належать системі, і ті, що належать середовищу системи. **Границя** системи може розділяти об’єкти за належностю їх до системи *чітко* або *нечітко*.

Структурою системи є стійка в часі сукупність взаємозв’язків між елементами системи.

Станом системи є сукупність властивостей і ознак системи, які в будь-який момент часу відображають найсуттєвіші особливості поведінки системи.

Поведінкою системи в часі є послідовна зміна станів системи.

Якщо стан системи описується фіксованими значеннями компонент вектора неперервно-диференційованих функцій $x(t)=(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$, $n \in N$, тоді поведінка системи описується вектором $\frac{dt(t)}{dt}$.

Результатом системного моделювання є побудова деякої моделі системи і предметної області, яка описує важливі з точки зору цілі дослідження характеристики об'єкта.

Модель — деяке представлення системи, яке відображає суттєві закономірності її структури і процесу функціонування, певною мовою і в певній формі.

Наприклад, **математична модель** системи-орігіналу — **це сукупність рівнянь, нерівностей та інших математичних співвідношень, які описують зв'язки в системі між числовими характеристиками її станів**.

Отже, можна визначити **системне моделювання** як процес побудови і послідовного використання моделей для отримання інформації про систему-орігінал, який можна розбити на сукупність таких етапів:

1) аналіз проблемної ситуації;
2) структуризація предметної області і побудова моделі;
3) проведення обчислювальних експериментів з моделлю;
4) використання результатів експериментів при управлінні системою;
5) коректування і доробка моделі.

Отже, наглядно результат системного моделювання представляється у вигляді графу, вершинами якого є змінні, що характеризують системи, а дугами — зв'язки між ними, або графу, вершинами якого є процеси, що визначають поведінку система, а дугами — змінні, які є, відповідно, або вхідними, або вихідними змінними процесу.

Приклад

Побудувати систему управління виготовленням і продажем продукції швидкого приготування (млинці, пиріжки, ...) протягом одного робочого дня, час якого розбитий на дискретні кроки по 1 години.

Результатом системного аналізу є наступна структурна схема:

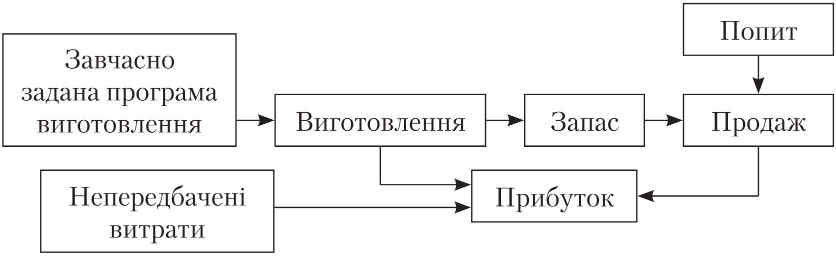

Рис. 1. Структурна схема системи управління виготовленням та реалізацією продукції

Кожну систему можна представити як сукупність функціональних блоків і зв'язків між ними. Функціональний блок у системі може бути представлений наступним чином:

Рис. 2. Структура функціонального блоку системи

Такий зв'язок між змінними можна описати наступним найпростішим лінійним диференційним або при дискретному характері часу різницевим рівнянням:

$$\begin{aligned} & a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) + a_0 = b_2 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t) + b_0 \\ & A(D) y(t) = B(D) x(t) \\ & y(t+1) + a_1 y(t) + a_0 = b_2 x(t+1) + b_1 x(t) + b_0 \end{aligned}, \qquad (1)$$

де $A(D)$ – диференційний оператор, який представляє лінійну комбінацію функції і її похідних. Перше рівняння є диференційним, а останнє – його різницевим аналогом.

Математична модель динамічної системи, як правило, складається з:

- опису множини можливих станів системи $x(t)$;
- опису законів, за допомогою яких система може переходити із стану в стан.

Взагалі, **динамічні моделі**, за допомогою яких можна описати зміну характеристик системи в інтервалі часу $[t_0, t]$, $t > t_0$, мають у своєму складі рівнянням наступних виглядів:

1) аналітичний вигляд:

$$x(t)=f(t, u(t)). \tag{2}$$

2) система неперервних диференційних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = g(x,u,t) \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned}. \tag{3}$$

3) системою різницевих (дискретних) рівнянь:

$$\begin{aligned} &x(t+h)=G(x(t), u(t), t) \\ &x(t_0)=x_0 \end{aligned} \tag{4}$$

де $x(t)=(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ — вектор функцій стану системи, $u(t)=(u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t))$ — вектор керуючих параметрів, від яких може залежати поведінка системи з часом.

Для визначення виду рівняння, яке описує зв'язки в системі об'єкта слід пам'ятати, що

- стан об'єкта — вектор-функція $x(t)$, компоненти якої можуть представляти як вхідний, так і вихідний елемент деякого функціонального блоку в системі об'єкта;
- вектор-функція $\frac{dx(t)}{dt}$ (або $x(t+1)-x(t)$ для різницевих рівнянь) визначає швидкість зміни числових характеристик об'єкта;
- вектор-функція $y(t) = \int_{t_0}^{t} x(s)ds$ (або $\sum_{i=0}^{N} x(t+i)$ для різницевих рівнянь) визначає інтегральну (сумарну) характеристику значень $x(t)$ за час $[t_0, t]$, $t > t_0$.

Приклад

Найпростіший варіант моделі Лотки-Вольтерри "хижак-жертва" виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = a_1 x - b_1 xy \\ &\frac{dy}{dt} = b_2 xy - a_2 y \end{aligned}, \tag{5}$$

де $x(t)$, $y(t)$ — змінні стану системи, відповідно, кількість (або концентрація на одиницю площі) жертв і хижаків в екологічній ніші.

Система диференційних рівнянь (3) задає швидкість зміни всіх компонентів $y_i(t)$, а отже їх значення для кожного моменту часу; якщо відомий початковий стан — значення компонентів вектора у початковий момент часу t_0:

$$x(t_0) = x^0 = (x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0), \tag{6}$$

Задача (3), (6) по знаходженню значень змінних вектора $y(t)$ для будь-якого $t \in [t_0, t_k]$ називається задачею Коши. Для його знаходження існує багато аналітичних і чисельних методів.

Аналітичні методи визначають розв'язок системи (3) як аналітично визначену функцію виду (2). Такі методи базуються на розв'язуванні диференційних рівнянь і є обмеженими в своїй дії тільки на прості лінійні системи диференційних рівнянь. Для решти складніших рівнянь, що можуть описувати системи (3), існують тільки чисельні методи розв'язування.

Одним з найпростіших чисельних методів розв'язування задачі (3), (6) є метод Ейлера. Він базується на заміні похідної функції різницевим рівнянням, при цьому відрізок часу ділиться на рівні проміжки довжиною h: $t_{k+1} = t_k + h,\ k = \overline{0, N}$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \tag{7}$$

Підставляючи залежність (7) в рівняння (3), отримуємо наступну різницеву систему для розрахунків значень змінних $y(t)$:

$$\begin{aligned} & y(t+h)=y(t) + hg\,(y(t), t) \\ & y(t_0)=y^0 \end{aligned} \tag{8}$$

Звичайно, чим менше значення кроку часу h, тим більша точність при заміні похідної її різницевою схемою (8), а отже, більша точність розрахунків. Але і час виконання обчислень збільшується, бо слід обчислювати значення змінних стану на кожному кроці.

Для більш точного апроксимування задачі (3), (6) існують інші методи, крім методу Ейлера. Наприклад, метод Рунге-Кутта другого порядку, який дає точність в 4 рази більшу, ніж вищезгаданий метод Ейлера:

$$k_1 = hg(y(t), t)$$

$$k_2 = hg\left(y(t) + \frac{1}{2}k_1,\ t + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = hg\left(y(t) + \frac{3}{4}k_2,\ t + \frac{3h}{4}\right) \qquad (9)$$

$$y(t+h) = y(t) + \frac{4}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{2}{9}k_3$$

$$y(t_0) = y^0$$

Якісне дослідження систем типу (3) полягає у відшуканні відповіді на питання про загальний характер динаміки змінних стану $x(t) \in R^n$ в просторі їх значень, який називається **фазовим простором** системи.

В реальних (економічних, соціальних чи екологічних) системах найчастіше проходять процеси нелінійні. Тобто і моделі таких систем мають бути нелінійні. Так, швидкість найпростішої взаємодії двох реагентів (наприклад, при фотосинтезі — води і вуглекислоти) слід в правій частині ставити добуток двох концентрацій (води та вуглекислоти з параметрами середовища — сонячної радіації і температурою).

Загальний підхід до **якісного аналізу** систем (3) полягає у характеристиці станів системи в просторі R^n. Тоді стан системи буде відображатися точкою M(x), яка називається зображуючою точкою. Зміна станів системи відображається рухом зображуючої точки в просторі з координатами x, яке називують **фазовим простором**. Траєкторію руху зображаючої точки називають **фазовою траєкторію**.

Одним з найважливіших властивостей фазових траєкторій відкритих динамічних систем є наявність в них стаціонарних станів $\bar{x}$ (на відміну від термодинамічної рівноваги в замкнених системах). Тому в якісному аналізу в першу чергу вивчають властивості стаціонарних точок. Такий стаціонарний стан називають стаціонарною точкою (СТ) в фазовому просторі. При проходженні траєкторії системи через цю точку, вона (траєкторія) самостійно вже не може з неї "вийти", тобто система не може змінити свій стан.

Тому, при якісному аналізі динамічної системи визначають наступні її характеристики:

- чи існують у системі стаціонарні стани;

- скільки стаціонарних станів;
- перевірка стійкості всіх стаціонарних станів;
- знаходження залежності характеру стійкості СТ від параметрів системи;
- чи можливі переходи системи з однієї СТ до іншої?

Проведемо **якісне дослідження** для стаціонарної системи типу (3):

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \qquad x(t_0) = x^0 \tag{10}$$

За визначенням стаціонарний стан системи є такий стан, коли всі похідні по часу дорівнюють нулю:

$$\frac{dx_i}{dt} = 0,\ i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

або $x(t+1)=x(t)$ для різницевих систем (4).

Точку в фазовому просторі з такою властивість називають стаціонарною точкою (чи особливою).

Зрозуміло, що в моделі кожна змінна (компонента вектору $x(t)$) описує характеристику системи зі своєю розмірністю. Для зручності дослідження фазових траєкторій систему часто приводять до безрозмірного стану.

Приклад

Реакцію першого порядку $S \leftrightarrow P$ з темпами відповідно κ_1 та κ_2, можна описати за допомогою наступної системи диференційних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -k_1 S + k_2 P \\ \frac{dP}{dt} &= -k_1 S - k_2 P \end{aligned}. \tag{12}$$

З системи (12) очевидно випливає $\frac{d}{dt}(S+P) = 0$. Отже, $P + S = S_0 = const$, де початкова умова має наступний вигляд: $S(0) = S_0$; $P(0) = 0$.

Якщо ввести безрозмірні величини $x_1 = \frac{S}{S_0}$; $x_2 = \frac{P}{S_0}$, безрозмірний час $\tau = k_1 t$, відносну швидкість реакції $\xi = \frac{v}{V}$, максимальну швидкість реакції $V = k_1 S_0$ і безрозмірний коефіцієнт $\beta = \frac{k_1}{k_2}$, перейдемо до безрозмірної системи кінетичних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = -x_1(1+\beta) + \beta \\ &x_1 + x_2 = 1 \\ &x_1(0) = 1 \end{aligned} \qquad (13)$$

Звідси видно, що СТ — стаціонарні концентрації речовин — такі: $\overline{x_1} = \frac{\beta}{1+\beta}$; $\overline{x_2} = \frac{1}{1+\beta}$

Наступний крок — перевірка стаціонарної точки на стійкість. Почнемо для простоти спочатку з систем з однією змінною стану, тобто $n = 1$.

Якщо $\bar{x}$ — стаціонарна точка, тоді її стійкість за означенням полягає у виконанні наступної умови:

$$\forall\, \varepsilon \exists \delta : |x(t) - \bar{x}| < \varepsilon \text{ для } t \in [t_0, \infty], \text{ якщо } |x(t_0) - \bar{x}| < \delta. \qquad (14)$$

Розглянемо аналітичний метод визначення стійкості за Ляпуновим. Він полягає у дослідженні стійкості за означенням, якщо припустити, що система збурилася в початковий момент:

$$x(t_0) = \bar{x} + \zeta$$

Тоді, підставляючи в (10) і розкладаючи функцію правої частини в ряд Тейлора, маємо:

$$\frac{d\xi}{dt} = g(\bar{x}) + g'_x(\bar{x})\xi + O(\xi^2)$$

Якщо відкинути члени малості ξ^2 і більше (при цьому, зрозуміло, $\frac{d\bar{x}}{dt} = g(\bar{x}) = 0$), маємо:

$$\frac{d\xi}{dt} \approx g'_x(\bar{x})\xi$$

Тоді стійкість СТ за означенням залежить від знаку похідної $g'_x(\bar{x})$, тому що розв'язком рівняння системи є функція $\xi(t) = Ce^{\lambda t}$, $\lambda = g'_x(t)$. Якщо $\lambda < 0$, тоді з функції розв'язку очевидно, що

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0\ ,$$

а тому система є не тільки стійкою, але і асимптотично стійкою (тобто, з часом збурення від СТ затухають до 0).

Приклад

Розглянемо спрощену модель культиватора, в якому відбувається розмноження бактеріальних клітин і їх загибель, крім того, в систему може надходити зовні певна кількість клітин. Введемо змінну стану $x(t)$ — концентрацію клітин в час t. Тоді динаміку системи можна описати наступним рівнянням:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a - bx(t) + cx^2(t)$$

Нехай, для простоти $c=1$.

Тоді,

1) при а > $\frac{b^2}{4}$ в системі не існує дійсних СТ

2) при а = $\frac{b^2}{4}$ існує одна СТ $\overline{x} = \frac{b}{2}$

3) при а < $\frac{b^2}{4}$ існує дві СТ $\overline{x_{1,2}} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}.$

Виходячи з критерію Ляпунова, всі значення $\overline{x_1}(a)$ є нестійкими, а $\overline{x_2}(a)$ — стійкими.

Тоді точка $a = \frac{b^2}{4}$ називається особливою, біфуркаційною. Графік

$\overline{x}(a)$ — біфукарційна діаграма, тому що, проходячи це значення, параметр a змінює фазовий портрет системи.

Розглянемо одну з найпростіший двовимірних систем — модель "хижак-жертва" (5). Області дослідження цієї моделі: $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Характер **фазових траєкторій** двовимірної системи (рух точки М з координатами $(x(t), y(t))$) відображає загальні якісні риси поведінки системи. Направлення дотичної прямої задається кутом з тангенсом $\frac{dy}{dx}$ в деякій точці (x_1, y_1). Рівняння цієї лінії задається таким чином:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

якщо система має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y)\\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)\end{aligned}. \qquad (15)$$

Особлива точка має місце, коли кут дотичної невідомий, наприклад в СТ, тобто, коли $P(x, y) = 0$; $Q = (x, y) = 0$. Така точка, зрозуміло, задає **стаціонарний стан** системи.

Дослідження стійкості точки ($\bar{x}$, $\bar{y}$) базується на дослідженні характеру руху “збуреної” траєкторії:

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} + \xi\\ y &= \bar{y} + \eta\end{aligned} \qquad (16)$$

Підставивши збурені значення (16) в систему (15), і розклавши її в ряд Тейлора, маємо:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= a\xi + b\eta\\ \frac{d\eta}{dt} &= c\xi + d\eta\end{aligned}, \qquad (17)$$

де $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матриця похідних функцій правої частини по двом змінним x, y в стаціонарній точці. Система (17) називається системою першого наближення. Вона лінійна, а тому допускає аналітичний розв’язок. Загальний розв’язок шукають у вигляді:

$$\xi = Ae^{\lambda t};\ \eta = Be^{\lambda t}.$$

Підставляючи в систему, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\lambda A = aA + bB$$

$$\lambda B = cA + dB$$

Ця система має ненульові розв’язки, якщо $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Розкрив визначник, маємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - (a + d)\,\lambda + (ad - bc) = 0. \qquad (18)$$

Розв’язки рівняння (17) (якщо корені рівняння (18) різні) мають вигляд:

$$\xi = C_{11}e^{\lambda_1 t} + C_{12}e^{\lambda_2 t}$$

$$\eta = C_{21}e^{\lambda_1 t} + C_{22}e^{\lambda_2 t}$$

Тоді зрозуміло, потрібно розділити наступні випадки:

1) корені дійсні і від'ємні; така СТ називається стійкий вузол;
2) корені дійсні і додатні — нестійкий вузол;
3) корені дійсні і різних знаків — сідло (нестійка СТ);
4) корені комплексні з від'ємними дійсними частинами — стійкий фокус (затухаючи коливання змінних);
5) корені комплексні з додатними дійсними частинами — нестійкий фокус (коливання навколо СТ зі зростаючими амплітудами);
6) корені без дійсних частин — центр (нестійка точка незатухаючих коливань).

Наприклад, для системи "хижак-жертва" (5) маємо такий якісний аналіз:

1) знайдемо СТ, розв'язавши систему нелінійних рівнянь:

$$a_1 x - b_1 xy = 0$$

$$a_2 xy - a_2 y = 0$$

Маємо два розв'язки:

- тривіальний $\overline{x} = 0,\ \overline{y} = 0$
- нетривіальний $\overline{x} = \dfrac{a_2}{b_2};\ \overline{y} = \dfrac{a_1}{b_1}$.

2) Матриця похідних має вигляд $A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1\overline{y} & -b_1\overline{x} \\ b_2\overline{y} & b_2\overline{x} - a_2 \end{pmatrix}$. В тривіальній точці це $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}$, в нетривіальній $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{b_1 a_2}{b_2} \\ \dfrac{b_2 a_1}{b_1} & 0 \end{pmatrix}$.

Рівняння (18) для тривіального розв'язку виглядає таким чином: $(\lambda - a_1)(\lambda + a_2) = 0$,

Має корені різних знаків: $\lambda_1 = a_1 > 0$; $\lambda_2 = -a_2 < 0$. А отже, для системи (5) точка (0,0) є нестійка СТ типу сідло.

Рівняння (18) для нетривіального розв'язку має вигляд:

$$\lambda^2 + a_1 a_2.$$

Його розв'язки є уявні і не мають дійсних частин: $\lambda_1 = \sqrt{a_1 a_2} i$; $\lambda_2 = -\sqrt{a_1 a_2} i$. Отже, це нестійка СТ типу центр.

Важливою рисою динаміки систем є їх властивість переключатися з одного режиму функціонування в інший, що відповідає декільком стійким СТ. Області впливу кожної СТ розділяються на фазовій площині сепаратрисами, які зазвичай проходять крізь нестійку ОТ типу сідло. Система, в якій є два чи більше стійких стаціонарних станів, між якими можливі переходи, називається **тригерною**. Те, в яку стаціонарну стійку точку перейде траєкторія системи залежить від початкових умов або від збурень траєкторії руху. Малі збурення ведуть до затухання, але якщо збурити змінні достатньо сильно, система переключається.

Приклад

Розглянемо модель Д. С. Чернавського, яка має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_0 \frac{S}{k_s + S} x - bx^2 - cxy \\ \frac{dy}{dt} &= a_0 \frac{S}{k_s + S} x - by^2 - cxy \end{aligned} , \qquad (19)$$

де x, y — концентрації об'єктів двох різних типів, S — концентрація субстрата ("їжі" для існування цих об'єктів). Це тригерна система, яка має дві стійкі стаціонарні точки, які розташовані на вісях фазової площині (x,y) і одну нестійку на сепаратрисі — лінії $y=x$, яка розділяє площину на дві області відповідно до числа стійких стаціонарних точок.

Наприклад, ще процес диференціації тканин. Клітина має декілька можливих стійких стаціонарних режимів роботи, але функціонує тільки в одному з них.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Провести системний аналіз проблеми підвищення прибутку продуктової фірми на основі інформації про її структуру та технологічний процес виготовлення та реалізації продукції. Основними змінними та параметрами моделі є:
   - кількість готової продукції на складі;
   - попит на продукцію;

- кількість сировини;
- технологічні матриці;
- кількість продаж продукції;
- ціна реалізації продукції та собівартість сировини;
- параметри виробничої функції технологічного процесу виробництва.

2. Побудувати схему системи управління температурою в приміщенні за допомогою кондиціонеру. Бажану температуру людина встановлює за допомогою регулятора на самому кондиціонері. Останній за допомогою датчика відслідковує реальну температуру приміщенні і задає бажану.
3. Побудувати математичну модель динаміки капіталу продуктової фірми — економічного продуцента.
4. Розв'язати чисельно модель "хижак-жертва" (5) при певних значеннях коефіцієнтів в середовищі Excel
   1. Якісно дослідити модель "хижак-жертва" (5) та дослідити траєкторії змінних навколо стаціонарних точок.
   2. Якісно дослідити модифікацію моделі Лотки-Вольтерри:

$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 - b_{12}y - b_{11}x)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-a_2 + b_{21}x - b_{22}y)$$

   3. Якісно дослідити систему (19).

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Самостійна робота полягає у побудові та дослідженні математичної моделі процесів в економічній, соціальній чи екологічній системі.

За результатами самостійної роботи студент складає і захищає звіт, в якому розкривається:

1. Постановка задачі моделювання обраного процесу;
2. Методи моделювання та дослідження реального процесу на основі його математичної моделі;
3. Опис математичної модель реального процесу, що досліджується;

4. Опис програмного продукту для чисельного дослідження моделі;
5. Основні результати, які отримані в ході розв'язування поставленої задачі дослідження;
6. Основні висновки;
7. Список використаної літератури.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Модель динаміки чисельності популяції

Екосистема — сукупність популяцій автотрофних і гетеротрофних організмів, пов'язаних між собою трофічними зв'язками, спільною територією чи акваторією.

Екосистема є відкритою системою, вона має здатність до саморегуляції і може існувати тривалий час. Організми в межах екосистеми поєднанні спільними ресурсами.

Популяцією є сукупність особин одного виду організмів, які мають спільний генофонд і займають спільну територію. Також це є форма існування виду, тому, популяція — важливе поняття в екології.

На відміну від популяції існують інші об'єднання біологічних організмів. Наприклад, **зграя** — тимчасове об'єднання тварин, які виявляють біологічно корисну організованість дій (для захисту, їжі, міграції), найчастіше у риб, птахів, рідше у ссавців; **стадо** — тривале або постійне об'єднання тварин, в якому здійснюються всі основні функції життя виду; **колонія** — групове поселення осілих тварин.

Кількісні ознаки (характеристики) популяції:

1) чисельність;
2) динаміка чисельності;
3) процеси динамічного запізнення зв'язного з віковим складом;
4) співвідношення статей;
5) віковий склад (наприклад по групам — матриця Леслі);
6) популяція складається з груп різних за визначеними параметрами народжуваності (продуктивності, генотип);
7) територіальна структура і щільність заселення.

Популяції можна умовно поділити на 3 види:

- популяції клітин;
- популяції тварин чи рослин;
- популяції людей.

Нехай, чисельність популяції описується функцією $x(\tau, t)$, яка визначає кількість (чи концентрацію на одиницю площі) осіб популяції в час t віку $[\tau, \tau+\Delta\tau]$ і є найчастіше, неперервною функцією, тому що "в розглянутих ситуаціях число індивідів настільки велике, що відмова від цілочисельності не призводить до помітної помилки" (Р. А. Полуектов, 1974).

Інтегральна характеристика

$$N(t) = \int_0^{r_{\max}} x(t,\tau)dr ,$$

де $r_{\max}$ — максимально можливий вік осіб популяції, може приймати своє граничне значення $r_{\max} = \infty$ при умові, що $\lim_{\tau\to\infty} x(\tau,t) = 0$, описує загальне число осіб в даній популяції.

Рівняння динаміки мають наступну структуру.

Розглянемо як аналог функції розподілу $X(\tau, t)$ — число особин в популяції віком не старше τ. Тоді, густина розподілу за віком: $x(\tau, t) = \frac{d}{d\tau} X(\tau, t)$ — як середнє число особин віку τ.

Тоді, число особин віку від τ_1 до τ_2 можна знайти за формулою:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} x(t,\tau)d\tau$$

Модель росту, міграції:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} = -d(\tau,t)x + m(\tau,t)$$

$$x(0,t) = \int_0^{\infty} b(\tau,t)x(\tau,t)d\tau \quad ,$$

$$x(\tau,0) = \varphi(\tau)$$

де b, d — густини народження та смертності.

Види функцій, які входять у модель:

1) Умови стаціонарного середовища $\begin{matrix} b(\tau,t) = b(\tau) \\ d(\tau,t) = d(\tau) \end{matrix}$. Тоді

$$\frac{dN}{dt} = \int_0^{\infty} (b(\tau) - d(\tau))x(\tau,t)d\tau = [\int_0^{\infty} (b(\tau) - d(\tau))\, p(\tau,t)d\tau]N$$

2) Вплив лімітуючих факторов середовища (наприклад, обмеженість їжі): $d(\tau,t) = d(\tau) + \int\limits_0^{\infty} z(\tau,t)x(\tau,t)dt$,

де z — інтенсивність внутрішньопопуляціонних взаємовпливів. Якщо всі параметри — константи, тоді маємо логістичне рівняння:

$$\frac{dN}{dt} = (b-d)N - zN^2$$

Розв'язок: $N(t) = N_0 \dfrac{1}{e^{-et} + N_0 \dfrac{z}{e}(1-e^{-et})}$, де $e = b - d$.

$m(\tau, t)$ — інтенсивінсть потоку міграції.

При >0 приплив в екосистему особин.

При <0 відплив.

Може бути параметром керування в задачах оптимального керування.

Дана модель фон Форестера описує динаміку зміни функції $x(\tau, t)d\tau$, тобто кількості осіб, які мають в час t вік $[\tau, \tau+d\tau]$.

Завдання 2. Модель динаміки фірми в умовах продуктової інновації

Розглянемо модель фінансової діяльності інноваційного підприємства [26]. Дана модель описує динаміку грошових обігових коштів ($M(t)$) під час випуску продукції ($P(t)$) і складається з двох рівнянь:

1) рівняння балансу грошового потоку фірми

$$\frac{dM}{dt} = pW - \frac{M}{\tau_1} - \frac{M_{ex}}{\tau_c} - K - \frac{P}{\tau_s} \qquad (1)$$
$$M(0) = M_0 + M_{ex}$$

де W — швидкість реалізації продукту, p — ціна за одиницю продукції, $\frac{M}{\tau_1}$ — виробничі витрати. τ_1 — час обороту капіталу на виробництві, M_0 — власні кошти фірми в час початку розробки інновації, M_{ex} — обсяг зовнішніх запозичень в цей же час. Відповідно, член $\frac{M_{ex}}{\tau_{cr}}$ відображає виплати по кредиту з $\frac{1}{\tau_c}$ кредитною ставкою, K — швидкість постійних витрат фірми (вони переслідують дві мети — розширення виробництва уже виробленого продукту і розробку нових ідей (включаючи НДР, НДДКР). Сюди також входять витрати на підтримку інфраструктури (витрати на оренду приміщень і інші постійні витрати)). Член $\frac{P}{\tau_s}$ відображує витрати на збереження готового продукту на складі у кількості $P(t)$, $P(t)$ — кількість готового товару на складі, $\frac{1}{\tau_s}$ — частка оборотних коштів, що витрачається на збереження одиниці готової продукції за одиницю часу. Як правило, ця частка невелика $\tau_s >> \tau_1$

2) рівняння складського балансу

$$\begin{aligned} &\frac{dP}{dt} = k\frac{M}{\tau_1} - W \\ &P(0) = P_0 \geq 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

де $k = \frac{1}{p_{in}}$, p_{in} — собівартість виготовлення продукції.

Функція швидкості реалізації продукції має такий вигляд:

$$W = Q_m \frac{P}{P_c + |P|},$$

де Q_m — максимально можливий попит в регіоні на заданий продукт в одиницю часу, P_c — константа, яка визначає “ємність” ринку продукції, тобто, ту кількість продукції, яка потрібна для насичення половини ринку.

Головна властивість запропонованої моделі — її **нелінійність**, тому їй притаманні такі властивості нелінійних моделей, як існування декількох **стаціонарних точок**, наявність біфуркацій при зміні деяких параметрів Тому дана модель описує різні сценарії розвитку підприємства. Одним з них є “приховане” банкрутство — наявність у фазовій площині моделі області, де $P(t)<0$. Тривалість **життєвого періоду інновації** в моделі (1)–(2) $t\in[0, T]$ розкладається на два етапи, на межі яких $t = t_1$ змінні стану зазнають стрибків:

1) період роботи над ідеєю інновації, розробки та впровадження інновації $t\in[0, t_1]$; в цей час фірма виробляє та реалізує деякий продукт P_1;

2) період виробництва та реалізації нової продукції P_2 $t \in [t_1, T]$.

Інновація, яка описується моделлю (1)–(2), може бути двох видів:

1) продуктова інновація, тобто якісна зміна продукту P_1 на продукт P_2 зі зміною наступних параметрів:
   - ціни p,
   - потенційного попиту Q_m, P_c.
2) технологічна інновація, тобто, зміна технології виготовлення продукції зі зміною параметрів:
   - собівартості виготовлення продукції p_{in};
   - собівартість зберігання продукції $\dfrac{1}{\tau_s}$.

Завдання 3. Модифікована модель хижак-жертва з врахуванням екологічних факторів

Розглянемо одну з найпростіших двовимірних систем — модель "хижак-жертва".

Спочатку розглянемо модель А. Д. Лоткі (1926 р.). Це модель хімічної реакції з наступною схемою перетворення речовин:

$$A \xrightarrow{k_0} X \xrightarrow{k_1} Y \xrightarrow{k_2} B .$$

Якщо ввести диференційовані функції концентрацій цих речовин — відповідно $A(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $b(t)$, — тоді система рівнянь моделі матиме такий вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = k_0 Ax - k_1 xy$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y$$

$$\frac{db}{dt} = k_2 y$$

Далі розглянемо екологічну модель запропоновану В. Вольтерри у 1931 р. — модель "хижак-жертва":

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x - b_1 xy$$

$$\frac{dy}{dt} = b_2 xy - a_2 y$$

де $x(t)$, $y(t)$ — змінні стану системи, відповідно, кількість (концентрація на одиницю площі) жертв і хижаків.

Можна побачити схожі риси в цих двох моделях. Тому ця система рівнянь набула назви модель Лотки-Вольтерри.

Області дослідження цієї моделі: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Модифікація моделі Лотки-Вольтерри може бути подана таким чином:

$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 - b_{12}y - b_{11}x)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-a_2 + b_{21}x - b_{22}y)$$

Слід якісно дослідити рух траєкторій у фазовому просторі цієї модифікованої моделі.

Завдання 4. Модель розповсюдження забруднень

Екологічна криза, пов'язана з діяльністю людини, стає все відчутнішою. Підсилення економічної та екологічної безпеки суспільства займає провідне місце серед основних приоритетних напрямів розв'язку держави на 2000–2004 роки. Для розв'язування цього питання окремим класом слід оцінити забруднення повітря промисловими підприємствами. Основні роботи в напрямі математичного моделювання процесів переносу екозабруднень належать М. Є. Берлянду, Г. І. Марчуку [17], Ю. Г. Стояну та ін.

У загальному вигляді задача прогнозування забруднень повітря постає таким чином. Розглянемо область, де може поширюватися один з відомих видів забруднення. Область може бути неоднорідною, складатися з певних частин, що впливають на забруднення. Деякі частини області можуть виступати як джерела забруднення чи поглиначі забруднення. Також при моделюванні розповсюдження забруднення, можна враховувати силу та напрямок вітру, течії наземних чи підземних вод.

Розглянемо область (регіон), який розвитий на $n \in N$ секторів $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$, $i = \overline{1,n}$, куди може поширюватися забруднення, що має джерел викиду. Область взагалі, може бути неоднорідною, тобто, складатися з секторів, які мають неоднакові характеристики, які впливають на стан та швидкість розповсюдження забруднення. Для спрощення моделювання, розглянемо двовимірну область з координатами $0 \le x \le X$; $0 \le y \le Y$. Тобто, забруднення може розповсюджуватися в двох напрямках від своїх джерел.

Введемо основну змінну в моделі — подвійно неперервно-диференційовану функцію від своїх аргументів $P(x, y, z)$, яка визначає концентрацію забруднення в точці області (x, y) в час $t \in [0, T]$.

Задача полягає в тому, щоб визначити динаміку цієї функції протягом часу дослідження $t \in [0, T]$ за такої моделі:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = v_x(t)\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + v_y(t)\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - k(x, y, t)P + Q(x, y, t), \qquad (1)$$

де $Q(x, y, z)$ — функція інтенсивності джерела забруднення в точці (x, y) в час t, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $k(x, y, t)$ — параметри моделі, відповідно, функції розподілу забруднення в напрямках (x, y) та розщеплення забруднення в час t. В найпростішому варіанті, їх можна вважати константами.

Вважається, що досліднику відомі:

1) початковий стан області для будь-яких $(x; y)$:
   - варіант а. $P(x; y; 0) = 0$;
   - варіант б. $P(x; y; 0) = F(x; y)$;
2) кількість та місця знаходження, потужність джерел забруднення;
3) кількість та місцезнаходження систем, що поглинають забруднення;
4) сила та напрямок вітру в будь-який момент часу;
5) коефіцієнт саморозпаду забруднення.

Крім того, на межах області забруднення не рухається, тобто $\frac{\partial P(x, y, t)}{\partial t} = 0$ при граничних (x, y).

Як частковий випадок, можна розглядати відсутність забруднень в точках області на момент початку викидів:

$$p(x, y, 0) = 0. \qquad (2)$$

Залежно від значення функції $Q(x, y, t)$ в точці (x, y) буде:

A) джерело, якщо $Q(x, y, t) > 0$;
B) поглинач $Q(x, y, t) < 0$;
C) нейтральна точка $Q(x, y, t) = 0$.

Скористаємося методом Ейлера для приведення моделі (1) до різницевої форми. Відомо, що:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \lim_{h_t \to 0} \frac{p(x, y, t + h_t) - p(x, y, t)}{h_t}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{p(x + h, y, t) - p(x, y, t)}{h} \quad . \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{p(x + h, y, t) - 2p(x, y) + p(x - h, y, t)}{h^2}$$

де h_t, h — кроки розбиття відповідно часу та по напрямках x і y.

Можна апроксимувати похідні у формулі (1), помінявши їх на значення, які стоять під лімітом відносних приростів відповідних функцій (3). Тоді ця апроксимація буде мати похибку тим меншу, чим менше буде значення кроків h_t та h. Так ми розіб'ємо всі похідні функції $p(x, y, t)$ по різницевій схемі і отримаємо таке різнецеве рівняння:

$$p(x, y, k+1) = p(x, y, k) + h_t[-u_x \frac{p(x + h, y, k) - p(x, y, k)}{h} -$$
$$u_y \frac{p(x, y + h, k) - p(x, y, k)}{h} + V_x \frac{p(x + h, y, k) - 2p(x, y, k)}{h^2} + \qquad (4)$$
$$V_x \frac{p(x - h, y, k)}{h^2} + V_y \frac{p(x_x, y + h, k) - 2p(x, y, k) + p(x, y - h, k)}{h^2} +$$
$$Q(x, y, k) - k_1 P(x, y, k)]$$

У різнецевій формулі (4) можна врахувати силу і напрямок вітру, враховуючи, що змінні V_x і V_y відповідають за силу розповсюдження забруднення по напрямках x чи y. Напрямок вітру будуть задавати два числа на кожну вісь: A_1 для вісі x і A_2 — для вісі y. Так, припустивши, що $u_x = u_y = 0$, запишемо наступну формулу:

$$p(x, y, k+1) = p(x, y, k) + h_t(V_x \frac{A_1 p(x + h, y, k) - 2p(x, y, k)}{h} +$$
$$+ \frac{(2 - A_1)p(x - h, y, k)}{h} + V_y \frac{A_2 p(x, y + h, k) - 2p(x, y, k)}{h} +$$
$$+ \frac{(2 - A_2)p(x, y - h, k)}{h} + Q(x, y, k) - k_1 P(x, y, k))$$

з умовою:

$$0 \le A_i \le 2.$$

Тоді, якщо A_1=1, то вітру у напрямку вісі x немає. Забруднення ровсповсюджується рівномірно. Так само для вісі y.

Приклад

Нехай область розповсюдження забруднення складається з 10 комірок по вісі x і 10 комірок по вісі y. Початковий стан описує незабруднену систему, тобто:

$$p(x_i, y_j, 0) = p_{ij}(0) = 0.$$

Припускаємо, що вітер настільки слабкий, що його можна не враховувати, отже $A_1 = A_2 = 1$.

Джерело забруднення існує тільки в одній точці (5,6) і має таку інтенсивність:

$$Q(x_i, y_j, t) = Q_{ij}(t) = \begin{cases} 0,\ 1;\ i = 5, j = 6 \\ 0; \text{інакше} \end{cases}$$

Перетворення забруднення не відбувається: k_1=0, а швидкість розповсюдження однакова в обох напрямках: $V_x = V_y = 0{,}05$. Кроки по області і часу однакові: $h_t = t = 1$.

Таким чином, різницеве рівняння набуде вигляду:

$$\begin{aligned} p_{ij}(k+1) = p_{ij}(k) + 0{,}05(p_{i+1j}(t) + p_{i-1j}(t) + \\ p_{ij+1}(t)\, p_{ij-1}(t) - 4p_{ij}(t)) + Q_{ij}(t) \end{aligned} \qquad (5)$$

$$p_{ij}(0) = 0$$

Так, користуючись рівняннями (5), можна порахувати значення концентрації забруднення для всіх точок сітки (i, j) в будь-який момент часу t = 0, 1, 2, 3 і т.д.

Завдання 5. Моделювання впливу виробництва на навколишнє середовище

Визначимо **функцію корисності виробництва** з врахуванням навантаження на зовнішнє середовище таким чином:

$$u = u(c, p)$$
$$\frac{\partial u(c,p)}{\partial c} > 0; \frac{\partial u(c,p)}{\partial p} < 0; \frac{\partial^2 u(c,p)}{\partial c^2} < 0; \frac{\partial^2 u(c,p)}{\partial p^2} < 0 \qquad (1)$$

де c — об’єм споживання, p — об’єм забруднення виробництва.

Введемо граничну норму заміщення:

$$s = \frac{\partial u / \partial c}{\partial u / \partial p}$$

Тоді лінії рівня функції $s(c, p) = s_0$ мають вигляд гіпербол в фазовому просторі (c, p). Неявна функція $p(c, s_0)$ монотонна спадна відносно c, тобто

$$\frac{\partial p}{\partial c} = -\frac{\partial s / \partial c}{\partial s / \partial p} < 0$$

Приклад

Нехай функція корисності (1) має вигляд:

$$u(c, p) = Ac^a - Bp^b,\ 0 < a < 1,\ b > 1;\ A, B > 0, \tag{2}$$

Введемо функції споживання та забруднення через виробничу функцію таким чином:

$$\begin{aligned} &p = \varepsilon Y = \varepsilon F(K, L) \\ &c = aF(K, L), \end{aligned} \tag{3}$$

Частина відходів $p(t)$ асимілюється з середовищем з темпом $\gamma p(t)$. При зниженні забруднення на 1 витрачається r одиниць продукції. Отже, маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{dK(t)}{dt} = (1 - a - b)F(K, L) - \mu K(t) \\ &\frac{dp(t)}{dt} = (\varepsilon - rb)F(K, L) - \gamma p(t) \end{aligned}, \tag{4}$$

Для задачі оптимального керування введемо критерій оптимальності, як максимізацію загальної корисності:

$$w = \int_0^T u(c(t), p(t))e^{-\delta t}dt \to \max, \tag{5}$$

де $e^{-\delta t}$ — коефіцієнт дисконтування.

За допомогою методів дослідження динамічних систем можна побудувати траєкторії моделі і розв'язати задачу оптимізації.

Завдання 6. Модель втрати потужності сільського господарства в нестійких екологічних умовах

Застосування в останні роки методів математичного моделювання до вивчення складних процесів розвитку в біогеоценозах сприяло суттєвому поглибленню розуміння взаємодії екоформувань та постановці нових актуальних задач у дослідженні причинно-наслідкових зв'язків. Так, наприклад, при моделюванні росту культурних рослин в різних умовах довкілля, застосовуються функції росту [23, 35]. Але не всі вони враховують весь комплекс складних екологічних процесів.

Так, модель росту рослини (зокрема рослини хмелю) при впливі екологічних факторів можна записати таким чином:

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mu(R,W,t)w(t), \tag{1}$$

де $w(t)$ — кількісна міра маси рослини в грамах (наприклад, одного куща хмелю), $\mu(R, W, t)\ w(t)$ — функція швидкості росту, яка залежить від часу вегетаційного періоду t, міри фотосинтетичної сонячної радіації $R(t)$ у Дж, вологості грунту $W(t)$.

Інакше функцію росту структурної маси рослини можна записати таким чином:

$$w(t) = \sum_{s=1}^{S} A_s r_s(t)\,, \tag{2}$$

де $r_s(t)$ — кількість одиниць речовини s в рослині, A_s — вага одиниці елементу (наприклад, речовини).

Якщо ж розглядати не всі речовини, що входять у структуру рослини, а обмежитися тільки декількома необхідними, тоді слід знати, який процент загальної ваги рослини припадає на ці речовини. Наприклад, розглянемо динаміку двох речовин рослини — води (з кількісною мірою $r_1(t)$) і вуглеводів (зі структурною масою $r_2(t)$). Нехай їх загальна доля в масі рослини визначається значенням $\xi : 0 < \xi \leq 1$):

$$\xi w(t) = A_1 r_1(\mathrm{t}) + A_2 r_2(\mathrm{t}), \tag{3}$$

Якщо кількість речовин визначається кількістю молей речовин H_2O і CH_2O, тоді $A_1 = 18$; $r_2 = 30$.

Динаміку кількості кожної речовини можна подати таким рівнянням:

$$r_s(t) = r_s(0) + \sum_{p=1}^{P} r_s^p \int_0^t i_p(t)dt\,, \tag{4}$$

де $i_p(t)$ — інтенсивність процесу р перетворення речовин (гр./добу), r_s^p — динаміка зміни одиниці речовини s на одиницю інтенсивності процесу *p*. Якщо $r_s^p > 0$, речовина збільшується в процесі. Якщо $r_s^p < 0$, речовина втрачається в процесі.

Так, розглянемо чотири основні процеси розвитку рослини:

$i_1(t)$ — фотосинтез,

$i_2(t)$ — випаровування води,

$i_3(t)$ — поглинання води,

$i_4(t)$ — руйнація рослини.

Якщо інтенсивність процесів описати такою залежністю:

$$i_3(t) + (\frac{A_2}{A_1} - 1)i_1(t) - i_2(t) = a_1 R(t) W(t)(w^{\max} - w(t))$$

$$i_4(t) = a_2 w(t)$$

де a_1, a_2, a_3 — розрахункові коефіцієнти, тоді динаміка росту рослини описується наступною системою:

$$\begin{aligned} &\frac{dw(t)}{dt} = a_1 R(t) W(t) w(t)(w^{\max} - w(t)) - a_2 w(t) \\ &w(t) = \frac{1}{\xi}(A_1 r_1(t) + A_2 r_2(t)) \qquad , \\ &w(0) = \frac{1}{\xi}(A_1 r_1(0) + A_2 r_2(0)) \end{aligned} \tag{5}$$

Якщо припустити, що на 1 га ростуть 8000 кущів хмелю, тоді врожайність рослини можна записати такою залежністю:

$$u\left(ц/га\right) = \frac{8}{600} w(t^*), \tag{6}$$

де $w(t^*)$ — маса рослини (гр.) в момент збирання шишок хмелю.

Приклад

Розглянемо реалізацію моделі (5) при дискретизації моделі методом Ейлера з кроком часу 1 доба:

$$w(k+1) = w(k) + a_1 R(k) W(k) w(k)(w^{\max} - w(k)) - a_2 w(k)), \qquad (7)$$

Для спрощення реалізації приймемо, що умови середовища мають такі значення. Функція $R(t)$ визначає вплив освітленості на розвиток рослини і залежить від річного кута, що визначається рівнянням

$$y(k) = 2\pi \frac{k+42}{365},$$

і довжиною доби:

$$r_n(k) = 0{,}45 + 0{,}15 \sin(y(k)),$$

Сумарна кількість сонячної радіації, що припадає на добу, визначається такою залежністю:

$$R(k) = 4{,}98 + 4{,}11 \sin(y(k)).$$

Реалізуємо перерахунок моделі з такими значеннями параметрів:

$$a_1 = 5*10^{-5}$$

$$a_2 = 0{,}018$$

$$w^0 = 0{,}5 \text{ гр}$$

$$w^{\max} = 1250$$

Значення маси рослини на кожен день вегетаційного періоду легко отримати з різницевого рівняння моделі (7). Графік динаміки маси рослини хмелю представлений на рисунку 1. Середню урожайність рослини з таким ростом можна отримати з (7):

$$t^* = 90$$

$$u = \frac{8}{600} 816 = 10{,}08 \text{ ц/га}.$$

Відомо, що в певних критичних умовах рослинний організм стає неспроможним ефективно підтримувати свій розвиток через втрату відтворюючої сили. Наприклад, при ураженні рослини фітовірусами у розбалансованій екологічній ніші останні мають часто значно інтенсивнішу репродукцію, ніж в умовах стійкої екологічної рівноваги.

Дослідження механізмів вірусного впливу на життєдіяльність культурних рослин у різних умовах довкілля за допомогою використання сучасних методів математичного моделювання має важливе значення в нинішніх екологічно нестійких умовах.

Для аналізу впливу на показники розвитку рослин хмелю факторів зовнішнього середовища використовували двохфакторний дисперсійний аналіз. За фактори впливу брали міру враженості рослин вірусом ВСЛХ (Carlavirus) з чотирма градаціями (контроль, слабке, середнє та сильне) і тип грунтів з двома градаціями (кожну градацію представляли два райони Поліського регіону). Показниками розвитку рослин виступали урожайність, кількість гірких речовин та альфа-кислоти у відсотках до сухої речовини. Для кожного показника отримали результати факторного аналізу, де за фактор 1 виступала міра ураженості рослин, за фактор 2 — тип грунту.

Аналіз засвідчив, що на урожайність суттєво впливає лише міра ураженості рослин хмелю вірусом ВСЛХ, а вплив типу грунтів достовірно довести не вдалося. Тому для опису такої залежності ми отримали таке лінійне рівняння [9]:

$$u(v) = 16 - 11{,}5v, \tag{8}$$

де v —кількісна міра ураження рослин:

$$v = \begin{cases} 0 - \textit{контроль} \\ 0.33 - \textit{слабке\_ураження} \\ 0.66 - \textit{середнє\_ураження} \\ 1.0 - \textit{сильне\_ураження} \end{cases}, \tag{9}$$

$u(v)$ — урожайність рослин хмелю (ц/га).

На наявність гірких речовин суттєво впливає не лише міра вірусного інфікування, але і взаємодія цього фактору з типом грунтів. Отже, від другого фактору залежить, яким чином впливає вірусна інфекція на гіркі речовини. Іншими словами, зменшення відносної кількості гірких речовин від збільшення міри ураження суттєво залежить від типу грунту. Тому таку залежність ми описали двома рівностями для різних типів грунтів:

1) Для грунтів 1-го типу $g(v) = 16{,}78 - 6{,}11v$
2) Для грунтів 2-го типу $g(v) = 16{,}03 - 3{,}37v$,

де $g(v)$ — кількість гірких речовин у процентному відношені до сухої речовини залежно від міри ураженості рослин хмелю. Так, на рисунку

(2) наведені графіки падіння кількості гірких речовин при зростанні міри впливу ураженості.

Нехай для вирощування продукції хмелярства агрофірма витрачає агреговані 2 фактори виробництва: землю і природні ресурси.

Введемо виробничу функцію $q = F(x, y)$, де q — міра продукції, $x = (x_1, x_2)$ — вектор витрат виробничих факторів, v — міра вірусного впливу (9).

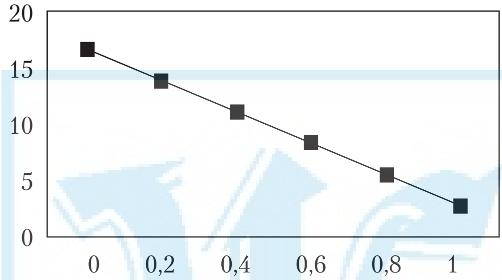

Рис. 1. Зміна урожайності рослин хмелю з ростом показника вірусної інфекції

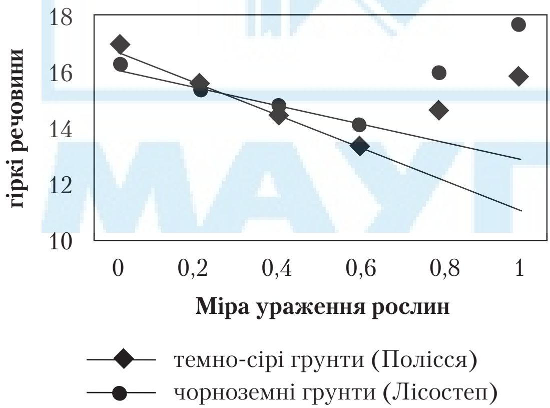

Рис. 2. Графіки зміни кількості гірких речовин за зростання міри ураженості

Виробнича функція має задовольняти аксіоми виробничих функції. Візьмемо найпростішу лінійну залежність від фактора землі:

$$q = F(x,v) = \frac{u(v)g(v)}{100} x_1 \tag{10}$$

за умови обмеження на технологічні витрати з обробки виробничого фактора:

$$a_1 x_1 \le b,$$

де a_1 — витрати фактору на одиницю фактора, а b — максимальна можлива кількість витрат.

Тоді величина продукту q є не чимсь іншим, як якісною характеристикою валового продукту фірми.

Легко переконатися, що функція (10) відповідає аксіомам для виробничої функції, а її максимальне значення легко знайти:

$$q = F^{\max}(v) = \frac{u(v)g(v)}{100} \frac{b}{a_1} \tag{11}$$

Підставляючи в рівняння (11) залежності (8)–(10), переходимо до явної функції виробництва від міри ураженості рослин:

$$q = F^{\max}(v) = \frac{(268,48 - 290,73v - 70,265v^2)b}{100a_1} \tag{12}$$

Так, наприклад, якщо b = 10000 грн, a_1 = 22,5 *грн/га*, тоді

$F^{\max}(0) = 1193,24$

$F^{\max}(1) = 213,4$

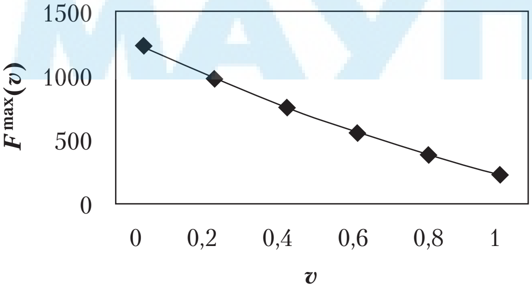

Рис. 3. Залежність $F^{\max}(v)$ від міри ураженості

Еластичність виробництва за фактором "земля" обчислюється за такою формулою:

$$e(x_1) = \frac{x_1}{F(x,v)} \frac{\partial F(x,v)}{\partial x} = \frac{100}{u(v)g(v)} \frac{u(v)g(v)}{100} = 1. \qquad (13)$$

Еластичність свідчить, як зміниться функція виробництва залежно від зміни одиниці фактору — землі. Тобто, формула (13) закріплює другу аксіому виробничих функцій.

Таким чином, за допомогою виробничих функцій і моделей впливу фітовірусів на рослинний організм можна оцінювати вплив вірусної інфекції на виробничі показники агрофірми. Якщо, крім того, до моделей підключати фактори зовнішнього середовища, постає реальне і практичне завдання з оптимізації виробничого процесу в нестійких екологічних умовах.

Завдання 7. Модель динаміки цін на ринку житла

Це є зворотною задачею до прямої задачі моделювання. Тобто, слід знайти, наприклад, методом найменших квадратів, динаміку ціни на квартири $P(x, t)$, де $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ — кількісні характеристики квартири (наприклад, площа, поверх, близькість до метро тощо), $t \in [0, T]$ — час, який має одиницю — місяць.

Даними, на яких слід базувати знаходження параметрів моделі:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = (Ax+b)P(x,t)$$

$$P(x,0) = f(x)$$

або її різницевого аналога:

$$P(x, t+1) = P(x, t) + (Ax + b)P(x, b)$$

$$P(x, 0) = f(x)$$

знаходяться за допомогою статистики (наприклад, даних, які запропоновані на Інтернет-сторінці компанії "Благовест" [27]).

Завдання 8. Моделювання стійкого розвитку з врахуванням інновацій

Сутність сталого розвитку полягає в тому, що природні джерела повинні бути використані такими способами, які забезпечували б їхню придатність для майбутніх поколінь. Сталий розвиток джерел потребує, щоб ми не порушували гідрологічний цикл, споживаючи водні ресурси, які при такому користуванні не вичерпувалися б протягом тривалого часу.

Особливе значення має головний документ, прийнятий ЮНСЕТ "порядок денний на 21 століття" — всесвітній план дій з метою **сталого розвитку**, під котрим слід розуміти таку модель соціально-економічного поступу суспільства, коли життєві потреби людей будуть задовольнятися з врахуванням вправ майбутніх поколінь на життя в здоровому та невиснаженому природному середовищі.

Досягнення сталого розвитку не можливе без:

- справедливого використання ресурсів природи;
- боротьби з бідністю з однієї сторони і неприпустимими розкошами з іншої.

Ресурс — це екологічний фактор, який необхідний для метаболізму живої системи (суспільства). Після НТР основна увага полягає ресурсу — ЗНАННЯМ, ІННОВАЦІЯМ — більше навіть, ніж природним ресурсам.

Традиційний підхід до інновації був економічним. Отже, моделі інновацій полягали у модифікації виробничої функції з врахуванням технологічного процесу (коефіцієнтів її). Але інновація пов'язана не тільки з виробничими процесами.

Тому краще під **інновацією** розуміти цілеспрямовані зміни параметрів початкової (базової) моделі системи, які раніше розглядалися як константи [6].

Нехай, $a = (a_1, a_2, ..., a_N)$ — вектор параметрів моделі. $I = \cup I_j$ — підмножини індексів параметрів. Для всіх підмножин вводиться число змін:

$$\theta_j = \Big(\sum_{i \in I_j} \frac{\Delta a^i}{\left|a_0^i\right|}\Big)\frac{1}{m_j}$$

Це число називається інноваційним індексом.

$$a^i = a_0^i(1+\theta_j \alpha_{ij}).,\ \sum_{i \in I_j} \left|\alpha_{ij}\right| = 1$$

$|a_{ij}|$ — ваги інноваційного ефекту параметрів групи ("–" — витрати; "+" — фондовіддача). Вони можуть задаватися:

- рівномірно;
- випадково;
- на основі оптимізації.

Нововведення поділяються на:

1) "безкоштовні" інновації — процес дифузії параметрів;
2) нововведення, які пов'язані з інвестиціями;
3) цілеспрямовані інновації, які потребують розподіл коштів, зокрема на НДДКР.

Динаміку інноваційного індексу можна описати через рівняння:

$$\frac{d\theta}{dt} = -([d] + H_{inv} + H_{diff})(\theta - \overline{\theta(t)})$$

$$\theta(0) = 0$$

d — вектор активних інвестицій

$[d]$ — діагональна матриця з вектора.

$\overline{\theta}_j$ — середні значення, які відповідають світовому рівню.

H_{inv}, H_{diff} — матриці, які пов'язані з розширенням виробництва і дифузією інновацій.

Темпи інновацій обмежені потужностями підрозділами НДДКР, які можуть розширюватися за рахунок вкладень в їх основні фонди:

$$\frac{dk^d}{dt} = u^d - \delta^d k^d, 0 \le d \le I^d(k^d),$$

де k^d, $I^d(k^d, L^d)$, u^d, δ^d — основні фонди, потужності, інвестиції і темпи амортизації.

Критерій — максимум накопленого доходу!

Агрегована модель розвитку з врахуванням інновацій може бути представлена таким чином:

$$c = (1 - A)y - u - A^z z - A^d d$$

$$0 \le y \le I(k, L^y)$$

$$\frac{dk}{dt} = u - \delta k$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} + N(r - \bar{r}) - Cy + z, z \ge 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = d(\bar{\theta}(t) - \theta), \theta(0) = 0$$

y, z, d — випуск продукції, темп активного природовідновлювання, темп активних інновацій, c — кінцеве споживання, r — індекс стану довкілля, $\bar{r}$ — задана (опорна, прогнозна) функція.
A, A^z, A^d — коефіцієнти прямих витрат в виробничу сферу, природовідновлювання та інновації.
N, C — коефіцієнти самовідновлювання та впливу економіки на природне середовище.

Наприклад, $r = \beta r_1 + (1 - \beta)r_2$, $0 < \beta \le 1$
r_1 — поточні запаси розвіданих природних ресурсів у цінах продуктів у їх первинній переробці, у відношенні до максимального запасу до експлуатації.
r_2 — індекс якості природного середовища:

$$r_2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\bar{c}_i}\right)^{-1},$$

$c_i, \bar{c}_i$ — концентрація забруднюючих величин та їх ГДК.
$I(k, L)$ — клас увігнутих виробничих функцій.

Умови: $\frac{dk}{dt} \ge 0, \frac{dr}{dt} \ge 0, d \ge 0$.

Постановка задачі оптимального керування розглядає y, u, z, d як керуючі параметри. Критерій якості має такий вигляд:

$$J = \int_0^{t_f} (pc - s(r - \bar{r})^2)e^{-\rho t}dt \to \max,$$

де p, s, ρ — прогнозна ціна, коефіцієнт штрафу та коефіцієнт дисконту.

Вплив інновації, наприклад, можна представити таким чином:

$$A = A(r, \theta) = a(\theta)b(r)A_0$$

$$a(\theta) = 1 - a_1\theta,$$

$$c(\theta) = c_0(1 - a_2\theta)$$

$$b(r) = 1 - b_1(r - \bar{r}) + b_2(r - \bar{r})^2$$

A_0, C_0 — "незбурені" значення за відсутності інновацій та екологічних порушень.

Нехай, для простоти та наочності:

$$\bar{\theta} = const;\ \mathrm{L} - const;\ H = 0;\ \rho = 0;\ \rho = 1.$$

Тоді

$$J = \int_0^{t_f} (\kappa y - \delta k + A^z N(r - \bar{r}) - s(r - \bar{r})^2) dt - (k_f - k_0) - A^z (r_f - r_0)$$

$$+ A^d (\ln(\bar{\theta} - \theta_f) - \ln \bar{\theta}),$$

$$\kappa = 1 - A - A^z C$$

Задача розв'язується в два етапи:

1) Максимізація критерію при фіксованих $k(t_f) = k_f$, $r(t_f) = r_f$, $\theta(t_f) = \theta_f$.
2) Варіювання цих параметрів та знаходження остаточної відповіді.

Неважко побачити, що $k_f \geq k(t) \geq k_0$, $\theta_0 \leq \theta(t) \leq \theta_f$.

Отже, задача зводиться до максимізації підінтегральної функції.

Нехай, $k = 0$. Тобто, економіка рентабельна. Тоді, $\theta > 0$ і максимум досягається на верхній границі:

$$y = g(k, L) = g_1(k) \geq 0$$

Розв'язок задачі має вигляд:

$$k^*(t) = \begin{cases} k_1, if\_k_0 \leq k_1 \leq k_f \\ k_0, k_1 < k_0 \\ k_f, k_1 > k_f \end{cases},$$

де k_1 — розв'язок диференційного рівняння:

$$\frac{d}{dk} g_1(k) = \delta .$$

Максимум по r досягається в стаціонарній точці. Перехід від початкової точки в “оптимальну магістраль”, а потім в кінцеву, відбувається стрибками. Варіюючи по k, отримуємо $k_1 = k_f$. Крім того, $g_1(k) = qk^a$.

Завдання 9. Моделювання динаміки стану регіону

Багатоконтурна модель екологічного середовища в антропогенних (наприклад, міських) умовах може мати в собі такі змінні [8] — характеристика стану в момент часу $t \in [0, T]$, $T > 0$:

- кількість населення $N(t)$;

- міра благоустрою $B(t)$;
- сальдо міграції — потоків населення з регіону і в регіон $M(t)$;
- санітарні можливості — потужності міропріємств з очищення міста $S(t)$;
- кількість захворювань чи хворих мешканців регіону $D(t)$;
- число мікроорганізмів та вірусів на одиницю площі — $V(t)$;
- кількість відходів — $M(t)$.

Побудувати структурну схему (або сигнальний граф) зв'язків у системі. Які змінні можуть виступати як керуючі і яка ціль стоїть в такій системі управління? Які рівняння можуть бути базою моделі такої системи?

Завдання 10. Моделювання хімічних трансформацій і ферментативних процесів

Фермент — органічна сполука (зазвичай, білок), яка прискорює чи викликає шляхом каталітичної дії зміну субстрату, до якого вона специфічна. Слово "Кінетика" пішло від грецького слова "кінетикос" — те, що рухається. Розглянемо **теорію Міхаеліса-Ментен** з псевдостаціонарними станами [16].

Схема ферментативної реакції (Уебб, Уолтер, В. А. Яковлев...) виглядає таким чином:

$$S+E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} SE \overset{k_2}{\rightarrow} P+E$$

k_2 — число оборота фермента.

Закон діючих мас проголошує, що швидкість реакції пропорційна активним концентраціям реагентів.

Отже, можна записати таку систему:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = -k_1 se + k_{-1} c \\ \dfrac{de}{dt} = -k_1 se + (k_{-1} + k_2)c \\ \dfrac{dc}{dt} = k_1 se - (k_{-1} + k_2)c \\ \dfrac{dp}{dt} = k_2 c \end{cases}$$

$$s(0) = s_0 > 0; e(0) = e_0 > 0; c(0) = p(0) = 0$$

Як можна побачити з системи

$$\frac{d}{dt}(e+c)=0 \Rightarrow e(t)+c(t)=const=e_0$$

Якщо виключити з системи (4.2) $e(t)$, ми отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt}=-k_1se_0+(k_1s+k_{-1})c \\ \dfrac{dc}{dt}=k_1se_0-(k_1s+k_{-1}+k_2)c \\ p(t)=k_2\int\limits_0^t c(t)dt \end{cases}$$

$$s(0)=s_0>0; c(0)=0$$

Швидкість реакції (створення продукту) виражається через

$$\mu=\frac{\mu_0S}{K_m+S}=\frac{dP}{dt}=-\frac{dS}{dt}$$

Це рівняння має назву рівняння Міхаєліса. $\mu_0 = k_2e_0$ — максимально можлива швидкість.

Тобто ферментативні процеси — це процеси з насиченням.

З рівняння видно, що при $K_m = S$ швидкість реакції дорівнює $\frac{v}{2}$. Тобто константа Міхаєліса по фізичному змісту і числовому значенню рівна концентрації субстрата, при якій стаціонарна швидкість реакції досягає половини свого максимального значення, чи, іншими словами, коли половина молекул фермента знаходиться в стані зв'язку з субстратом.

В живих системах константи Міхаєліса і концентрації реагентів одного порядку. Величини K_m дуже варіюють, від 1 до 10^{-8} М. Наприклад, для лактатдегідрогенази піровиноградної кислоти $3.5*10^{-5}$ М, для інвертази сахарози $2,8*10^{-2}$ М, для мальтази-мальтози $2,1*10^{-1}$ М.

Завдання 11. Моделі росту біологічних об'єктів (на прикладі грибів печериць) та інфекційних процесів (вірусної інфекції)

Для опису процесу гальмування росту ваги печериць [3], які були інфіковані комплексом вірусів, вводимо наступні позначення:

- час, який вимірюється в годинах $t \geq 0$;
- вага плодових тіл плантації печериць на 1 м^2 — функція $W(t)$, яка вимірюється в кг/м^2;
- концентрація вірусу в тілі печериць — функція $V(t, t_{inf})$, де t_{inf} — час початку розповсюдження інфекції, яка вимірюється в відносних одиницях (на момент початку інфекції ($V(t, t) = 1$).

Система рівнянь має вигляд:

$$\frac{dw(t)}{dt} = (c_1 e^{-c_2 t} - c_3)w(t) - \frac{k_2 k_1 (1-a) w(t) v(t)}{1+(1-a)k_1 v(t)},$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{(ck_2(1-a)-1)k_1 w(t) v(t)}{1+(1-a)k_1 v(t)}$$

при початкових умовах: $w(0) = w^1$; $v(t_{inf}) = 1$, де $t_{inf} \geq 0$ — час проникнення вірусу в популяцію. Якісний зміст коефіцієнтів моделі наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

Зміст коефіцієнтів моделі

Коефіцієнт	**Якісний зміст в моделі**
1	2
c_1	Найбільший темп росту ваги плодових тіл, 1/год
c_2	Темп експоненційного гальмування росту плодових тіл протягом вегетаційного періоду
c_3	Темп зменшення швидкості росту плодових тіл, яке спричинене різними факторами
k_1	Темп утворення комплексу "вірус-організм" по мірі потрапляння вірусу
$0 \leq k_2 \leq 1$	Темп утворення нових вірусних часток з комплексу "вірус-організм"

Закінчення табл. 4

1	2
$k_3 = 1 - k_2$	Темп "оздоровлення" комплексу "вірус-організм" до безвірусного матеріалу
$1 - a$	Доля рослинного матеріалу, яка уражена вірусом (тобто утворила з вірусними частками комплекс "вірус-організм")
c	Темп росту числа вірусних часток з комплексу "вірус-організм"

Будемо вважати, що відсоток ураження плантації печериць залежить від часу початку ураження t_{inf}. Тому введемо три значення початку вірусної інфекції $\{t^1_{\inf}, t^2_{\inf}, t^3_{\inf}\}$, які "відповідають" за 25%, 50% і більше 50% ураження.

Коефіцієнти моделі, які наведені в таблиці 3, складають вектор коефіцієнтів $P = (c_1, c_2, c_3, k_1, k_2, k_3, a, c)$, значення яких відповідає конкретним умовам вирощування обраного виду грибів. Якщо необхідно імітувати процес росту рослин залежно від **екологічних умов** вирощування, деякі з коефіцієнтів вектора P можна описати як функції від параметрів середовища. Наприклад, темп росту ваги плодових тіл можна визначити як функцію від температури за формулою:

$$c_1(T) = c_1^0 (e^{-T_0 b} - e^{-bT}) ,$$

де $T \geq T_0$ — температура вирощування, c_1^0 темп росту при мінімальній температурі $T = T_0$, b — коефіцієнт прискорення швидкості росту при підвищенні температури (1/град).

Для знаходження значень коефіцієнтів моделі за наявності даних експериментальних досліджень, використовувався функціонал квадрату різниці між значеннями ваги плодових тіл (на період $t = 100$), які дає модель з даними, що наведені в таблиці 2: обчислюється сума квадратів різниць між даними досліджень (W_i^1, W_i^2, W_i^3 , таблиця 2) та виходом побудованої моделі $W_i(t = 100; P)$ при певних значеннях оцінюваних коефіцієнтів P:

$$R(p) = \sum_i [W_i^c - M_i(t = 100, P)]^2 \to \min ,$$

Критерій узгодженості базується на критеріальному виразі

$$W_i^c = \frac{\sum_{k=1}^{3} W_i^k}{3}$$

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{3} (W_i^c - W_i^k)^2}{2}},$$

$$K = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} \frac{|W_i(100,P) - W_i^c|}{S_i} < 1$$

де W_i^k — значення показника екперименту з таблиці 2 варіанта "і" (рядку таблиці 2) повторення k, W_i^c — середнє значення показника "варіанта і", S_i — середня квадратична розбіжність за даними варіанта "і", $W_i(100,\ P)$ — значення показника, яке дає модель при умовах варіанта "і" і значеннях вектору коефіцієнтів P. При $K < 1$ модель вважається адекватною і за її значення можна прийняти значення **випадкової величини**, рівномірно розподіленої на відрізку (інтервал узгодженості):

$$W_i \in [W_i(100,P) - W_i^d, W_i(100,P) + W_i^d]$$

$$W_i^d = S_i(1-K),$$

Числові значення змінних моделі визначалися за допомогою методу Рунге-Кутта числового розв'язування диференційних рівнянь [8, 41]. Мінімум функціоналу (3) шукався за допомогою методу випадкового пошуку [29].

Для даних таблиці 3 знайдені значення постійних коефіцієнтів моделі (табл. 5), які мінімізують функціонал (3). Критерій узгодженості має значення 0,028.

Таблиця 5

Значення коефіцієнтів моделі

Коефіцієнт	Значення	Коефіцієнт	Значення
1	2	3	4
c_1	0,11111	k_1	0,0355
c_2	0,0198	k_2	0,03046

Закінчення табл. 5

1	2	3	4
c_3	0,000176	$1 - a$	0,9276
c	130,37	t^1_{inf}	80,7
t^2_{inf}	61,2	t^3_{inf}	10,1

Побудувати графіки динаміки змінних моделі і проаналізувати їх.

Ріст числа вірусних частинок визначається змінною $v(t)$, яка визначає в скільки раз зросла концентрація вірусу порівняно з часом ураження $v(t_{inf}) = 1$.

Завдання 12. Моделювання розповсюдження паніки або інфекційних процесів

Розповсюдження епідеміологічного захворювання в найпростішому варіанті можна описати за допомогою лінійної моделі:

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1 - bx_1 + u_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = bx_1 - gx_2 + u_2(t)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = ax_1 + gx_2$$

або її нелінійного точнішого варіанта

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1 - bx_1x_2 + u_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = bx_1x_2 - gx_2 + u_2(t)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = ax_1 + gx_2$$

$x_1(t)$ визначає кількість людей, які можуть захворіти в час $t \in [0, T]$, маючи стосунки з вже хворими, кількість яких апроксимується функцією $x_2(t)$, $x_3(t)$ — кількість людей, що мають імунітет до захворювання через імунізацію щепленнями, або через одужання, $u_1(t)$,

$u_2(t)$ — відповідно швидкість народження (еміграції) нових людей, які можуть захворіти, та швидкість появи нових інфікованих.

Завдання: Чисельно дослідити модель та побудувати задачу оптимального керування процесом протікання епідемії.

Цікаво, що під епідемією тут може виступати і зародження і розповсюдження в суспільстві (натовпі) паніки. за такого варіанта подумати, що інтерпретують змінні та параметри моделі.

Завдання 13. Моделі протікання інфекційних хвороб та боротьби з ними

Моделювання динамік протікання хвороби інфекційного походження може бути представлена наступною моделлю М. В. Волькенштейна та інших [4, 16, 25], яка розглядає імунітет як систему в організмі, яка

1) продукує антитіла в організмі (АТ);
2) бореться з антигенами (АГ);
3) ліквідує клітини, що мутували.

Введемо 3 змінні: $x(t), g(t), h(t)$ — відповідно, концентрація В-лімфоцитів, АГ та АТ. В-клітини є проміжною ланкою в створенні організмом антитіл у відповідь на проникнення антигенів.

Вони підкоряються такій системі ДР:

$$\frac{dx}{dt} = J - \tau^{-1}x(t) - Px(t)g(t) + A_m x(t-t_m)g(t-t_m)\theta(t-t_m)$$

$$\frac{dg}{dt} = Kg(t) - Qh(t)g(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = A_e x(t-t_e)g(t-t_e)\theta(t-t_e) - Rh(t)g(t) - Sh(t)$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$

τ — середній час життя В-лімфоцитів.
A_n — темп формування клітин пам'яті.

Спрощення моделі:

Умова: $x(t) \approx x(0)$

$$\frac{dg}{dt} = Kg(t) - Qh(t)g(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = Ag(t - t_e)\theta(t - t_e) - Rh(t)g(t) - Sh(t)$$

$$A = A_e x(0)$$

Розглянемо тепер модель Г. І. Марчука. Динаміка концентрації антигенів (V) та антитіл (F) описується такими рівняннями:

$$\frac{dV}{dt} = (b - g_1 F - g_2 T - g_3 B)V$$

$$\frac{dF}{dt} = m_b C_b(t) - d_1 g_1 FV - a_F F$$

$C_B(t)$ — кількість плазмових В-клітин. Рівняння балансу виглядає таким чином:

$$\frac{dC_B(t)}{dt} = P_B(t - t_B) - a_{CB}(C_B - C_B^*)$$

$$P_B(t) = g_B VTLB,$$

де L — концентрація макрофагів, B — В-клітин, τ_B — час від зустрічі В-лимфоциту з АГ до утворення плазмених клітин. Макрофаг — носій великої кількості АГ, C_B^* — нормальна концентрація плазмових клітин у здоровому тілі.

Отже,

$$\frac{dT}{dt} = m_T C_T(t) - d_2 g_2 TV - a_T T$$

$$\frac{dC_T}{dt} = P_T(t - t_T) - a_{CT}(C_T - C_T^*)$$

$$P_T(t) = g_T VT$$

$$\frac{dB}{dt} = (g_6 - g_7)BV - g_8 VTLB - a_B(B - B^*)$$

$$\frac{dL}{dt} = g_9 TV + g_{10} BV - [g_{11} TL + g_{12} BV + g_{13} FV + g_{14}(C_B - C_B^*) + g_{15}(C_T - C_T^*)]L$$

Початкові умови:

$$V(0) = V^0; F(0) = F^0; C_B(0) = C_B^0; T(0) = T^0; C_T(0) = C_T^0;$$

$$L(0) = L^0; B(0) = B^0$$

Потрібно ще враховувати послаблення організму. Тому введемо ще такі позначення: M — кількісна характеристика органа (площа, маса...), M' — його здорова частина. Тоді: $m = 1 - \frac{M}{M'}$ — відносна характеристика ураження.

$$\frac{dm}{dt} = sV - a_m m .$$

Спрощена модель при $C_B^* = C_T^* = F = 0$. Деякі рівняння тоді можна проінтегрувати і отримати таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt} = (b - g_2 T)V \\
&\frac{dT}{dt} = m_T \xi(m) C_T - d_2 g_2 TV - a_T T \\
&\frac{dC_T}{dt} = P_T(t - t_1) - a_{CT}(C_T - C_T^*) \\
&\frac{dm}{dt} = sV - a_m m
\end{aligned} .$$

В моделі можуть бути розглянуті такі умови:

1) вірус повністю виведений з організму, якщо $V(t) \le 10^{-16}$;
2) є умова імунного бар'єру: $b < g_1 F^0 + g_2 T^0 + g_3 B^0$, де нульові концентрації — це концентрації в здоровому організмі.

Завдання 13. Моделювання економічного росту з врахуванням динаміки знань

Розглянемо **модель росту та використання знань** [11]. Вона представлена такими рівняннями:

$$\begin{aligned}
&\frac{dK}{dt} = Y - \frac{c_1 L_1 Y}{L} - \frac{c_2 L_2 Y}{L} - rK \\
&\frac{dG}{dt} = pY + H\left(\frac{c_1 Y}{L}; L_1; G\right) - mG
\end{aligned} ,$$

де $L = L_1 + L_2$ — трудові ресурси, відповідно, розумової та фізичної праці, $K(t)$, $G(t)$ — змінні "кількості" капіталу і знань, Y — швидкість надходження капіталу від виробництва, яке визначається виробничою функцією Кобба-Дугласа:

$$Y = F(G, L_2, K) = A(G)L_2^a K^b,$$
$$A(G) = G^g$$

за умови, що $a + b + g = 1$, $a, b, g \geq 0$, pY — ефект навчання на робочому місці, m — темп знецінення знань, H — функція швидкості виробництва знань, яку можна представити за аналогією з виробничою функцією у вигляді:

$$H = \frac{c_1 Y / L}{a_1 + c_1 Y / L} L_1^q G^d,$$

$0 < a_1 < \infty$ — мера ефекту розумової праці.

Дослідити якісним і чисельним методом динаміку змінних стану за різних значень параметрів моделі. Проаналізувати отриманий результат.

Завдання 14. Моделювання динаміки інтелектуальних і виробничих ресурсів країни

Дана модель взята з роботи [12]. Вводять такі змінні:

- функція об'єму виробництва матеріальних цінностей $X(t)$ (капіталу, продукту тощо) в системі (країни, регіону, фірми тощо),
- функція об'єму доступних ресурсів $R(t)$;
- функція об'єму інтелектуальних цінностей (знань, спеціалістів різних рівнів тощо) в системі $A(t)$ як міра знань, можливостей до змін, різноманіття структури системи, завдяки якому вона може "викинути виклик" росту невизначеності (тобто, ентропії) середовища.

Для опису динаміки основних змінних використовуються такі рівняння:

$$X(t+1) = (p_0 + p_1 A)XR/(R + gX)$$
$$R(t+1) = R - XR/(R + gX) + h + b(A(t - t_R)/A_C)^2,$$
$$A(t+1) = qA(t) + feXA/(A + eX)$$

де X — об'єми матеріальної діяльності ОУ (виробництво), R — об'єми доступних матеріальних ресурсів, A — об'єми інтелектуальних ресурсів як рівень розвитку науки і освіти. В моделі ці величини нормовані на чисельність населення. В якості одиниць вимірювання обиралися деякі умовні фінансові одиниці. Наприклад, $M = eX$, $e \approx 0{,}01$ витрати на інтелектуальну сферу, $p = p_0 + p_1 A$; $p_0 \approx 1{,}2$; $p_1 \approx 10$ — віддача одиниці вкладених ресурсів на збільшення об'ємів виробництва, $q < 1$, $q \approx 0{,}7$ — параметр розпаду інтелектуальних ресурсів (лаг віддачі, знецінення знань та час, необхідний на підготовку спеціаліста, приблизно, 5 років), $f = 2^{1/5} \approx 1{,}15$ швидкість росту при доброму фінансуванні, g — коефіцієнт, який відображає ціну ресурсів, b — параметр освоювання інновацій, $A_C \approx 0{,}03$ — деякий критичний рівень розвитку інтелектуальної сфери, $k = 2$ — параметр, який визначає стиль і ефективність наукової та освітянської роботи, t_R — час включення в роботу спеціаліста (3–5 років), $h \approx 0{,}5$ — швидкість відновлювання інтегрованого ресурсу.

Провести чисельні експерименти і визначити траєкторії динаміки змінних стану моделі за різних значень параметрів. Проаналізувати отриманий результат.

Завдання 15. Моделювання системи управління положенням космічної платформи

Модель руху платформи містить такі рівняння [8]:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + 2\frac{dp}{dt} + 4p = \theta$$

$$v_1 = r - p$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0{,}6 v_2, \quad v_2 = 7 v_1$$

Змінні в рівнянні мають такий сенс:

$r(t)$ — бажане положення платформи;

$p(t)$ — дійсне положення платформи;

$v_1(t)$ — напруга на вході підсилювача, а на виході — $v_2(t)$;

$\theta(t)$ — положення вала двигуна.

Потрібно відобразити сигнальний граф систем управління положенням космічної платформи. Знайти функцію, яка зв'язує вхід і вихід: передаточну функцію системи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Бакаев А. А., Костина Н. И., Яровицкий Н. В.* Имитационные модели в экономике. — К.: Наук. думка, 1978. — 304 с.
2. *Бейко І. В.* Розвиток методів розв'язуючих та асимптотично-розв'язуючих операторів для побудови оптимальних та асимптотично-оптимальних математичних моделей // Вісн. "Кібернетика". — 2002. — № 3. — С. 10–15.
3. *Бойко О. Л., Загородній Ю. В.* Математична модель динаміки росту маси плодових тіл печериць Agaricus Bisporus у нормі і при вірусній патології // Агроекол. журн. — № 1. — 2004. — С. 46–50.
4. *Белман Р.* Математические методы в медицине. — М.: Мир, 1987. — 200 с.
5. *Вітлінський В. В.* Моделювання економіки: Навч. посіб. — К.: КНЕУ, 2004.
6. *Гурман В. І.* Моделювання сталого розвитку з врахуванням інноваційних процесів // Економіка та математ. методи. — 2003. — Т. 39. — № 1. — С. 3–11.
7. *Глушков В. М.* Введение в АСУ. — К.: Техника, 1974. — 320 с.
8. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. — М.: Лаборатория базовых знаний "ЮНИМЕДИАСТАЛ", 2002. — 832 с.
9. *Загородній Ю. В., Бойко А. Л.* Математичні моделі в дослідженні вірусів рослин. — К.: ЕксОб, 2001. — 152 с.
10. *Загородній Ю. В., Кадієвський В. А.* Моделювання економіки. — К.: Вид-во ДАСОА, 2007. — 140 с.
11. *Занг В. Б.* Синергетична економіка. Час і зміни в нелінійній економічній теорії. — К., 1999.
12. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецький Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 288 с.
13. *Лаврик В. І.* Методи математичного моделювання в екології. — К.: Фітоцентр, 1998. — 132 с.
14. *Левченко В. Ф.* Модели в теории биологической эволюции. — СПб.: Наука, 1993. — 384 с.
15. *Томашевський В. М.* Моделювання систем. — К.: BHV, 2005. — 352 с.

16. *Ляшенко І. М.* Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. — К.: Вища шк., 1999. — 234 с.
17. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 400 с.
18. *Марчук Г. І.* Математические модели в исследовании окружающей среды. — М.: Наука, 1982.
19. *Моисеев Н. Н.* Модели экологии и эволюции. — М.: Знание, 1983. — 64 с.
20. *Петров А. А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1996.
21. *Полуэктов Р. А.* Динамические модели агроэкосистемы. — Л.: Гидрометеоиздат, 1991. — 312 с.
22. *Пономаренко О. І.* Основи математичної економіки. — К.: Техноцентр, 1995.
23. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Наука: Физмат, 1997. — 320 с.
24. *Франс Дж., Торнли Дж. Г. М.* Математические модели в сельском хозяйстве. — М.: Агропромиздат, 1987. — 400 с.
25. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование: исскуство и наука. — М.: Мир, 1978. — 418 с.
26. *Marzeniuk V. P., Nakonechny A. G.* System Analysis Methods of Medical and Biological Processes. — Ternopil: Ukrmedknyha, 2003. — 242 p.
27. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/006.pdf
28. http://www.blagovest.com.ua

Додаткова

29. *Рыжиков Ю. И.* Имитационное моделирование: теория и технологии. — СПб.: КОРОНА принт; М.: Альтекс-А, 2004. — 384 с., ил.
30. *Бейко И. В., Бублик Б. Н.. Зинько П. Н.* Алгоритмы и методы решения задач оптимизации. — К.: Выща шк., 1980. — 511 с.
31. *Болтнянский В. Г.* Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1973. — 446 с.
32. *Ивахненко А. Г.* Моделирование сложных систем: информационный подход. — К.: Вища шк., 1987. — 63 с.

33. *Ивахненко А. Г., Юрачковский Ю. П.* Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. — М.: Радио и связь, 1987. — 120 с.
34 *Моделювання* економічної динаміки: Навч. пос. / Г. В. Лавріньский, О. С. Пшенишнюк, С. В. Устинко, О. Д. Шарапов. — К.: Атака, 2006. — 276 с.
35. *Ульянченко О. В.* Дослідження операцій в економіці / Харків: Гриф, 2001. — С. 449–460.
36. *Гмурман В. Е.* Теория вероятности и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 1977. — 479 с.
37. *Загородній Ю. В., Войтенко В. В.* Моделі та методи екологічного моделювання: Навч. посіб. — Житомир: ЖІТІ, 2000. — 140 с.
38. *Бойко О. Л., Загородній Ю. В.* Математична модель динаміки росту маси плодових тіл печериць Agaricus Bisporus у нормі і при вірусній патології // Агроекол. журн. — 2004. — № 1.
39. *Математическое* моделирование / Р. Р. Мак-Лоун. — М.: Мир, 1979. — 277 с.
40. *Лотов А. В.* Введение в эконом.-математическое моделирование. — М.: Наука, 1984. — 392 с.
41. *Санто Б.* Инновация как средство экономического развития / Пер с венг. — М.: Прогресс. — 1996.
42. *Хикс Ч.* Основные принципы планирования экспериментов. — М.: Мир, 1967. — 406 с.
43. *Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф.* Основы теории управления. — К.: Вища шк., 1975. — 328 с.
44. *Свирежев Ю. М., Пасеков В. П.* Основы математической генетики. — М.: Наука, 1982. — 512 с.
45. *Акофф Р.* Планирование будущего корпорации. — М.: Прогресе, 1985.
46. *Лір В. Е.* Імітаційне моделювння фінансового забезпечення інноваційних проектів // Фінанси України. — 1997. — № 12. — С. 79–86.
47. *Кобринский П. Ф., Майминас Ф. З., Смирнов А. Д.* Экономическая кибернетика. — М.: Экономика, 1987.
48. *Бергстром А.* Построение и применение экономических моделей. — М.: Прогресс, 1970.
49. *Лысенко Ю. Г. и др.* Экономическая динамика. — Донецк: ДонГУ, 2000. — 176 с.

50. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
51. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 224 с.
52. *Хеди Э., Диллон Д.* Производственные функции в сельськом хозяйстве: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1965. — 600 с.
53. *Бродський Ю. Б., Желябовський В. М., Загородній Ю. В.* Інформатика і системологія. — Житомир: Вид-во ДАУ, 2002. — 188 с.

ЗМІСТ

Пояснювальна записка 3
Теоретичний мінімум: основи моделювання реальних процесів 4
Задачі для самоконтролю 16
Загальні рекомендації по виконанню самостійної роботи 17
Завдання для самостійної роботи 18
Список літератури 50

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленко*
Комп'ютерне верстання *Н. М. Музиченко*

Зам. № ВКЦ-3425

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП