МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

з дисципліни

“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”

(для бакалаврів, спеціалістів)

Київ 2008

Підготовлено професорами кафедри математики *О. Ю. Дюженковою* та *Р. К. Чорнеєм*

Затверджено на засіданні кафедри математики (протокол № 6 від 28.02.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Дюженкова О. Ю., Чорней Р. К. Методичні рекомендації для виконання контрольної роботи з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" (для бакалаврів, спеціалістів). — К.: МАУП, 2008. — 27 с.

Методичні рекомендації містять пояснювальну записку, варіанти завдань контрольної роботи з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика", вказівки до її виконання, основні теоретичні відомості з цієї дисципліни, зразки розв'язування завдань контрольної роботи, список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Контрольна робота складається з 7 завдань, зміст яких охоплює такі розділи дисципліни: "Випадкові події" (завдання 1, 2, 3), "Випадкові величини" (завдання 4, 5), "Математична статистика" (завдання 6, 7).

Кожне завдання містить 10 варіантів. Студент виконує той варіант, номер якого збігається з останньою цифрою номера його залікової книжки (цифра "0" відповідає варіанту 10).

Робота виконується в зошиті або на аркушах паперу формату А4 з полями для позначок викладача, при цьому обов'язково вказується номер варіанта. При виконанні кожного завдання потрібно вказати його номер та переписати умову. Розв'язання завдань повинні містити необхідні пояснення та обґрунтування, а також малюнки. У розрахунках потрібно дотримуватися правил наближених обчислень.

При недотриманні студентом зазначених вимог його контрольна робота не перевіряється і не зараховується.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1

1. В ящику лежить 20 м'ячів: 8 зелених і 12 синіх. З ящика навмання виймають один м'яч. Яка ймовірність того, що він:
   а) зелений; б) синій ?
2. У класі навчається 30 учнів: 12 хлопчиків і 18 дівчаток. З класу навмання вибирають учня. Яка ймовірність того, що цей учень:
   а) хлопчик; б) дівчинка ?
3. На поличці розміщено 10 чашок: 4 синіх та 6 червоних. З полички навмання дістають одну чашку. Яка ймовірність того, що ця чашка:
   а) синя; б) червона ?
4. У кошику лежить 25 яблук: 15 зелених і 10 жовтих. З кошика навмання виймають одне яблуко. Яка ймовірність того, що це яблуко:
   а) зелене; б) жовте ?
5. На столі лежить 40 зошитів: 24 в клітинку і 16 в лінійку. Навмання дістають один зошит. Яка ймовірність того, що цей зошит:
   а) в клітинку; б) в лінійку ?

6. Із карток розрізної азбуки складають слово “фінанси”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана:
а) буква “ф”; б) буква “в”; в) буква “н”.
7. Із карток розрізної азбуки складають слово “менеджмент”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана:
а) буква “е”; б) буква “ж”; в) буква “м”.
8. Із карток розрізної азбуки складають слово “економіка”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана:
а) буква “е”; б) буква “о”; в) буква “к”.
9. Із карток розрізної азбуки складають слово “корпорація”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана:
а) буква “ц”; б) буква “р”; в) буква “о”.
10. Із карток розрізної азбуки складають слово “ціноутворення”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана:
а) буква “н”; б) буква “у”; в) буква “о”.

Література [1, *розділ ;*
2, *розділ 1*]

Завдання 2

1. Два студента прийшли на іспит. Ймовірність успішно скласти іспит для першого становить 0,7, а для другого 0,6. Знайти ймовірність того, що хоча б один із них успішно складе іспит.
2. У ящику міститься 20 деталей, з яких 15 стандартні. Із ящика навмання дістають одну за одною дві деталі. Яка ймовірність того, що обидві вони стандартні?
3. Підприємець проводить переговори з двома постачальниками. Ймовірність укладання вигідної угоди з першим постачальником становить 0,5, а з другим 0,8. Знайти ймовірність того, що підприємець укладе угоду тільки з одним із постачальників.
4. У класі навчаються 25 учнів, серед яких 12 займаються спортом. Із класу навмання вибирають двох учнів. Яка ймовірність того, що обидва вони займаються спортом?
5. Два програмісти перевіряють новостворену програму, в якій є помилка. Ймовірність помітити помилку для першого дорівнює 0,6, а для другого 0,4. Визначити ймовірність того, що хоча б один із них знайде помилку.
6. У коробці перемішані кубики двох кольорів. Хлопчик навмання дістає один за одним два кубики. Яка ймовірність того, що вони одного кольору, якщо в коробці 10 синіх і 20 червоних кубиків?
7. Для уточнення діагнозу хворому роблять два аналізи. Ймовірність позитивного результату першого аналізу становить 0,5, а другого — 0,6. Знайти ймовірність того, що жоден з аналізів не дасть позитивного результату.
8. В студентській групі англійську мову вивчають 16 осіб, а решта німецьку. З групи навмання вибирають двох студентів. Знайти ймовірність того, що жоден із них не вивчає німецьку мову, якщо в групі навчається 20 студентів.
9. Зі складу реалізується дві партії товару. Ймовірність вчасної реалізації першої партії становить 0,8, а другої — 0,5. Яка ймовірність того, що вчасно буде реалізовано хоча б одну із партій?
10. У коробці “Асорті” 60 % цукерок містять молочну начинку, а решта шоколадну. Дитина дістає з коробки одну за одною дві цукерки. Яка ймовірність того, що вони містять різну начинку?

Література [1, *розділ 3*;
2, *розділ 2*]

Завдання 3

Для контролю якості виготовленої продукції відібрано n виробів. Ймовірність того, що взятий навмання виріб є якісним, дорівнює p. Знайти ймовірність того, що серед вибраних виробів буде не менше m_1 і не більше m_2 якісних, якщо:

1. $n = 6$, $p = 0{,}5$, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$;
2. $n = 8$, $p = 0{,}2$, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$;
3. $n = 5$, $p = 0{,}8$, $m_1 = 3$, $m_2 = 5$;
4. $n = 7$, $p = 0{,}4$, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$;
5. $n = 9$, $p = 0{,}8$, $m_1 = 7$, $m_2 = 9$;
6. $n = 4$, $p = 0{,}6$, $m_1 = 1$, $m_2 = 4$;
7. $n = 8$, $p = 0{,}7$, $m_1 = 5$, $m_2 = 7$;
8. $n = 6$, $p = 0{,}7$, $m_1 = 4$, $m_2 = 7$;
9. $n = 9$, $p = 0{,}3$, $m_1 = 3$, $m_2 = 5$;
10. $n = 7$, $p = 0{,}6$, $m_1 = 4$, $m_2 = 6$.

Література [1, *розділ 5*];
[2, *розділ 3*]

Завдання 4

Випадкову величину X, що визначає добовий попит на певний продукт, задано законом розподілу. Знайти параметр a та числові характеристики цієї дискретної випадкової величини:

а) математичне сподівання $M(X)$;

б) дисперсію $D(X)$;

в) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

1.

X	10	20	30	40	50
p	0,1	a	0,42	0,25	0,08

2.

X	100	200	300	400	500
p	0,12	0,25	0,28	a	0,17

3.

X	5	10	15	20	25
p	a	0,35	0,24	0,13	0,12

4.

X	3	10	17	21	24
p	0,2	0,15	a	0,3	0,1

5.

X	1	3	5	7	11
p	0,1	0,15	0,42	0,25	a

6.

X	13	17	19	23	29
p	0,5	0,03	0,25	0,12	a

7.

X	31	37	39	41	43
p	0,2	0,1	0,22	a	0,38

8.

X	47	53	59	61	67
p	0,3	a	0,2	0,15	0,25

9.

X	71	73	79	83	89
p	0,2	0,15	a	0,15	0,1

10.

X	91	97	101	103	107
p	0,1	0,15	0,4	a	0,14

Література [1, *розділи 6, 8*; 2, *розділ 4*]

Завдання 5

Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Записати щільність (диференціальну функцію) $f(x)$ розподілу, знайти параметр a та визначити ймовірність попадання величини X в проміжок $(\alpha; \beta)$, якщо:

1. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ax^2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ $\alpha=\frac{1}{3},\quad \beta=\frac{1}{2};$

2. $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ a(x-1), & 1\le x\le 3,\\ 1, & x>3,\end{cases}$ $\alpha=2,\quad \beta=2{,}8;$

3. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\sqrt{x}, & 0\le x\le 4,\\ 1, & x>4,\end{cases}$ $\alpha=1,\quad \beta=3;$

4. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ a(x+3), & -3\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ $\alpha=-2,\quad \beta=0;$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ax^3, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ $\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{3}{2};$

6. $F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ a(x-2)^2, & 2\le x\le 4,\\ 1, & x>4,\end{cases}$ $\alpha=2,\quad \beta=3;$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a(x+1)^2, & -1\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$

$\alpha=0,\quad \beta=\dfrac{1}{2};$

8. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

$\alpha=\dfrac{\pi}{6},\quad \beta=\dfrac{\pi}{4};$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ax^{\frac{3}{2}}, & 0\le x\le 4,\\ 1, & x>4,\end{cases}$

$\alpha=2,\quad \beta=3;$

10. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2},\\ a\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$

$\alpha=-\dfrac{\pi}{3},\quad \beta=1;$

Література [1, *розділи 7, 8*; 2, *розділ 4*]

Завдання 6

Задано вибірку, яка характеризує місячний прибуток підприємців (в тис. грн.).

- Скласти варіаційний ряд та статистичний розподіл вибірки, побудувати полігон частот.
- Скласти інтервальний статистичний розподіл вибірки, розбивши проміжок $[x_{\min}, x_{\max}]$ на 5 рівних проміжків, та побудувати гістограму частот.
- Обчислити вибіркові характеристики: вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, вибіркове середнє квадратичне відхилення, моду та медіану, якщо вибірка має такий вигляд:

1) 16, 20, 22, 21, 21, 24, 16, 18, 22, 20, 24, 18, 19, 21, 17, 17, 22, 20, 23, 14.
2) 44, 52, 47, 48, 46, 53, 48, 50, 47, 49, 51, 45, 46, 50, 51, 45, 52, 47, 42, 54.
3) 21, 19, 17, 23, 18, 22, 25, 20, 19, 18, 24, 21, 23, 17, 24, 25, 27, 20, 18, 22.
4) 25, 34, 33, 28, 27, 26, 30, 25, 33, 34, 35, 27, 29, 30, 35, 31, 35, 29, 30, 31.
5) 73, 68, 70, 65, 73, 71, 66, 69, 75, 70, 67, 67, 71, 76, 71, 72, 68, 74, 73, 70.
6) 51, 55, 53, 54, 52, 60, 55, 50, 57, 54, 52, 57, 58, 53, 55, 56, 58, 52, 51, 56.

7) 46, 43, 50, 48, 53, 44, 47, 48, 49, 52, 50, 49, 43, 46, 47, 47, 45, 48, 49, 45.
8) 37, 33, 33, 32, 37, 30, 40, 34, 35, 34, 36, 35, 41, 32, 40, 34, 31, 39, 38, 35.
9) 55, 50, 56, 50, 51, 53, 50, 50, 48, 46, 51, 55, 53, 49, 52, 52, 50, 51, 48, 49.
10) 26, 22, 25, 29, 32, 24, 30, 26, 25, 28, 25, 22, 27, 29, 25, 30, 23, 22, 25, 28.

Література [1, *розділ 12*; 2, *розділ 5*]

Завдання 7

За даними вибірки, використовуючи критерій Пірсона при рівні значущості α = 0,05, перевірити, чи справджується статистична гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X:

1.

x_i	1	3	5	7	9	11	13	15	17
m_i	5	8	15	23	38	22	16	9	6

2.

x_i	14	16	18	20	22	24	26	28	30
m_i	6	10	19	28	49	27	17	9	5

3.

x_i	1	4	7	10	13	16	19	22	25
m_i	5	7	10	17	22	19	10	8	5

4.

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19
m_i	7	15	28	45	78	50	30	17	8

5.

x_i	2	5	8	11	14	17	20	23	26
m_i	6	13	23	50	89	48	21	11	5

6.

x_i	8	13	18	23	28	33	38	43	48
m_i	5	9	18	38	60	36	16	8	5

7.

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18
m_i	6	17	38	62	95	60	36	15	5

8.

x_i	9	11	13	15	17	19	21	23	25
m_i	5	9	11	14	18	15	12	10	6

9.

x_i	1	5	9	13	17	21	25	29	33
m_i	5	9	14	21	24	22	19	11	5

10.

x_i	1	4	7	10	13	16	19	22	25
m_i	6	14	37	68	90	69	36	13	5

Література [1, *розділ 15*;
2, *розділ 6*]

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

1. Випадкові події. Означення ймовірності

Література [1, *розділ 1*;
2, *розділ 1*]

У результаті певного випробування може відбутися або не відбутися деяка *випадкова подія*. Наприклад, при підкиданні монети може випасти герб (подія A) або цифра (подія B). Найпростіший результат випробування називають *елементарною подією*. Множина всіх таких подій називається *простором елементарних подій* даного випробування і позначається Ω. Якщо поява елементарної події веде до появи події A, то вона називається *сприятливою* для A. Наприклад, для випробування, яке полягає в однократному підкиданні грального кубика, простір елементарних подій має вигляд: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де ω_i = {випаде i очок}. При цьому події ω_2, ω_4, ω_6 є сприятливими для події A = {випаде парне число очок}.

Нехай в даному випробуванні всі елементарні події рівноможливі. Розглянемо класичне означення ймовірності.

Ймовірністю події A називають відношення кількості m сприятливих (для A) елементарних подій до кількості n всіх елементарних подій в даному випробуванні, тобто

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Приклад 1. Із партії виготовленої продукції, яка містить 50 деталей, навмання дістають одну деталь. Знайти ймовірність того, що вона неякісна, якщо в партії 45 якісних деталей, а інші неякісні.

Розв'язок. Розглянемо подію A = {навмання взята деталь — неякісна}. Очевидно, що в партії є 5 неякісних деталей, тому сприятливими для події A є 5 елементарних подій із 50. Отже, за формулою (1) маємо:

$$P(A) = \frac{5}{50} = 0{,}1.$$

Приклад 2. Із карток розрізної азбуки складають слово "математика", після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана:

а) буква "м"; б) буква "а"; в) буква "і".

Розв'язок. Оскільки у слові "математика" всього 10 букв, то $n = 10$. Розглянемо події A = {вибрано букву "м"}, B = {вибрано букву "а"}, C = {вибрано букву "і"}. Так як в даному слові дві букви "м", три букви "а" і жодної букви "і", то за формулою (1) дістаємо:

$$P(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2, \quad P(A) = \frac{3}{10} = 0{,}3, \quad P(A) = \frac{0}{10} = 0.$$

2. Основні формули додавання і множення ймовірностей

Література [1, *розділ 3*;
2, *розділ 2*]

Сума двох подій A і *B* — це подія, яка полягає в тому, що відбувається *хоча б одна* з подій *A або B*.

Добуток двох подій A і *B* — це подія, яка полягає в тому, що відбуваються *обидві* події *A і B*.

Подію $\overline{A}$ називають *протилежною* до події A, якщо вона відбувається тоді, коли не відбувається подія в даному випробуванні.

Ймовірність суми двох довільних випадкових подій A і B визначають за формулою

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{2}$$

Події A і B називаються *несумісними*, якщо вони не можуть відбуватись одночасно в одному випробуванні.

Для *несумісних подій* має місце рівність:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{3}$$

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несумісні*, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює сумі їх ймовірностей, тобто

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Зокрема, для *протилежних подій* A і $\overline{A}$ виконується рівність:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{4}$$

Події A і B є *незалежними*, якщо поява однієї з них не залежить від появи іншої. *Ймовірність добутку* для незалежних подій визначають за формулою:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (5)$$

Для *залежних* подій розглядають умовні ймовірності. *Умовну ймовірність* події B за умови появи події A позначають $P\,(B/A)$. Аналогічно вводиться *умовна ймовірність* події A за умови появи події B, яку позначають $P\,(A/B)$.

Ймовірність добутку для довільних подій A і B визначають за формулою:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B). \qquad (6)$$

Приклад 3. Два студента зайшли в бібліотеку. Ймовірність отримання потрібної книжки для першого дорівнює 0,6, а для другого 0,8. Знайти ймовірність того, що:

а) хоча б один з них отримає потрібну книжку;

б) обидва дістануть потрібні книжки;

в) жоден з них не отримає книжки.

Розв'язок. Розглянемо події: A = {перший студент отримав потрібну книжку}, B = {другий студент отримав потрібну книжку}.

а) Розглянемо $A + B$ = {хоча б один з них отримав книжку}. Оскільки події A і B сумісні і незалежні, то за формулами (2) і (5), знаходимо шукану ймовірність

$$P(A + B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}92.$$

б) Очевидно, що $A \cdot B$ = {обидва студенти отримали книжки}, тому за формулою (5) дістаємо:

$$P(A \cdot B) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48.$$

в) Жоден зі студентів не отримає книжки, якщо не відбудеться ні подія A, ні подія B, а отже, відбудуться події $\bar{A}$ і $\bar{B}$. За формулами (4) і (5) знаходимо шукану ймовірність:

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}08.$$

Зауважимо, що останню ймовірність можна знайти простіше, оскільки події $\bar{A} \cdot \bar{B}$ і $A + B$ є протилежними, тому

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 1 - P(A + B) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08.$$

Приклад 4. Виконуючи домашнє завдання, учень підготував 6 із 10 заданих питань. На уроці вчитель задає йому два питання. Яка ймовірність того, що він правильно відповість: на обидва питання, тільки на одне питання?

Розв'язок. Учень правильно відповість на обидва питання (подія A), якщо він дасть правильну відповідь як на перше (подія A_1), так і на друге питання (подія A_2). Оскільки учень підготував 6 із 10 питань, то $P(A_1) = \frac{6}{10}$. Подія A_2 залежить від A_1, тому що після першої правильної відповіді залишилось 5 підготовлених із 9 питань. Отже, за формулою (6) дістаємо:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

Учень правильно відповість тільки на одне питання (подія B), якщо дасть правильну відповідь тільки на перше (I випадок) або тільки на друге питання (II випадок), тобто $B = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$. Подія $\bar{A}_2$ залежить від A_1, тому що після першої правильної відповіді залишились 4 непідготовлені питання із 9. Аналогічно розглядається II випадок. Тому за формулами (3) і (6) маємо:

$$P(B) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2 / A_1) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2 / \bar{A}_1) =$$

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}.$$

3. Незалежні повторні випробування. Формула Бернуллі

Література [1, *розділ 5*; 2, *розділ 3*]

Нехай проводиться серія n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A одна й та сама, і дорівнює p. Отже, подія A може відбутися з ймовірністю p і не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$ в кожному з випробувань.

Ймовірність того, що *подія A відбудеться m разів* у серії n випробувань визначають за *формулою Бернуллі*:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (7)$$

де $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ число сполучень із n елементів по k, а функція $n!$ (n — факторіал) визначається як добуток перших n натуральних чисел, тобто $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, при цьому покладають $0! = 1$.

Ймовірність появи події A *не менше* m_1 *і не більше* m_2 разів у n випробуваннях визначають так:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1+1) + \ldots + P_n(m_2), \qquad (8)$$

де кожний із доданків обчислюють за формулою Бернуллі.

Ймовірність появи події A *хоча б один раз* в n випробуваннях обчислюють за формулою

$$P_n(m \ge 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n.$$

Приклад 5. Для контролю якості виготовленої продукції відібрано 6 виробів. Ймовірність того, що взятий навмання виріб є якісним, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що серед вибраних виробів буде не менше 4 і не більше 6 якісних.

Розв'язок. Розглянемо кожний виріб як незалежне випробування, в результаті якого може відбутися подія A (виріб якісний) з ймовірністю 0,9. Позначимо $n = 6$, $p = 0{,}9$, $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, тоді $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Шукану ймовірність визначимо за рівністю (8), тобто

$$P_6(4 \le m \le 6) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6).$$

За формулою Бернуллі (7) знаходимо:

$$P_6(4) = C_6^4 (0{,}9)^4 (0{,}1)^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} \cdot 0{,}6561 \cdot 0{,}01 \approx \frac{4!\cdot 5 \cdot 6}{4!\cdot 2} \cdot 0{,}0066 \approx 0{,}098,$$

$$P_6(5) = C_6^5 (0{,}9)^6 (0{,}1) = \frac{6!}{5!\cdot 1!} \cdot 0{,}5905 \cdot 0{,}1 \approx \frac{5!\cdot 6}{5!} \cdot 0{,}059 = 0{,}354,$$

$$P_6(6) = C_6^6 (0{,}9)^6 (0{,}1)^0 \approx \frac{6!}{6!\cdot 0!} \cdot 0{,}5314 \cdot 1 \approx 0{,}531.$$

Отже,

$$P_6(4 \le m \le 6) = 0{,}098 + 0{,}354 + 0{,}531 = 0{,}983.$$

4. Дискретні випадкові величини та їх числові характеристики

Література [1, *розділи 6, 8*;
2, *розділ 4*]

Випадкова величина X в результаті деякого експерименту може набувати певних значень, причому наперед невідомо яких. Якщо множина її значень є скінченою або зчисленою, то вона називається *дискретною випадковою величиною* (ДВВ). *Законом розподілу* ДВВ називають відповідність між можливими значеннями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величини X та відповідними їм ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, де $p_i = P(X = x_i)$, $i = \overline{1,n}$. Закон розподілу зручно записувати у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

При цьому $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Для дискретної випадкової величини розглянемо такі числові характеристики: математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Математичне сподівання $M(X)$ величини X визначають так:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n. \qquad (9)$$

Дисперсією $D(X)$ величини X називають математичне сподівання величини $\left(X - M(X)\right)^2$, тобто $D(X) = \left(X - M(X)\right)^2$. Зручніше обчислювати дисперсію за формулою:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(M(X)\right)^2. \qquad (10)$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ визначають так:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (11)$$

Приклад 6. Випадкову величину X, що визначає добовий попит на певний продукт, задано законом розподілу. Знайти параметр a та числові характеристики цієї дискретної випадкової величини, якщо:

X	5	10	15	20	25
p	a	0,1	0,2	0,25	0,3

Розв'язок. Значення параметра a знаходимо, користуючись рівністю $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Оскільки

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = a + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}3 = 1,$$

то

$$a = 1 - 0{,}85 = 0{,}15.$$

Отже, $p_1 = 0{,}15$.

За допомогою формул (9)–(11) визначимо числові характеристики даної випадкової величини:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 5\cdot 0{,}15 + 10\cdot 0{,}1 + 15\cdot 0{,}2 + 20\cdot 0{,}25 + 25\cdot 0{,}3 = 17{,}25;$$

$$D(X) = \left(5^2\cdot 0{,}15 + 10^2\cdot 0{,}1 + 15^2\cdot 0{,}2 + 20^2\cdot 0{,}25 + 25^2\cdot 0{,}3\right) - (17{,}25)^2 \approx 48{,}69;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{48{,}69} \approx 6{,}98.$$

5. Неперервні випадкові величини. Функція і щільність розподілу

Література [1, *Розділи 7, 8*;
2, *Розділ 4*]

Випадкова величина X називається *неперервною* (НВВ), якщо її функція розподілу $F(x)$ є неперервною функцією. Множиною значень НВВ є скінчений або нескінчений проміжок.

Неперервна випадкова величина задається або функцією розподілу $F(x)$ або щільністю розподілу $f(x)$.

Функція розподілу (*інтегральна функція розподілу*) $F(x)$ визначає ймовірність того, що випадкова величина X набуває значень, менших за x, тобто $F(x) = P(X < x), x \in \mathbb{R}$. Тоді ймовірність попадання величини X в деякий проміжок $(a;b]$ можна обчислити за формулою:

$$P(X \in (a;b]) = F(b) - F(a). \tag{12}$$

Зауважимо, що для неперервної випадкової величини ймовірність того, що вона набуде конкретного значення x, дорівнює нулю. Тому рівність (12) можна записати так:

$$P(X \in (a;b)) = P(X \in [a;b]) = P(X \in [a;b)) = \\ = P(X \in (a;b]) = F(b) - F(a). \tag{13}$$

Щільністю розподілу (*диференціальною функцією розподілу*) $f(x)$ називають функцію, для якої $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Тоді для кожної точки x, в якій функція $f(x)$ є неперервною, виконується рівність:

$$f(x) = F'(x). \tag{14}$$

Розглянемо важливу властивість щільності: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Якщо всі значення величини X належать проміжку $[a, b]$, то має місце рівність:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1. \tag{15}$$

Для неперервної випадкової величини розглядають ті самі числові характеристики, що й для дискретної величини.

Приклад 7. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Записати щільність (диференціальну функцію) $f(x)$ розподілу, знайти параметр a та визначити ймовірність попадання величини X в інтервал (— 2; 0), якщо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ a(x+3)^2, & -3 \le x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Визначимо спочатку щільність розподілу $f(x)$, а потім знайдемо параметр a. Для цього обчислимо похідну $F'(x)$. Враховуючи правила та формули диференціювання (див. напр., [10, *с. 110–111*]), знаходимо:

$$(0)' = 0,\ (1)' = 0,\ \left(a(x+3)^2\right)' = a\cdot 2(x+3)\cdot(x+3)' = \\ = 2a(x+3)(1+0) = 2a(x+3).$$

Отже,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ 2a(x+3), & -3 \le x \le 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Оскільки випадкова величина X розподілена на проміжку [– 3; 0], то за рівністю (15) (властивістю щільності) знаходимо параметр a. При цьому користуємось властивостями і таблицею інтегралів та формулою Ньютона—Лейбниця (див. напр., [10, *с. 144, 163*]). Дістаємо:

$$1=\int_a^b f(x)dx=\int_{-3}^{0}2a(x+3)dx=2a\int_{-3}^{0}(x+3)dx=2a\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{-3}^{0}=$$

$$=2a\left(\frac{0^2}{2}+3\cdot 0-\frac{(-3)^2}{2}-3\cdot(-3)\right)=2a\cdot\frac{9}{2}=9a \qquad\Rightarrow\qquad a=\frac{1}{9}.$$

Зауважимо, що параметр a можна знайти, користуючись неперервністю функції $F(x)$, а саме:

$$F(0)=1 \;\;\Rightarrow\;\; a(0+3)^2=1 \;\;\Rightarrow\;\; a=\frac{1}{9}.$$

Таким чином, функція і щільність розподілу мають вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ \dfrac{(x+3)^2}{9}, & -3\le x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ \dfrac{2(x+3)}{9}, & -3\le x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

Ймовірність попадання величини X в проміжок $(-2;0)$ визначимо за формулою (13):

$$P\big(X\in(-2;0)\big)=F(0)-F(-2)=1-\frac{(-2+3)^2}{9}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

6. Елементи математичної статистики. Вибірковий метод

Література [1, *розділ 12*;
2, *розділ 5*]

Нехай для вивчення кількісної (дискретної чи неперервної) ознаки X із генеральної сукупності отримано вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$ обсягом n.

Якщо записати елементи вибірки в порядку зростання, отримаємо *варіаційний ряд*.

Спостережувані різні значення x_i ознаки X називають *варіантами*, кількість значень однієї варіанти у вибірці — її *частотою* n_i (сума частот усіх варіант дорівнює обсягу вибірки), відношення частоти до обсягу вибірки — *відносною частотою* або *емпіричною ймовірністю* $w_i = n_i n$ (сума відносних частот усіх варіант дорівнює одиниці).

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант варіаційного ряду з відповідними їм частотами і/або відносними частотами. Статистичний розподіл також задають у вигляді послідовності замкнених справа напівінтервалів і відповідних їм частот і/або відносних частот (частотою інтервалу вважають суму частот усіх варіант з даного інтервалу).

Щоб підкреслити зазначені відмінності в першому випадку говорять про *точковий*, а в другому — про *інтервальний* статистичний розподіл вибірки.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k)$, де x_i — варіанти вибірки; n_i — відповідні частоти, $i = 1, 2, ..., k$.

Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h}$ (*щільність частоти*).

Середнє арифметичне значення вибірки називається *вибірковим середнім* $\bar{x}_{\text{в}}$ і обчислюється за формулами

$$\bar{x}_{\text{в}}=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i n_i}{n} \quad \text{або} \quad \bar{x}_{\text{в}}=\sum_{i=1}^{k}x_i w_i, \qquad (16)$$

де x_i — значення i-ї варіанти; n_i — частота i-ї варіанти, n — обсяг вибірки; k — кількість варіант у вибірці; w_i — відносна частота i-ї варіанти.

Середній квадрат відхилення значень елементів вибірки від вибіркового середнього називається *вибірковою дисперсією* $D_{\text{в}}$ і обчислюється за формулами

$$D_{\text{в}}=\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_2)^2 n_i}{n} \quad \text{або} \quad D_{\text{в}}=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x}_{\text{в}})^2 w_i.$$

Після перетворень формули для знаходження вибіркової дисперсії дещо спрощуються:

$$D_{\text{в}}=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i^2 n_i}{n}-\bar{x}_{\text{в}}^2 \quad \text{або} \quad D_{\text{в}}=\sum_{i=1}^{k}x_i^2 w_i-\bar{x}_{\text{в}}^2, \qquad (17)$$

тобто вибіркова дисперсія дорівнює різниці середнього квадрата елементів вибірки й квадрата вибіркового середнього.

Квадратний корінь з вибіркової дисперсії

$$\sigma = \sqrt{D_в} \qquad (18)$$

називається *середнім квадратичним відхиленням вибірки*.

Медіаною Ме називається значення середнього елемента варіаційного ряду. Якщо обсяг вибірки $n = 2m + 1$ непарний, то медіаною буде значення елемента варіаційного ряду з номером $m + 1$:

$$\text{Me} = x_{m+1}.$$

Якщо обсяг вибірки $n = 2m$ парний, то медіаною буде середнє значення елементів варіаційного ряду з номерами m і $m + 1$:

$$\text{Me} = \frac{x_m + x_{m+1}}{2} \qquad (19)$$

Модою (Мо) називається варіанта з найбільшою частотою.

Приклад 7. Задано вибірку, яка характеризує місячний прибуток підприємців (в тис. грн.).

- Скласти варіаційний ряд та статистичний розподіл вибірки, побудувати полігон частот.
- Скласти інтервальний статистичний розподіл вибірки, розбивши проміжок $[x_{\min}, x_{\max}]$ на 5 рівних проміжків, та побудувати гістограму частот.
- Обчислити вибіркові характеристики: вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, вибіркове середнє квадратичне відхилення, моду та медіану, якщо вибірка має такий вигляд:

18, 24, 21, 20, 23, 24, 17, 19, 22, 20, 24, 18, 19, 21, 18, 19, 22, 20, 23, 18.

Розв'язок. Побудуємо варіаційний ряд вибірки:

17, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 20, 20, 20, 21, 21, 22, 22, 23, 23, 24, 24, 24.

У даній вибірці всього 8 різних значень, тобто варіант:

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

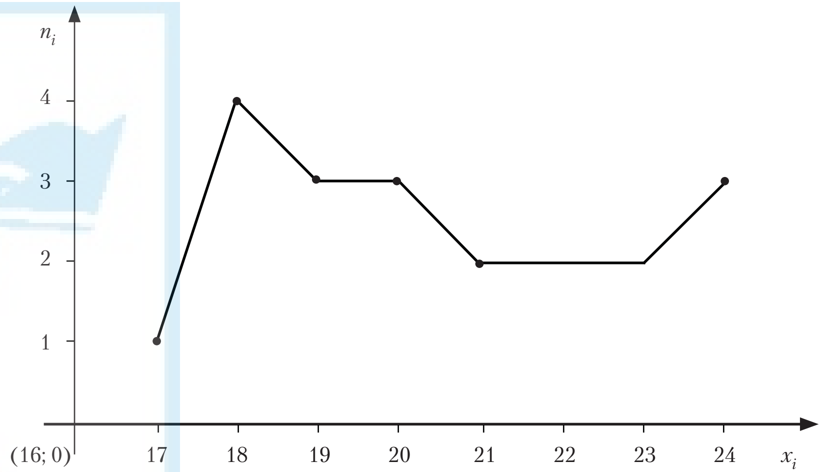
Знайдемо їх частоти:

$$n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 3, n_4 = 3, n_5 = 2, n_6 = 2, n_7 = 2, n_8 = 3.$$

Запишемо шуканий статистичний розподіл вибірки:

x_i	17	18	19	20	21	22	23	24
n_i	1	4	3	3	2	2	2	3

Для того щоб побудувати полігон частот, відкладемо на осі абсцис значення варіант x_i, а на осі ординат — значення відповідних їм частот n_i і послідовно з'єднаємо між собою точки (x_i, n_i) відрізками.



Складемо інтервальний статистичний розподіл вибірки. Для цього розіб'ємо інтервал [17; 24] на 5 рівних проміжків довжиною $\frac{24-17}{5} = 1,4.$

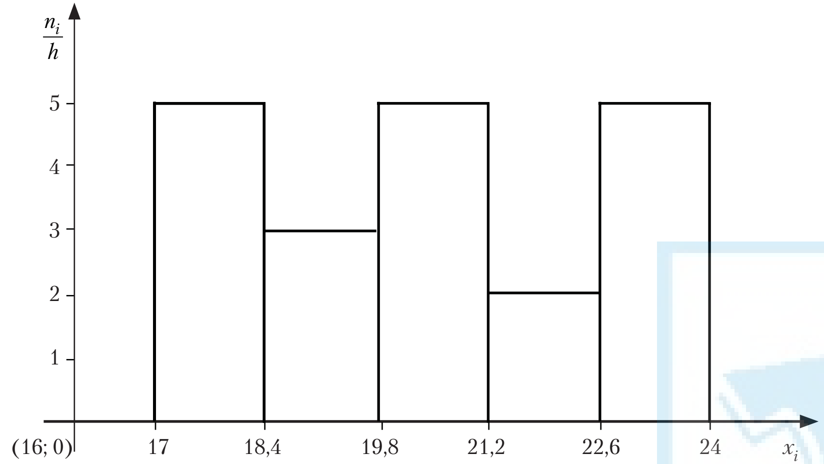
Інтервал	[17; 18,4]	(18, 4; 19,8)	(19,8; 21,2)	(21,2; 22,6)	(22,6; 24)
Частота	5	3	5	2	5

Для побудови гістограми обчислимо щільності частоти:

$$\frac{n_1}{h} = \frac{5}{1,4} = \frac{25}{7}; \ \frac{n_2}{h} = \frac{3}{1,4} = \frac{15}{7};$$

$$\frac{n_3}{h} = \frac{5}{1,4} = \frac{25}{7}; \ \frac{n_4}{h} = \frac{2}{1,4} = \frac{10}{7}; \ \frac{n_5}{h} = \frac{5}{1,4} = \frac{25}{7}.$$

Побудуємо гістограму частот.



За формулами (16)–(19) обчислимо вибіркові середнє, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та медіану:

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{17\cdot 1 + 18\cdot 4 + 19\cdot 3 + 20\cdot 3 + 21\cdot 2 + 22\cdot 2 + 23\cdot 2 + 24\cdot 3}{20} = 20{,}5;$$

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}_в^2 =$$

$$= \frac{17^2\cdot 1 + 18^2\cdot 4 + 19^2\cdot 3 + 20^2\cdot 3 + 21^2\cdot 2 + 22^2\cdot 2 + 23^2\cdot 2 + 24^2\cdot 3}{20} - 20{,}5^2 =$$

$$= 4{,}95;$$

$$\sigma = \sqrt{D_в} \approx 2{,}225;$$

$$\mathrm{Me} = \frac{x_m + x_{m+1}}{2} = \frac{20+20}{2} = 20$$

Модою буде варіанта з найбільшою частотою:

$$\mathrm{Mo} = 18.$$

7. Статистична перевірка статистичних гіпотез

Література [1, *розділ 15*; 2, *розділ 6*]

Нехай статистичний розподіл вибірки задано у вигляді послідовності рівновіддалених варіант і відповідних їм частот:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Для того щоб при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, необхідно:

1) обчислити вибіркове середнє $\bar{x}_в$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення σ;
2) визначити теоретичні частоти

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma}\varphi(u_i), \tag{20}$$

де n — обсяг вибірки; h — крок (різниця між двома сусідніми варіантами); $\varphi(u)$ — диференціальна функція Лапласа;

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma}; \tag{21}$$

3) порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона. Для цього:

- знаходять спостережуване значення критерію Пірсона

$$\chi^2_{спост} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}; \tag{22}$$

- за таблицею критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості α і кількості ступенів вільності $k = s - 3$ (s — кількість варіант вибірки) знаходять критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ правосторонньої критичної області. Якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}$, немає підстав відхиляти гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності. Іншими словами, емпіричні та теоретичні частоти різняться несуттєво (випадково). Якщо $\chi^2_{спост} \geq \chi^2_{кр}$, гіпотезу відхиляють. Іншими словами, емпіричні та теоретичні частоти різняться суттєво.

Приклад 8. За даними вибірки, використовуючи критерій Пірсона при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити, чи справджується статистична гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X:

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18
n_i	7	16	32	58	91	55	30	15	6

Розв'язок. Обчислимо вибіркові середнє і середнє квадратичне відхилення:

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{2\cdot 7+4\cdot 16+6\cdot 32+8\cdot 58+10\cdot 91+12\cdot 55+14\cdot 30+16\cdot 15+18\cdot 6}{7+16+32+58+91+55+30+15+6} \approx 9{,}91;$$

$$D_{\text{в}} = \left(2^2\cdot 7+4^2\cdot 16+6^2\cdot 32+8^2\cdot 58+10^2\cdot 91+12^2\cdot 55+\right.$$

$$\left.+14^2\cdot 30+16^2\cdot 15+18^2\cdot 6\right)-9{,}91^2 \approx 10{,}93;$$

$$\sigma = \sqrt{10{,}93} \approx 3{,}31.$$

За формулою (21) знайдемо u_i, $i = 1, 2, ..., 9$:

$$u_1 = \frac{2-9{,}91}{3{,}31} \approx -2{,}39;\ \ u_2 = \frac{4-9{,}91}{3{,}31} \approx -1{,}79;\ \ u_3 = \frac{6-9{,}91}{3{,}31} \approx -1{,}18;$$

$$u_4 = \frac{8-9{,}91}{3{,}31} \approx -0{,}58;\ \ u_5 = \frac{10-9{,}91}{3{,}31} \approx -0{,}03;\ \ u_6 = \frac{12-9{,}91}{3{,}31} \approx 0{,}63;$$

$$u_7 = \frac{14-9{,}91}{3{,}31} \approx 1{,}24;\ \ u_8 = \frac{16-9{,}91}{3{,}31} \approx 1{,}84;\ \ u_9 = \frac{18-9{,}91}{3{,}31} \approx 2{,}45.$$

Враховуючи, що різниця між двома сусідніми варіантами $h = 2$, обсяг вибірки $n = 7 + 16 + 32 + 58 + 91 + 55 + 30 + 15 + 6 = 310$, за формулою (20) визначимо теоретичні частоти:

$$n_1' = \frac{310\cdot 2}{3{,}31}\varphi(-2{,}39) \approx 4{,}28;\ \ n_2' = \frac{310\cdot 2}{3{,}31}\varphi(-1{,}79) \approx 15{,}15;$$

$$n_3' = \frac{310\cdot 2}{3{,}31}\varphi(-1{,}18) \approx 37{,}18;\ \ n_4' = \frac{310\cdot 2}{3{,}31}\varphi(-0{,}58) \approx 63{,}31;$$

$$n_5' = \frac{310\cdot 2}{3{,}31}\varphi(-0{,}03) \approx 74{,}77;\ \ n_6' = \frac{310\cdot 2}{3{,}31}\varphi(0{,}63) \approx 61{,}25;$$

$$n_7' = \frac{310\cdot 2}{3{,}31}\varphi(1{,}24) \approx 34{,}80;\ \ n_8' = \frac{310\cdot 2}{3{,}31}\varphi(1{,}84) \approx 13{,}72;$$

$$n_9' = \frac{310\cdot 2}{3{,}31}\varphi(2{,}45) \approx 3{,}75.$$

За формулою (22) знайдемо спостережуване значення критерію Пірсона:

$$\chi^2_{\text{спост}} = \frac{(7-4{,}28)^2}{4{,}28} + \frac{(16-15{,}15)^2}{15{,}15} + \frac{(32-37{,}18)^2}{37{,}18} + \frac{(58-63{,}31)^2}{63{,}31} +$$

$$+\frac{(91-74{,}77)^2}{74{,}77} + \frac{(55-61{,}25)^2}{61{,}25} + \frac{(30-34{,}80)^2}{34{,}80} +$$

$$+\frac{(15-13{,}72)^2}{13{,}72} + \frac{(6-3{,}75)^2}{3{,}75} \approx 9{,}24.$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і кількості ступенів вільності $k = 9 - 3 = 6$ знайдемо критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\,6)$ правосторонньої критичної області:

$$\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\,6) \approx 12{,}59.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності. Тобто емпіричні і теоретичні частоти різняться несуттєво (випадково).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Практикум* з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Р. К. Чорней, О. Ю. Дюженкова, О. Б. Жильцов та ін.; За ред. Р. К. Чорнея. — К.: МАУП, 2003. — 328 с.
2. *Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К.* Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика. — К.: НАУ, 1999. — 447 с.

Додаткова

3. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк., 2002. — 405 с.
4. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 1999. — 400 с.
5. *Горбань С. Ф., Снижко Н. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: МАУП, 1999. — 168 с.
6. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Теорія ймовірностей із елементами математичної статистики. — К.: НМК ВО, 1991.
7. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Практикум з курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика". — К.: КІНГ, 1991.
8. *Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О.* Вища математика: Приклади і задачі: Посібник. — К.: Вид. центр "Академія", 2003. — 624 с.
9. *Вища* математика. Частина 2: Навч. посіб. / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, В. С. Дронь, О. С. Кондур. — Чернівці: Рута, 2002. — 208 с.
10. *Практикум* з вищої математики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / І. І. Юртин, О. Ю. Дюженкова, О. Б. Жильцов та ін.; За ред. І. І. Юртина. — К.: МАУП, 2003. — 248 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *О. М. Коваленко*
Комп'ютерне верстання *М. І. Фадєєва*

Зам. № ВКЦ-3305
Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП