МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

“ВИЩА МАТЕМАТИКА”

Частина І

(для молодших спеціалістів, бакалаврів)

Київ 2008

Підготовлено доцентом кафедри гуманітарних і фундаментальних дисциплін Херсонського інституту МАУП *В. І. Лисенком*

Затверджено на засіданні кафедри гуманітарних та фундаментальних дисциплін Херсонського інституту МАУП (протокол № 5 від 18.01.07) та на засіданні кафедри математики (протокол № 10 від 04.07.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Лисенко В. І. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Вища математика”. Частина 1 (для молодших спеціалістів, бакалаврів). — К: МАУП, 2008. — 60 с.

Методичні матеріали містять пояснювальну записку, тематичний план практичних занять, матеріали для підготовки до аудиторних занять та формування елементів пошуково-аналітичної діяльності, а також список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Запропоновані методичні матеріали повністю враховують тематику навчального плану з курсу “Вища математика” для спеціальностей: 6.050100 “Банківська справа“, 6.050200 “Менеджмент туризму та готельного бізнесу”, 5.050105 “Банківська справа”.

До кожної теми курсу подано матеріали для підготовки до поточних аудиторних занять, що охоплюють довідковий матеріал; питання для контролю рівня засвоєння основних теоретичних положень; основні типи задач; завдання для самостійної роботи. До тем прикладного значення подано індивідуальні завдання пошуково-аналітичного характеру (теми № 3, 8, 9, 11).

Така структура сприяє створенню цілісної концептуальної моделі розглядуваного питання, полегшує повноту відтворення та “перенесення” одержаних знань у нові умови.

Наявність достатньої кількості завдань для самостійної роботи дає змогу викладачу реалізувати диференційований підхід до навчання, а студенту — засвоїти матеріал на рівні, що відповідає потенційним можливостям розумової діяльності та індивідуальним властивостям його інтелекту. Подані матеріали можна використовувати як при кредитно-модульній, так і традиційній формі навчання.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№ пор.	Назва змістового модуля і теми	Кількість годин	Форми контролю
1	2	3	4
	Змістовий модуль І. Лінійна алгебра		
1	Визначники	2	У, СР
2	Матриці	2	У, ПК, СР
3	Системи m лінійних рівнянь з n невідомими	4	У, ІЗ, К

1	2	3	4
	Змістовий модуль II. Векторна алгебра і аналітична геометрія		
4	Вектори. Дії над векторами. Скалярний добуток векторів	2	У, СР
5	Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів	2	У, ПК, К
6	Рівняння ліній на площині	2	У, СР
7	Рівняння прямої та площини у просторі	2	У, КР
	Змістовий модуль III. Диференціальне числення		
8	Основи математичного аналізу	2	У, СР, ІЗ
9	Основні відомості про похідну	4	У, ІЗ, КР
10	Диференціал функції. Застосування диференціала для наближених обчислень	2	У, СР
11	Застосування диференціального числення для дослідження функцій	4	У, ІЗ, КР
12	Диференціальне числення функцій багатьох змінних	2	СР
Разом годин: 30			

Скорочення форм контролю:
У — усне опитування
ПК — перевірка конспектів
СР — самостійна робота
КР — контрольна робота
ІЗ — індивідуальні завдання
К — колоквіум

Змістовий модуль І. Лінійна алгебра

Тема 1. Визначники

1. Підготовка до поточних аудиторних занять

1.1. Довідковий матеріал

Основні властивості визначників

1. При транспонуванні визначник не змінюється.
2. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на число λ, то її визначник так само помножиться на це число.
3. Якщо у визначника поміняти місцями два рядки (стовпці), то визначник лише змінить знак.
4. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник так само дорівнюватиме нулю.
5. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
6. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, елементи відповідних рядків (стовпців) яких дорівнюють відповідним доданкам.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помноженого на довільний множник.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ n-го порядку називають визначником (n-1)- го порядку, що одержується з визначника Δ викресленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких розміщується елемент aij.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називають його мінор M_{ij} , узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

1.2. Питання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Що називається визначником третього порядку?
3. Основні властивості визначників.
4. Що називається мінором і алгебраїчним доповненням елемента a_{ij}?
5. Сформулювати теорему про розклад визначника за елементами рядка (стовпця).
6. Чому дорівнює сума добутків елементів одного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця)?
7. Як обчислюють визначники вищих порядків?

1.3. Основні типи задач

1. Обчислення визначників другого порядку.
2. Обчислення визначників третього порядку:
   - за правилом трикутників;
   - шляхом розкладу визначника за елементами рядка (стовпця).
3. Обчислення визначників n-го порядку:
   - шляхом накопичення нулів у рядку (стовпці);
   - приведенням їх до трикутного вигляду.
4. Доведення рівностей, що містять визначники, розв’язування рівнянь.

1.4. Задачі для самостійного розв’язання

1. Не виконуючи обчислень, назвати визначник, що дорівнює нулю. Відповідь обґрунтувати.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Нехай задано визначник третього порядку:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, б) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}$.

Записати алгебраїчні доповнення A_{ij} для елементів

а) a_{21}; б) a_{23}; в) a_{33}.

3. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 13 & -4 & 15 \\ 7 & 0 & -4 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -a & -b \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & 1 \\ ac & a^2+c^2 & 1 \\ ad & a^2+d^2 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Використовуючи властивості визначників і теореми 1, 2, довести рівності:

а) $\begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2-x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} = 4x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \end{vmatrix}$.

5. Обчислити визначники, розклавши їх за елементами рядка (стовпця), який містить найбільшу кількість нулів:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & a & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix}$.

6. Обчислити визначники накопиченням нулів у рядку чи стовпці:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити визначники, привівши їх до трикутного вигляду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

8. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} a+2 & a^2 \\ a & a^2-2a+4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \log_a b & \log_{a^2} b \\ \log_{b^2} a & \log_b a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \mathrm{ctg}\alpha \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \cos\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{12} \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\frac{\pi}{5} & \cos\frac{\pi}{3} \\ 2\sin\frac{\pi}{6} & \mathrm{ctg}\frac{\pi}{5} \end{vmatrix}$.

9. Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 3x & x & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2 & & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Література [1, с. 16–26; 2, с. 6–13; 3, с. 18–28; 4, с. 5–6; 6, с. 11–16]

Тема 2. Матриці

1. Підготовка до поточних аудиторних занять

2.1. Довідковий матеріал

Обернена матриця A^{-1} до матриці A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{32} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рангом матриці A називають найбільший з порядків її відмінних від нуля мінорів та позначають $r(A)$, $rang\,(A)$.

Елементарними перетвореннями матриці називають такі операції:

- перестановку місцями двох рядків (стовпців) матриці;
- множення рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля;
- додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця).

При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється. Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

2.2. Питання для самоконтролю

1. Означення матриці, її розмірність.
2. Основні види матриць. Транспонована матриця.
3. Обчислення: суми, різниці матриць, добутку матриці на число.
4. Які матриці називають узгодженими? Навести приклади.
5. Обчислення добутку двох узгоджених матриць.
6. Означення оберненої матриці. Умови її існування. Знаходження оберненої матриці.
7. Що називається рангом матриці? Як знайти ранг матриці?
8. Які перетворення матриці називають елементарними?

2.3. Основні типи задач

1. Додавання, віднімання матриць, множення матриці на число, множення матриць.
2. Знаходження матриці A^{-1}, оберненої до матриці A.

3. Визначення рангу матриці.
4. Розв'язання матричних рівнянь.

2.4. Задачі для самостійного розв'язання

10. Перевірити, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти:

а) транспоновані матриці A^T, B^T; б) $3A$; в) $-2B$; г) $2A-3B$;

д) $A^T + B^T$; е) $2A-B^T$; є) $3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}^T - 2(0\ 1\ {-3}\ 5)$.

12. Знайти добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$;

г) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}(4\ \ 0\ \ {-2}\ \ 3\ \ 1)$.

13. Знайти обернену матрицю до заданої:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

14. Розв'язати матричне рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Визначити ранг матриці:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

16. Три фабрики випускають кондитерські вироби А, В та С вищої, першої та другої категорій якості. Кількість виробленої продукції кожною фабрикою за категоріями якості подано в таблиці. Визначити загальний обсяг випуску кондитерських виробів за категоріями. Записати у вигляді матриць подану в таблиці інформацію.

Категорія якості	**Кількість виробленої продукції фабрикою**								
	першою			**другою**			**третьою**		
	А	**В**	**С**	**А**	**В**	**С**	**А**	**В**	**С**
Вища	75	120	98	115	82	135	64	150	220
Перша	80	110	145	160	130	50	45	60	55
Друга	20	25	10	40	30	20	20	10	25

17. Підприємство випускає три види продукції, яка характеризується матрицею-планом X = (15; 10; 8). При випуску продукції використовують сировину чотирьох видів:

$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 5 \\ 5 & 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, де a_{ij} — витрати j-го виду сировини на одиницю i-го виду продукції.

Матриця В = (8; 4; 5; 10) задає вартість одиниці сировини кожного виду.

Визначити:

а) необхідну кількість сировини кожного виду для забезпечення плану;

б) вартість одиниці сировини кожного виду;

в) загальну вартість сировини при виконанні плану випуску Х.

Література [1, с. 9–16, 26–35; 2, с. 13–20; 3, с. 11–18, 28–30; 4, с. 7–11; 6, с. 3–11, 18–24]

Тема 3. Системи m лінійних рівнянь з n невідомими

1. Підготовка до поточних аудиторних занять

3.1. Довідковий матеріал

Основні методи розв'язання систем рівнянь

Метод оберненої матриці. Якщо матриця A системи невироджена, розв'язок системи задається формулою

$$X = A^{-1}B.$$

Формули Крамера. Позначимо $\Delta = |A|$ основний визначник системи. Обчислимо допоміжні визначники Δ_j, які відповідають матрицям, одержаним заміною j-го стовпця цієї матриці на стовпець B. Тоді розв'язок системи рівнянь можна подати у вигляді рівностей:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}; \quad j = \overline{1,n}.$$

Метод Гаусса. Це метод послідовного виключення невідомих. За допомогою елементарних перетворень розширена матриця системи приводиться до сходинкового (трикутного) вигляду.

3.2. Питання для самоконтролю

1. Що називається системою m лінійних рівнянь з n невідомими?
2. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною; несумісною; визначеною; невизначеною?
3. Записати формули Крамера. Коли вони застосовуються?
4. У чому полягає метод Гаусса?
5. Записати систему лінійних рівнянь матричним способом.
6. За яких умов систему лінійних рівнянь можна розв'язати матричним способом?
7. Навести приклад однорідної системи лінійних рівнянь.
8. За яких умов система однорідних рівнянь буде визначеною; невизначеною?
9. Сформулювати критерій сумісності системи.

3.3. Основні типи задач

1. Розв'язання систем лінійних рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса;

в) матричним методом;

г) дослідженням сумісності систем.

3.4. Завдання для самостійного розв'язання

18. Розв'язати за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 5x+2y=4; \\ 7x+4y=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=5; \\ x+3z=16; \\ 5y-z=10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y-z=1; \\ x+2y+3z=5; \\ x+3y+4z=6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7x+3y-6z=-1; \\ 7x+9y-9z=5; \\ 2x-4y+9z=28; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4; \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2; \\ x_1+x_2+2x_3=-1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31; \\ 5x_1+x_2+2x_3=29; \\ 3x_1-x_2+x_3=10; \end{cases}$ є) $\begin{cases} 14x+4y+6z=30; \\ 5x-3y+2z=15; \\ 10x-11y+5z=36; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x-y+z=2; \\ 3x+2y+2z=-2; \\ x-2y+z=1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3x-5y+3z=1; \\ x+2y+z=4; \\ 2x+7y-z=8; \end{cases}$

і) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=11; \\ 2x_1-x_2-x_3=4; \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11; \end{cases}$ й) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=1; \\ 2x_1+x_2+3x_3=11; \\ 3x_1+2x_2+x_3=5. \end{cases}$

19. Розв'язати методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=5; \\ x+3y+4z=6; \\ 2x-y-z=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+z=4; \\ 2x-y+z=3; \\ 3x+2y+2z=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y-z=-2; \\ 3x-y+2z=9; \\ 4x+4y-3z=-5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 5; \\ 4x + 3y - 4z = 7; \\ 4x + 8y - 12z = 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0; \\ 8x + 2y - z = 21; \\ 2x + 11y - 16z = 21; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - y + 2z = 3; \\ -x + 2y - 3z = 3; \\ 2x - y + 3z = 2. \end{cases}$

20. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} x + 2y - z = -3; \\ 3x + 4y + z = 1; \\ 5x + y - 3z = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -5; \\ 4x + 2y - 3z = 0; \\ 3x - 3y + 5z = -9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y + z = 5; \\ 3x + 4y - 2z = -3; \\ x - 3y + z = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 9; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$

21. Розв'язати систему однорідних рівнянь:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0; \\ 2x + y + z = 0; \\ 3x - 3y + 6z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + y - 2z = 0; \\ 2x - 2y + 4z = 0; \\ 2x + y - z = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0; \\ x - 4y - 3z = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0; \\ 2x - y + 3z = 0; \\ x + y - z = 0. \end{cases}$

22. Дослідити на сумісність систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y - 3z = -1; \\ 2x + y - 2z = 1; \\ x + y + z = 3; \\ x - 2y - 3z = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = -1; \\ 3x - y = 4; \\ 2x + y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y + z = 12; \\ 2x + z + y = 11; \\ x + 3y + z = 15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

2. Пошуково-аналітична робота

Зробити огляд літературних джерел [1; 3; 5; 7] з позицій застосування лінійної алгебри до розв'язання економічних задач. Підготувати матеріали для обговорення на аудиторних заняттях.

Література [1, с. 38–54; 2, с. 20–31; 3, с. 43–59; 4, с. 12–13; 6, с. 25–37]

Література

Основна

1. *Высшая* математика для экономистов: Учеб. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2000. — 472 с.
2. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика: Навч. посіб. — К.: А.С.К:, 2001 — 648 с.
3. *Жильцов О. Б., Торбін Г. М.* Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навч. посіб. — К.: МАУП, 2002. — 408 с.
4. *Лубенська Т. В., Чупаха Л. Д.* Вища математика в таблицях: Довідник. — К.: МАУП, 2002. — 88 с.
5. *Почтман Ю. Ю.* Основы математики: Учеб.-метод. пособие. — К.: МАУП, 1997. — 144 с.
6. *Практикум* з вищої математики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / І. І. Юртин, О. Ю. Дюженкова, О. Б. Жильцов та ін.; За ред. І. І. Юртина. — К.: МАУП, 2003. — 248 с.

Додаткова

7. *Данко П. Е., Кожевников А. Г., Попов А. Г.* Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высш. шк., 1986. — Ч. I. — 354 с.
8. *Дюженкова О. Ю.* Тестові завдання з дисципліни "Вища математика". — К.: МАУП, 1999. — 56 с.
9. *Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О.* Вища математика: Приклади і задачі: Посібник. — К.: Видав. центр "Академія", 2003. — 624 с.
10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1968. — 232 с.
11. *Клепко В. Ю., Голець В. Л.* Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посіб. — К.: Центр навч. літ., 2006. — 600 с.
12. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ: В 2 т. — М.: Высш. шк., 1970. — Т. 1. — 590 с.

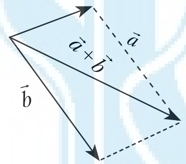
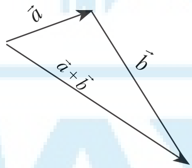
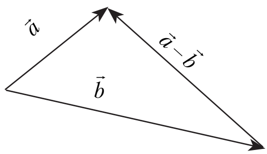
13. *Соколенко О. І., Новик Г. А.* Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посіб. — К.: Либідь, 2001. — 248 с.

Змістовий модуль ІІ. Векторна алгебра і аналітична геометрія

Тема 4. Вектори. Дії над векторами. Скалярний добуток векторів

Підготовка до поточних аудиторних занять

4.1. Довідковий матеріал

Назва операції	Лінійні операції з векторами, заданими	
	геометрично	у координатній формі
1	2	3
Додавання векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	Правило паралелограма  Правило трикутника 	$\vec{a}+\vec{b} = (x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) = (x_1+x_2; y_1+y_2; z_1 + z_2)$
Віднімання векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$		$\vec{a}-\vec{b} = (x_1; y_1; z_1) - (x_2; y_2; z_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$

1	2	3
Множення вектора $\vec{a}$ на число λ	$\xrightarrow{\quad\vec{a}\quad}$ $\lambda>0$ $\xrightarrow{\quad\lambda\vec{a}\quad}$ $\lambda>1$ $\xrightarrow{\quad\lambda\vec{a}\quad}$ $0<\lambda<1$ $\xrightarrow{\quad\vec{a}\quad}$ $\lambda<0$ $\xleftarrow{\quad\lambda\vec{a}\quad}$ $\lvert\lambda\rvert>1$ $\xleftarrow{\quad\lambda\vec{a}\quad}$ $\lvert\lambda\rvert<1$	$\lambda_1\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)=$ $=(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1)$

Обчислення геометричних величин

Назва	Вектори, задані геометрично	Вектори, задані в координатній формі
Довжина вектора $\vec{a}$ ($\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$)	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{\vec{a}^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}$
Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ ($\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$)	$\cos\alpha=\dfrac{(\vec{a},\vec{i})}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\beta=\dfrac{(\vec{a},\vec{j})}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\gamma=\dfrac{(\vec{a},\vec{k})}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$	$\cos\alpha=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$,

4.2. Питання для самоконтролю

1. Що називається вектором; ортом; нуль-вектором?
2. Які вектори називаються рівними, колінеарними, компланарними?
3. Як визначається сума двох (кількох) векторів, їх різниця, добуток вектора на число?
4. Властивості операцій над векторами: додавання векторів; множення вектора на число.
5. Що називається базисом на прямій, площині, у просторі?

6. Що називається проекцією вектора на вісь?
7. Сформулювати властивості проекції.
8. Як визначаються координати і довжина вектора?
9. Як знайти відстань між точками, заданими своїми координатами?
10. Що називається напрямними косинусами вектора і як їх знайти?
11. Як визначаються лінійні операції над векторами, заданими своїми координатами?
12. Умови рівності та колінеарності векторів, заданих своїми координатами.
13. Формули для координат точки, яка ділить відрізок у відношенні.
14. Що називається скалярним добутком двох векторів?
15. Властивості скалярного добутку.
16. Як обчислюється скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами?
17. Необхідна і достатня умова перпендикулярності (колінеарності) двох векторів.

4.3. Основні типи задач

1. Виконання лінійних операцій над векторами (додавання, віднімання векторів, множення вектора на число, проекція вектора на вісь).
2. Знаходження координат, довжини і напрямних косинусів вектора.
3. Виконання лінійних операцій над векторами, заданими в координатній формі. Встановлення рівності та колінеарності векторів.
4. Знаходження скалярного добутку векторів та кута між векторами.

4.4. Задачі для самостійного розв'язання

23. У трикутнику ABC проведені медіани $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$. Подати вектори $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ у вигляді лінійних комбінацій векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.
24. У трикутнику ABC проведені медіани $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ і $\overline{CF}$. Знайти суму векторів $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ і $\overline{CF}$.
25. Дано тетраедр $OABC$. Виразити через вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ і $\overline{OC}$ вектор $\overline{EF}$ з початком у середині E ребра $\overline{OA}$ і кінцем у точці F перетину медіан трикутника ABC.

26. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$;
в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $-\vec{a}-\vec{b}$.

27. Дано: $|\vec{a}|=13,\ |\vec{b}|=19$ і $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Обчислити $|\vec{a}-\vec{b}|$.

28. Три вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ є сторонами трикутника. Через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виразити вектори, що збігаються з медіанами трикутника $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ і $\overrightarrow{CP}$.

29. Три сили $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ і $\vec{F_3}$ прикладені в одній точці й мають взаємно перпендикулярні напрями. Визначити модуль їх рівнодійної, якщо $|\vec{F_1}|=10H,\ |\vec{F_2}|=11H,\ |\vec{F_3}|=2H$.

30. Використовуючи паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перевірити на рисунку справедливість тотожності:

а) $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}$; б) $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{b}$.

31. Знайти точку N, з якою збігається кінець вектора $\vec{a}=(3; -1; 4)$, якщо його початок збігається з точкою $M(1; 2; -3)$.

32. Визначити початок вектора $\vec{a}=(2; -3; -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $(1; -1; 2)$.

33. Обчислити модуль вектора $\vec{a}=(3; -6; 2)$.

34. Дано дві координати вектора $a_x=4$, $a_y=-12$. Визначити його третю координату a_z, якщо $|\vec{a}|=13$.

35. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz, і його довжина:

а) $|\vec{a}|=4$, $\alpha=45°$, $\beta=60°$, $\gamma=120°$;
б) $|\vec{a}|=4$, $\alpha=60°$, $\beta=45°$, $\gamma=60°$;
в) $|\vec{a}|=8$, $\alpha=135°$, $\beta=60°$, $\gamma=60°$;
г) $|\vec{a}|=2$, $\alpha=120°$, $\beta=45°$, $\gamma=120°$;
д) $|\vec{a}|=6$, $\alpha=120°$, $\beta=60°$, $\gamma=45°$.

36. Дано точки A (0; 4; –6), B (3; 0; 6) і C (1; 2; –4). Обчислити:

а) $(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})$; б) $\sqrt{\overrightarrow{CA}^2}$;
в) координати вектора $\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AB})$.

37. Дано вектори $\vec{a}$ =(4; –1; 7) і $\vec{b}$ =(–1; 2; 1). Знайти проекції на координатні осі векторів:

а) $(\vec{a}-\vec{b})$; б) $\vec{a}+3\vec{b}$; в) $3-(2\vec{a}+\vec{b})-2\vec{b}$; г) $-\vec{a}-2\vec{b}+5(\vec{a}+\vec{b})$.

38. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a}$ = (3; –2; 1) та $\vec{b}$ = (–9; 6; –3) і встановити, який з них довший і у скільки разів.

39. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\vec{a}$ = (–6; β; 2) та $\vec{b}$ = =(α; 4; –1) колінеарні.

40. Дано точки A (5; 0; 2), B (–3; 3; –1), C (1; 2; –3), D (5; –4; 3). Чи можуть вони бути вершинами трапеції?

41. Дано точки A (–1; 5; –10), B (5; –7; 8), C (2; 2; –7), D (5; –4; 2). Перевірити, чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, і встановити, який з них довший і у скільки разів, як вони спрямовані — в один бік або у протилежні.

Література [1, с. 63–67; 2, с. 70–74; 3, с. 15–19; 4, с. 38–46]

Тема 5. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів

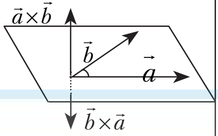
Підготовка до поточних аудиторних занять

5.1. Довідковий матеріал

Основні види добутків векторів

$$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1);\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2);\ \vec{c}=(x_3,y_3,z_3).$$

Назва і позначення	Вектори, задані геометрично	Вектори, задані в координатній формі	Обчислення геометричних величин
1	2	3	4
Скалярний добуток $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $(\vec{a},\vec{b})$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ або $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\, np_{\vec{a}}\vec{b}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+$ $+y_1y_2+z_1z_2$	$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}=$ $=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

1	2	3	4
Векторний добуток $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}$	1. $\vec{c}\perp\vec{a}, \quad \vec{c}\perp\vec{b}.$ 2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — права трійка. 3. $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$  	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$ або $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-$ $-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+$ $+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}$	Площа паралелограма *ABCD* $s_{ABCD}=\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert,$ де $\vec{a}=\overrightarrow{AB};$ $\vec{b}=\overrightarrow{AC};$ $s_{ABC}=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & z_{y2}\end{vmatrix}^2}$
Мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$: $(\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{c}$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{c}$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$	$V_{пір}=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\,(\vec{a}\vec{b}\vec{c}),$ де $\vec{a}=\overrightarrow{AB};$ $\vec{b}=\overrightarrow{AC}; \quad \vec{c}=\overrightarrow{AS}.$ $V_{пір}=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$ $V_{пар}=\mathrm{mod}\,(\vec{a}\vec{b}\vec{c}),$ де $\vec{a}=\overrightarrow{AB};$ $\vec{b}=\overrightarrow{AD}; \; \vec{c}=\overrightarrow{AA_1}.$
Взаємне розміщення векторів	Аналітичний вираз характеристики		
	Векторна форма		Координатна форма
1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$		$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$
2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні	$\vec{a}\times\vec{b}=0$		$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$

3. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

5.2. Питання для самоконтролю

1. Що називається векторним добутком двох векторів?
2. Сформулювати і записати алгебраїчні властивості векторного добутку.
3. Записати формулу для обчислення векторного добутку двох векторів, заданих координатами у прямокутній системі координат.
4. Сформулювати геометричні властивості векторного добутку.
5. Що називається мішаним добутком трьох векторів?
6. Записати формулу для обчислення мішаного добутку трьох векторів, заданих координатами у прямокутній системі координат.
7. Сформулювати геометричний зміст мішаного добутку.
8. Сформулювати необхідну і достатню умову компланарності векторів.
9. Записати твердження у векторній та координатній формах:

   а) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

   б) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні;

   в) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні;

   г) точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ лежать в одній площині.

5.3. Основні типи задач

1. Обчислення векторного і мішаного добутків заданих векторів.
2. Дослідження взаємного розміщення двох векторів, обчислення кута між заданими векторами.
3. Обчислення площі паралелограма і трикутника.
4. Встановити, чи будуть вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарними (лінійно залежними, лінійно незалежними).
5. Обчислення об'єму паралелепіпеда та трикутної піраміди.

5.4. Задачі для самостійного розв'язання

42. Знайти модуль векторного добутку $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, якщо:

   а) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$;

б) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 10,\ (\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\pi}{6};$

в) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ (\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}.$

43. Знайти векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$:

а) $\vec{a} = 2\vec{i} + 11\vec{j} - 10\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$;

б) $\vec{a} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$;

в) $\vec{a} = (1;\ 2;\ -2)$, $\vec{b} = (8;\ 6;\ 4)$.

44. Дано вектори $\vec{a}$ =(3; –1; 2) і $\vec{b}$ =(1; 2; –1). Знайти координати векторів:

а) $\vec{a}\times\vec{b}$; б) $(2\vec{a} + \vec{b})\ (2\vec{a} - \vec{b})$.

45. Дано точки A (4; 1; 4), B (3; 4; 1), C (5; 4; 3). Знайти координати векторних добутків:

а) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$; б) $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$.

46. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$;

б) $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{k}$.

47. Обчислити площу трикутника ABC, заданого вершинами A, B і C, якщо:

а) A (4; 2; 3), B (5; 1; 2), C (6; 5; 8);

б) A (–1; –1; –1), B (0; 1; 2), C (2; 1; 0);

в) A (0; –1; 3), B (–5; 0; 4), C (1; 4; 3);

г) A (1; 2; 3), B (–1; 3; 0), C (–2; –3; –5).

48. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a}$ =(4; –4; 2), $\vec{b}$ (2; 3; 6); б) $\vec{a}$ = (2; –4; –4), $\vec{b}$ (2; 1; –2);

в) $\vec{a}$ =(2; 1; –2), $\vec{b}$ (6; –3; 2); г) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 11\vec{i} + 10\vec{j} + 2\vec{k}$;

д) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

49. Обчислити мішані добутки $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ заданих векторів:

а) $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$; б) $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i}$;

в) $\vec{a} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - 9\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

50. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо:
$\vec{a} = (3; 2; 2)$, $\vec{b} = (1;-1; 3)$, $\vec{c} = (1; 9; -11)$.

1. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

а) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$;

б) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$;

в) $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \overline{2i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

52. Об'єм піраміди $V = 2$, три її вершини лежать у точках A (2; 1; 3), B (3; 3; 2), C (1; 2; 4). Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі Oz.

53. Обчислити об'єм піраміди $ABCD$ з вершинами в точках:

а) A (3; –2; 5), B (1; 3; 1), C (–1; –1; 3), D (4; 3; 4);
б) A (1; –2; –1), B (4; 4; 4), C (2; 1; –1), D (3; 0; 3);
с) A (6; 1; 4), B (2; –2; –5), C (7; 1; 3), D (1; –3; 7);
д) A (1; 2; 6), B (0; 3; 8), C (–5; –1; 4), D (–3; 2; –6).

54. Довести, що точки A (2; 3; –1), B (1; 2; 5), C (0; 3; 1), D (3; 2; 3) лежать в одній площині.

Література [2, с. 79–84; 3, с. 20–21; 4, с. 46–52]

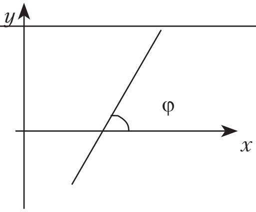
Тема 6. Рівняння ліній на площині

Підготовка до поточних аудиторних занять

6.1. Довідковий матеріал

Основні види рівнянь прямої на площині

Дано	Вид рівняння	Назва рівняння
1	2	3
$A(x_0, y_0)$ — точка прямої $\vec{S} = (s_1, s_2)$ — напрямний вектор прямої	$\dfrac{x - x_0}{s_1} = \dfrac{y - y_0}{s_2}$	Канонічне рівняння прямої
$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві точки

1	2	3
$M_1(a;0), M_2(0;b)$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	Рівняння прямої у відрізках на осях
	$y=kx+b,\quad$ де $k=tg\varphi$	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом
$A(x_0, y_0)$, $\vec{n}=(A;B)$ перпендикулярний до прямої	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ $Ax+By+C=0$	Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до вектора $\vec{n}$. Загальне рівняння прямої

Взаємне розміщення прямих

а) $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $\quad l_2: A_2x+B_2y+C_2=0;\quad$.

$\vec{n}_1=(A_1B_1,\ \vec{n}_2=(A_2B_2$ — вектори нормалей прямих, $\varphi=(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}};\quad l_1//l_2 \text{ при } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2};$$

$$l_1\perp l_2 \text{ при } A_1A_2+B_1B_2=0;$$

$l_1: y=k_1x+b_1;\ y=k_2x+b_2;\ l_1//l_2$ при $k_1=k_2;\ l_1\perp l_2$ при $k_1k_2=-1$.

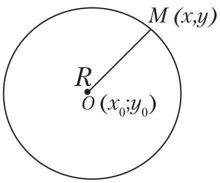
Відстань від точки $M_0\ (x_0, y_0)$ до прямої $Ax + Bx + C = 0$.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

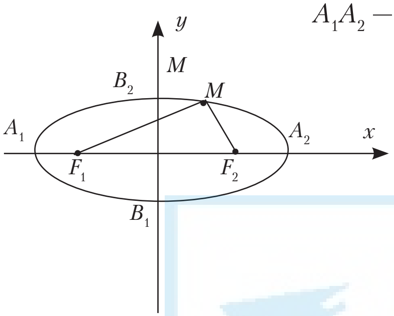
Лінії другого порядку

Коло

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ — канонічне рівняння кола з центром у точці (x_0, y_0) і радіуса R.



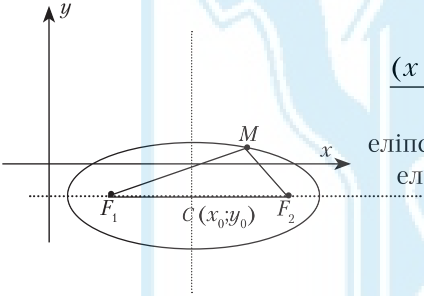
Еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — канонічне рівняння еліпса;



A_1A_2 — велика вісь еліпса, B_1B_2 — мала вісь;
$F_1M + F_2M = 2a = \text{const}$;
F_1,F_2 — фокуси еліпса;
$F_1\,F_2$ — фокусна відстань;
$F_1\,F_2 = 2c$, $c < a$, $F_1\,B_2 = a$.

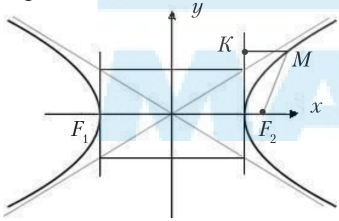
$\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1-$*ексцентриситет еліпса*;

$b=\sqrt{a^2-c^2}$ — мала піввісь



$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ — рівняння еліпса з центром у точці $C\,(x_0, y_0)$, осі еліпса паралельні осям координат.

Гіпербола



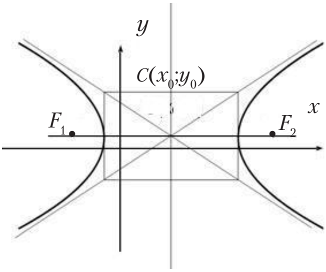
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — канонічне рівняння гіперболи.

$\left|F_1M-F_2M\right|=2a=\text{const}$;
$F_1F_2=2c>2a$.

$\varepsilon=\dfrac{c}{a}>1$ — ексцентриситет гіперболи.

$b=\sqrt{c^2-a^2}$ — мала піввісь,

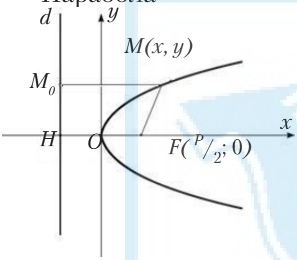
$x=\pm\dfrac{\alpha}{\varepsilon}$ — директриси гіперболи.



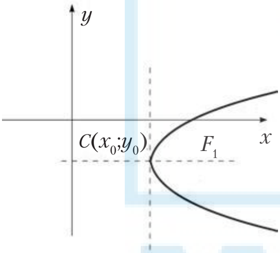
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ — рівняння гіпербли з центром у точці $C(x_0, y_0)$, а осі гіперболи паралельні координатним осям.

$x = x_0 \pm \dfrac{\alpha}{\varepsilon}$ — директриси гіперболи.

Парабола



$y^2 = 2p$ — канонічне рівняння параболи.
$HO = OF$. d — директриса параболи,
O — вершина параболи,
$F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$, $H\left(-\dfrac{p}{2}; 0\right)$, $M_0\left(-\dfrac{p}{2}; y\right)$



$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$;
$((x-x_0)^2 = 2p(y-y_0))$ — рівняння параболи з вершиною в точці $C(x_0, y_0)$, а вісь параболи паралельна осі Ox (Oy).

6.2. Питання для самоконтролю

1. Записати рівняння прямої:
   а) що проходить через задану точку паралельно вказаному вектору;
   б) з кутовим коефіцієнтом;
   в) що проходить через дві задані точки;
   г) у відрізках на осях координат.
2. Дослідити загальне рівняння прямої.
3. Як знайти кут між двома прямими?

4. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.
5. Записати формулу для знаходження відстані точки від прямої.
6. Що називається колом? Записати рівняння кола радіуса R з центром:
   а) у початку координат;
   б) у точці $M_0\ (x_0, y_0)$.
7. Що називається еліпсом? Записати канонічне рівняння еліпса. Як визначаються півосі, фокуси й ексцентриситет еліпса?
8. Що називається гіперболою? Записати канонічне рівняння гіперболи. Як визначаються півосі, фокуси й ексцентриситет гіперболи?
9. Що називається параболою? Записати канонічне рівняння параболи. Означення фокусу і директриси параболи.

6.3. Основні типи задач

1. Записати рівняння прямої, що задовольняє вказаним вимогам, побудувати її графік.
2. Встановити взаємне розміщення заданих прямих (обчислити кут між заданими прямими, знайти координати точки їх перетину).
3. Дослідити положення прямої на площині.
4. Знайти відстань від точки до прямої.
5. З'ясувати, які лінії задані наведеними рівняннями.
6. Записати рівняння кола (еліпса, гіперболи, параболи), що задовольняють вказаним вимогам. Побудувати їх графіки.

6.4. Задачі для самостійного розв'язання

55. Записати рівняння прямої, привести його до загального виду, записати у відрізках на осях та побудувати пряму; знайти відстань від початку координат до прямої, якщо вона задана:

а) точкою $M_0\ (x_0; y_0)$ і вектором нормалі $\vec{n} = (A;\ B)$:

а) $M_0\ (-1; 2),\ \vec{n} = (2; 2)$; б) $M_0\ (2; 1),\ \vec{n} = (2; 0)$;
в) $M_0\ (1; 1),\ \vec{n} = (2; -1)$;

б) задана точкою $M_0\ (x_0; y_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n)$:

а) $M_0\ (-1; 2),\ \vec{s} = (3; -1)$; б) $M_0\ (1; 1),\ \vec{s} = (0; -1)$;
в) $M_0\ (-1; 1),\ \vec{s} = (2; 0)$;

в) задана двома точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$:

а) $M_1\ (1; 2),\ M_2\ (-1; 0)$; б) $M_1\ (1; 1),\ M_2\ (1; 2)$;

в) $M_1 (2; 2)$, $M_2 (0; 2)$.

56. Визначити кутовий коефіцієнт k і відрізок b, який відтинає пряма на осі Oy, якщо вона задана рівняннями:

а) $5x - y + 3 = 0$; б) $2x + 3y - 6 = 0$;
в) $5x + 3y + 2 = 0$; г) $3x + 2y = 0$; д) $y - 3 = 0$.

57. Задано сторони трикутника рівняннями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Визначити координати його вершин, внутрішні кути трикутника.

58. Задано пряму і точку M. Записати рівняння прямої, що проходить через точку M:

1) перпендикулярно до заданої прямої;
2) паралельно заданій прямій;
3) під кутом 45° до заданої прямої, якщо:

а) $y - 2x - 1 = 0$, $M(-1; 2)$; б) $2y + 1 = 0$, $M(1; 0)$;
в) $x + y + 1 = 0$, $M(0; 1)$; г) $2x + 3y + 4 = 0$, $M(2; 1)$.

59. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M(-2; 4)$ паралельно осі:

1) Ox; 2) Oy.

60. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих

$7x - y + 3 = 0$ і $3x + 5y - 4 = 0$ і точку $A(2; -1)$.

61. Через точку перетину прямих $2x + 5y - 8 = 0$ і $x - 3y + 4 = 0$ провести пряму, яка:

1) проходить через початок координат;
2) паралельна осі абсцис;
3) паралельна осі ординат;
4) проходить через точку (4; 3).

62. Рівняння двох сторін паралелограма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, а рівняння однієї з його діагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Визначити координати вершин цього паралелограма.

63. Середини сторін трикутника лежать у точках $M_1 (2; 1)$, $M_2 (5; 3)$ і $M_3 (3; -4)$. Скласти рівняння його сторін.

64. Визначити, при якому значенні параметра a три прямі $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$ і $3x + ay - 2 = 0$ проходять через одну точку.

65. Знайти точку Q, симетричну точці $P\ (-5;\ 13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

66. Знайти проекцію точки $P\ (-8;\ 12)$ на пряму, що проходить через точки $A\ (2;\ -3)$ і $B\ (-5;\ 1)$.

67. Скласти рівняння прямих, паралельних прямій $5x + 12y + 20 = 0$, що розміщені від неї на відстані двох одиниць.

68. Через точку $M_1\ (1;\ 2)$ провести прямі, розміщені на однаковій відстані від точок $M_2\ (2;\ 3)$ і $M_3\ (4;\ -5)$.

69. Записати рівняння бісектрис кутів між прямими $3x + 4y - 12 = 0$ і $y = 0$.

70. Переконатися, що точки $A\ (-4;\ -3)$, $B\ (-5;\ 0)$, $C\ (5;\ 6)$ та $D\ (1;\ 0)$ є вершинами трапеції. Знайти висоту трапеції.

71. Скласти рівняння кола, що дотикається до двох паралельних прямих $2x + y - 5 = 0$ і $2x + y + 15 = 0$, причому до однієї з них — у точці $A\ (2;\ 1)$.

72. Скласти рівняння кола, що дотикається до осі Ox у початку координат і перетинає вісь Oy у точці $M\ (0;\ -8)$.

73. Скласти рівняння кола, що дотикається до осі Oy у початку координат і перетинає вісь Ox у точці $M\ (4;\ 0)$.

74. Встановити, що кожне з рівнянь визначає коло, знайти його центр C та радіус R:
   а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;
   б) $x^2 + y^2 - 8x = 0$;
   в) $x^2 + y^2 + 4y = 0$;
   г) $2x^2 + 2y^2 - 12x + y + 3 = 0$;
   д) $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$.

75. Записати рівняння діаметра кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, перпендикулярного до прямої $5x + 2y - 13 = 0$.

76. Задано рівняння еліпса $9x^2 + 5y^2 = 45$. Визначити:
   1) його осі;
   2) координати фокусів;
   3) ексцентриситет.

77. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $x^2 + 5y^2 = 20$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.

78. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

а) $45x^2 - 36y^2 - 90x - 24y + 41 = 0$;
б) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.

79. Побудувати гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти:

а) півосі; б) координати фокусів;
в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот.

80. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі ординат симетрично початку координат, якщо:

1) її осі $2a = 16$, $2b = 36$;
2) відстань між фокусами $2c = 10$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;
3) рівняння асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ і відстань між вершинами дорівнює 48.

81. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо:

1) відстань фокуса, що лежить на осі Ox, до вершини дорівнює чотирьом;
2) відстань фокуса, розміщеного на осі Oy, до директриси дорівнює шести;
3) парабола симетрична осі абсцис і проходить через точку M (1; 2);
4) парабола симетрична осі ординат і проходить через точку M (5; 1).

Література [1, с. 95–118; 2, с. 89–114; 3, с. 22–28; 4, с. 53–67]

Тема 7. Рівняння прямої та площини у просторі

Підготовка до поточних аудиторних занять

7.1. Довідковий матеріал

Види рівнянь площини

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ — рівняння площини, що проходить через точку $A(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$.

$Ax + By + Cz + D = 0$ — загальне рівняння площини

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Рівняння площини у відрізках на осях.

Види рівнянь прямої у просторі

Канонічне рівняння $\dfrac{x-x_0}{s_1} = \dfrac{y-y_0}{s_2} = \dfrac{z-z_0}{s_3}$, де $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — напрямний вектор; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка прямої.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки — $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Загальне рівняння прямої $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

Взаємне розміщення площин

$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,

$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — вектори нормалей площин;

$\alpha_1 \parallel \alpha_2$ при $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$; $\alpha_1 \perp \alpha_2$ при $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$,

α_1 і α_2 збігаються при $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

$l_1 : \dfrac{x-x_0}{s_1} = \dfrac{y-y_0}{s_2} = \dfrac{z-z_0}{s_3}$, $l_2 : \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{m_2} = \dfrac{z-z_1}{m_3}$,

$\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$; $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ — напрямні вектори прямих;

$l_1 \parallel l_2$ при $\dfrac{s_1}{m_1} = \dfrac{s_2}{m_2} = \dfrac{s_3}{m_3}$; $l_1 \perp l_2$ при $s_1m_1 + s_2m_2 + s_3m_3 = 0$.

Взаємне розміщення прямої і площини

$$\alpha: Ax+By+Cz+D=0,\ \ l: \frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{m_3},$$

$\vec{n}=(A,B,C)$ — вектор нормалі площини,
$\vec{m}=(m_1,m_2,m_3)$ — напрямний вектор прямої;

$$l\parallel\alpha:\ \ Am_1+Bm_2+Cm_3=0;\ \ l\perp\alpha:\ \frac{A}{m_1}=\frac{B}{m_2}=\frac{C}{m_3};$$

φ — кут між прямою і площиною;

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\right|}=\frac{\left|Am_1+Bm_2+Cm_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C_2}\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}}.$$

Відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **до площини** $Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

7.2. Питання для самоконтролю

1. Записати рівняння площини:
   а) загальне;
   б) що проходить через три точки;
   в) у відрізках на осях.
2. Записати формулу для обчислення кута між двома площинами.
3. Сформулювати і записати умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
4. Як обчислити відстань від точки до площини?
5. Записати рівняння прямої у просторі:
   а) яка задана точкою і напрямним вектором;
   б) яка проходить через дві точки;
   в) загальне.
6. Записати формулу для обчислення кута між двома прямими.
7. Сформулювати і записати умови паралельності прямих.
8. Як знайти кут між прямою і площиною?
9. Записати умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини.
10. Назвати спільні типи рівнянь прямої на площині та у просторі.
11. Сформулювати основні типи задач з теми “Пряма у просторі”.

7.3. Основні типи задач

1. Записати рівняння площини, що задовольняє вказаним вимогам.
2. Встановити взаємне розміщення двох (трьох) площин.
3. Знайти кут між заданими площинами.
4. Обчислити відстань від точки до площини.
5. Записати рівняння прямої у просторі, що задовольняє вказаним вимогам.
6. Дослідити взаємне розміщення прямої і площини. Обчислити кут між прямою і площиною.
7. Встановити взаємне розміщення двох прямих у просторі.

7.4. Задачі для самостійного розв'язання

82. Задано дві точки: M_1 (3; –1; 2) і M_2 (4; –2; –1). Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$.

83. Скласти рівняння площини, що проходить через точки:

1) M_1 (1; –3; 2) і M_2 (–2; 1; 4) паралельно осі Ox;
2) P_1 (–2; 1; –3) і P_2 (1; –3; –4) паралельно осі Oy;
3) Q_1 (4; –1; 1) і Q_2 (0; –2; –3) паралельно осі Oz.

84. Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки M_1, M_2 і M_3, якщо:

а) M_1 (1; 2; 0), M_2 (2; 1; 1), M_3 (3; 0; 1);
б) M_1(1; 1; 1), M_2 (0; –1; 2); M_3 (2; 3; –1).

85. З'ясувати взаємне розміщення заданих площин та обчислити косинус кута між ними, якщо:

1) $x - 2y + z - 1 = 0, y + 3z - 1 = 0$;
2) $2x - y + z - 1 = 0, \ \ 4x - 2y + 2z + 1 = 0$;
3) $x - y + 1 = 0, y - z + 1 = 0$;
4) $2x - y - z + 1 = 0, \ -4x + 2y + 2z - 2 = 0$.

86. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки M_1 і M_2, якщо:

а) M_1 (1; –2; 1), M_2 (3; 1; –1); б) M_1 (3; –1; 0), M_2 (1; 0; –3).

87. Знайти косинус кута між прямими:

а) $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0, \\ 2x - z + 5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0, \\ 3x - z = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-4y-2z=0, \\ 2x+y-2z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$

88. Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M_0 (2; 0; –3) паралельно:

а) вектору $\vec{s}$ = (2; –3; 5);

б) прямій $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$;

в) осі Ox;

г) осі Oz.

89. Зазначити, при якому значенні коефіцієнта A площина $Ax + 2y - z + 5 = 0$ паралельна прямій $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{2}$.

90. Зазначити, при яких значеннях коефіцієнтів A і B площина $Ax + By + 9z - 1 = 0$ перпендикулярна до прямої $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-3}{3}$.

91. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M (2; –1; 1) і відтинає від осей координат однакові відрізки.

92. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 (1; –3; 5) і відтинає на осях Oy і Oz вдвічі більші відрізки, ніж на осі Ox.

93. Знайти відстань від точки M (1; 5; 4) до площини, що відтинає на осях координат відрізки $a = 1$, $b = 5$ та $c = 4$.

94. Знайти відстань від початку координат до площини, що проходить через точки A (1; –1; 0), B (2; 1; –1), C (1; –1; –2).

95. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину двох площин $x + 2y - z = 0$ і $2x - y + z - 3 = 0$ перпендикулярно до площини, що проходить через точки (1; 1; 1), (0; 0; 1), (2; 0; 0).

96. Обчислити кути, утворені протилежними ребрами тетраедра з вершинами A (3; –1; 0), B (0; –7; 3), C (–2; 1; –1) та D (3; 2; 6).

97. Задано пряму $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ і точку M (0; 1; 2). Необхідно:

а) скласти рівняння площини, що проходить через задану пряму і точку M;

б) скласти рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої;

в) обчислити відстань від точки до прямої;

г) знайти проекцію точки M на задану пряму.

98. Задано площину $x - y - z + 1 = 0$ і пряму $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$;

Необхідно:

а) обчислити синус кута між площиною і прямою;

б) координати точки перетину прямої і площини;

в) скласти рівняння площини, що проходить через задану пряму перпендикулярно до площини.

99. Знайти відстань від точки A (1; -1; 0) до прямої, що проходить через точки B (0; 1; 2) і C (1; 0; 3).

100. Переконатися, що прямі $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0, \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ і $\frac{x}{3} = \frac{y+30}{-1} = \frac{z-2}{4}$ взаємно паралельні та знайти відстань між ними.

Література: [2, с. 119–133; 3, с. 28–35; 4, с. 67–78]

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Высшая* математика для экономистов: Учеб. для вузов / Н. Ш. Кре-мер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2000. — 472 с.
2. *Жильцов О. Б., Торбін Г. М.* Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навч. посіб. — К.: МАУП, 2002. — 408 с.
3. *Лубенська Т. В., Чупаха Л. Д.* Вища математика в таблицях: Довідник. — К.: МАУП, 2002. — 88 с.
4. *Практикум* з вищої математики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / І. І. Юртин, О. Ю. Дюженкова, О. Б. Жильцов та ін.; За ред. І. І. Юртина. — К.: МАУП, 2003. — 248 с.

Додаткова

5. *Данко П. Е., Кожевников А. Г., Попов А. Г.* Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высш. шк., 1986. — Ч. I. — 354 с.
6. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика: Навч. посіб. — К.: А.С.К., 2001. — 648 с.
7. *Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О.* Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. — К.: Видав. центр “Академія”, 2003. — 624 с.

8. *Дюженкова О. Ю.* Тестові завдання з дисципліни “Вища математика”. — К.: МАУП, 1999. — 56 с.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1968. — 232 с.
10. *Клепко В. Ю., Голець В. Л.* Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посіб. — К.: Центр навч. літ., 2006. — 600 с.
11. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ: В 2 т. — М.: Высш. шк., 1970. — Т. 1. — 590 с.
12. *Почтман Ю. Ю.* Основы математики: Учеб.-метод. пособие. — К.: МАУП, 1997. — 144 с.
13. *Соколенко О. І., Новик Г. А.* Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посіб. — К.: Либідь, 2001 — 248 с.

Змістовий модуль III. Диференціальне числення

Тема 8. Основи математичного аналізу

Підготовка до поточних аудиторних занять

8.1. Довідковий матеріал

Елементарні функції

№ пор.	Аналітичний запис	Назва функції	Область визначення
1. Елементарні функції			
1	2	3	4
1	$f(x)=kx+b$	Лінійна	$D(f)=R$
2	$f(x)=\frac{m}{\varphi(x)}$	Дробово-раціональна	$D(f):\varphi(x)\neq 0$
3	$f(x)=a^{\varphi(x)}$	Показникова	$D(f)=D(\varphi)$
4	$f(x)=\log_a \varphi(x)$	Логарифмічна	$D(f):\varphi(x)>0$
5	$f(x)=\sqrt[2k]{\varphi(x)}$	Степенева	$D(f):\varphi(x)\geq 0$

1	2	3	4
6	$f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$	Тригонометричні	$D(\sin)=D(\cos)=R$
7	$f(x)=\mathrm{tg}\, x$		$D(\mathrm{tg})=$ $=\left\{x / k\pi-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$
8	$f(x)=\mathrm{ctg}\, x$		$D(\mathrm{ctg})=$ $=\{x / k\pi<x<\pi+k\pi\}\ k\in z$
9	$f(x)=\arcsin x$, $f(x)=\arccos x$	Обернені тригонометричні	$D(\arcsin)=D(\arccos)=$ $=[-1;1]$
10	$f(x)=\mathrm{arctg}\, x$, $f(x)=\mathrm{arcctg}\, x$		$D(\mathrm{arctg})=D(\mathrm{arcctg})=R$

8.2. Питання для самоконтролю

1. Що називається функцією? Навести приклади.
2. Що називається областю визначення та множиною значень функції?
3. Які функції називаються основними елементарними? Їх графіки.
4. Яка функція називається парною, непарною, періодичною, обмеженою? Навести приклади.
5. Змінні та сталі величини.
6. Визначення та приклади послідовностей.
7. Границя функції. Основні теореми про границі.
8. Перша та друга важливі границі.
9. Розкриття невизначеностей.
10. Визначення неперервності функції.
11. Визначення та класифікація точок розриву.
12. Основні властивості неперервних функцій.

8.3. Основні типи задач

1. Встановлення властивостей елементарних функцій (області визначення, множини значень, парності, обмеженості, монотонності, періодичності).
2. Взаємно обернені задачі з послідовностями:
   а) за загальним членом послідовності записати кілька перших її членів;

б) за кількома першими членами послідовності записати формулу загального члена.

3. Обчислення границі послідовностей. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності і їх властивості.
4. Обчислення границі функції:
   а) у точці; б) на нескінченності;
   в) односторонніх границь; г) чудових границь.
5. Розкриття невизначеностей при обчисленні границь.
6. Дослідження функцій на неперервність.

8.4. Задачі для самостійного розв'язання

101. Знайти область визначення функції:

а) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}}$;

в) $y=\dfrac{5}{x^4+9}$; г) $y=\log_a(x^2-2x+3)$.

102. Знайти множину значень функції:

а) $y=\dfrac{1}{2\cos 4x+1}$; б) $y=\dfrac{1}{3+x^2}$.

103. Встановити парність функції:

а) $y=5^{|x|}$; б) $y=|x-1|+|x+2|$;

в) $y=x\cos x$; г) $y=2(x-1)^2+3$.

104. Записати формулу загального члена послідовності:

а) $\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{6};\ldots$ б) $\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{9};\dfrac{6}{27};\dfrac{8}{18};\ldots$ в) $1;\ \dfrac{3}{2!};\dfrac{5}{3!};\dfrac{7}{4!};\ldots$

105. Довести, що $x_n=\dfrac{2n}{n+3}$ прямує до 2 при необмеженому зростанні n.

Починаючи з якого n абсолютне значення різниці між x_n і 2 не перевищує 10^{-4}?

106. Довести, що для послідовності $\{x_n=1+(-1)^n\}$ при $n\to\infty$ границі не існує.
107. Послідовність $\{x_n\}$набуває значень: x_1 = 5; x_2 = 8; x_3 = 11; ... ; $xn = 3n + 2$; ...

Довести, що x_n нескінченно велика.

108. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+n-1}{2n^2-9n+3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-7n+3}{5n^2+8}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n+7}{3n^2-4}$.

109. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2n}{4n+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+4}{n(2-5n)}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+100n^2-5n-1}{27n^3+91n^2+5}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+8n^3-3}{2-6n^4-n^5}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(n-1)^3}{(2n+1)^3+(n-1)^3}$.

110. Записати формулу загального члена послідовності:

а) $-\frac{1}{2\cdot5}$; $\frac{1}{3\cdot6}$; $-\frac{1}{4\cdot7}$; $\frac{1}{5\cdot8}$; ...

б) $\frac{2}{3\cdot1}$; $\frac{3}{4\cdot2}$; $\frac{4}{5\cdot3}$; $\frac{5}{6\cdot4}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$; $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}$;

111. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3}{3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8x^2+1}{x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+4x+1}{\sqrt{x+4}}$.

112. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\operatorname{tg}x}{2+\cos2x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2x^2-x-1}{x-3}-2\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sqrt{x}+8x^2-1}{x+\sin5x}$.

113. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt[3]{x}}{x^2-2\quad-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4\quad+3}{x^3-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2}{x^2-x-6}$.

114. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-\quad+1}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5\quad+1}$.

115. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+1}{7+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+3}{1+5x^2-2x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+1}{5x^2+6x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4-1}{(2x+1)(3x-7)}$.

116. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{1-\cos^3 x}$; в) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x-1}\right)^x$;

г) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2x^3}$.

117. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

118. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{3x-1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{1-\sqrt{x^2+6x+10}}$.

119. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{1+2x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$.

120. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{\sqrt[3]{x-6}+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{9+2x}-5}$.

Пошуково-аналітична робота (індивідуальні завдання)

1. Проаналізувати літературні джерела і зробити добірку задач, розв'язання яких приводить до використання числа "e" (збільшення чисельності народонаселення, розпад радію, розмноження бактерій). Підготувати інформацію для обговорення на аудиторних заняттях.
2. Користуючись посібником [1], розглянути задачі про неперервне нарахування відсотків. Підготувати інформацію для обговорення на аудиторних заняттях.

Література [1, с. 125–175; 4, с. 159–198; 5, с. 88–128; 6, с. 37–41; 7, с. 79–108]

Тема 9. Основні відомості про похідну

Підготовка до поточних аудиторних занять

9.1. Довідковий матеріал

Правила диференціювання (всі розглядувані функції диференційовані)

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$.

2. $(uv)' = u'v + v'u$; $(cu)' = cu'$.

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ *при* $v \neq 0$.

4. $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$; $y'_x = y'_u\, u'_x$.

5. $\begin{cases} x = f(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases}$ $t \in (\alpha;\beta)$; $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

Таблиця похідних елементарних функцій u = u(x); v = v(x)

№ пор.	y	y'
1	2	3
1	$y = C$, де C = const	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
4	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
5	$y = a^u \quad (a > 0, a \neq 1)$	$y' = a^u \ln a\, u'$
6	$y = e^u$	$y' = e^u u'$
7	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
8	$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
9	$y = \sin u$	$y' = \cos u\; u'$
10	$y = \cos u$	$y' = -\sin u\, u'$
11	$y = \mathrm{tg}\, u$	$y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
12	$y = \mathrm{ctg}\, u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
13	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15	$y = \mathrm{arc\,tg}\, u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

1	2	3
16	$y = \operatorname{arcctg} u$	$y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
17	$y = u^v$	$y' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u\, v'$

9.2. Питання для самоконтролю

1. Що називається похідною функції?
2. Схема обчислення похідної функції.
3. Основні правила диференціювання.
4. Зазначте, чому дорівнює похідна:
   а) складної функції;
   б) функції, заданої параметрично;
   в) неявно заданої функції;
   г) степенево-показникової функції $U(x)^{V(x)}$.
5. Заповнити таблицю, де $u = u(x)$; $v = v(x)$.

№ пор.	y	y'
1	2	3
1	$y = u^n$	
2		$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
3		$y' = a^u \ln a\, u'$
4	$y = e^u$	
5	$y = \log_a u$	
6		$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
7	$y = \sin u$	
8		$y' = -\sin u\, u'$
9	$y = \operatorname{tg} u$	
10		$y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

1	2	3
11		$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12	$y = \arccos u$	
13	$y = \operatorname{arc\,tg} u$	
14		$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15		$y' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u\, v'$

6. Зазначити, у чому полягає зміст похідної:
   а) геометричний;
   б) механічний;
   в) економічний.
7. Зазначити, чи є диференційованими функції в заданих точках:

   а) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 0;$ б) $f(x) = |x-1|, \ x_0 = 1;$

   в) $f(x) = x^3 + x^2 + 1 \quad x \in R;$ г) $f(x) = \arcsin x, \ x = \pm 1.$
8. Перевірити, чи правильні твердження:
   а) Функція f диференційована в точці x_0, якщо вона в цій точці має скінченну похідну;
   б) якщо функція f неперервна в точці x_0, то вона диференційована в цій точці.
9. Означення похідних вищих порядків. Навести приклади.

9.3. Основні типи задач

1. Обчислення похідних заданих функцій.
2. Знаходження рівняння дотичної до графіка заданої функції в зазначеній точці.
3. Обчислення похідних вищих порядків від явно заданих функцій.

9.4. Завдання для самостійного розв'язання

121. Знайти тангенс кута нахилу до осі Ox дотичної, що проходить через точку M графіка функції f:

   а) $f_{(x)} = x^2, \ M(-3; 9);$ б) $f_{(x)} = \frac{1}{3}x^3 - x, \ M\left(2; \frac{2}{3}\right);$

в) $f_{(x)} = x^3,\ \ M(-1;-1)$; г) $f_{(x)} = x^2 + 2x,\ \ M(1;3)$.

122. Знайти точки графіка функції f, в яких дотична паралельна осі абсцис.

а) $f_{(x)} = x^3 - 3x^2 + 3x$; б) $f_{(x)} = \frac{1}{2}x^4 + 16x$;

в) $f_{(x)} = 3x^4 - 6x^2 + 2$; г) $f_{(x)} = x^3 - 3x^2 + 1$.

123. Записати рівняння дотичних до кривих:

а) $y = \cos x$ у точках A (0; 1); B ($\frac{\pi}{2}$; 0);

б) $y = x^2 + 1$ у точці з абсцисою $x = -1$;

в) $f_{(x)} = \frac{3}{x},\ \ x_0 = -1,\ \ x_0 = 1$;

г) $f_{(x)} = 2x - x^2,\ \ \ x_0 = 0,\ \ x_0 = 2$.

124. Знайти похідну функції:

а) $y = 4x^2 - 3x + 5$; б) $y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 1$;

в) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 5x^2 - x + 2$; г) $y = \frac{x^7}{7} - \frac{2x^6}{3} + 3x - 5$;

д) $y = \frac{9}{x^4}$; е) $y = \frac{x}{a} + \frac{a}{x} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2}$; є) $y = \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}$;

ж) $y = \frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}$; з) $y = x\sqrt[3]{x^2}(2-x)^2$; і) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - \frac{\sqrt[4]{x}}{3}$;

ї) $y = x^5(x^3 - 5)$.

125. Записати формули для обчислення похідної:

а) $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$; б) $y = \cos x$ та $y = \cos u$;

в) $y = \sin x$ та $y = \sin u$; г) $y = \mathrm{tg}x$ та $y = \mathrm{tg}u$;

д) $y = \mathrm{ctg}x$ та $y = \mathrm{ctg}u$; е) $y = a^u$ та $y = \mathrm{e}^u$;

є) $y = \log_a u$ та $y = \ln u$; ж) $y = u^v$, де $u = \cos x$; , $v = \varphi(x)$.

126. Обчислити похідну функції:

а) $y = \frac{1}{2}\sin^2\sqrt{x' - \frac{2}{5}\sin^5\sqrt{x}}$; б) $y = \left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2$;

в) $y = \frac{\mathrm{ctg}x}{\cos\frac{\pi}{3}} + 2x^2 - 3$; г) $y = \sqrt{\cos\sqrt[3]{x+1}}$;

д) $y = 2\sin x + 2x\cos x + x^2\sin x$; е) $y = 2x^2\ln x - x^4$;

є) $y = \ln(3x^2 - x^3)$; ж) $y = \lg\sin 3x$; з) $y = \lg\cos 5x$;

і) $y = \frac{1}{5}x^5\ln x - \frac{1}{8}x^8 + 5;$; ї) $y = \ln\frac{x^3+1}{x^3}$; й) $y = \frac{3x+2}{\lg x}$;

к) $y = \log_3\ln 5x$; л) $y = \ln\left(\mathrm{ctg}x + \frac{1}{\sin x}\right)$; м) $y = \ln\frac{(x+3)(x-1)^3}{(x+2)^2(x-5)}$;

н) $y = \ln\frac{x+1}{x-1} + 4\mathrm{arcctg}x$.

127. Знайти похідну функції:

а) $y = \frac{1}{3}x^3\sin 3x$; б) $y = \sin^2\frac{x}{4}$; в) $y = \left(\sin\frac{x}{4} - \cos\frac{x}{4}\right)^2$;

г) $y = x^3\mathrm{tg}x - 10x$; д) $y = \mathrm{ctg}x - 2x + 3$; е) $y = \mathrm{tg}^4 3x$;

є) $y = \mathrm{ctg}^3 4x$; ж) $y = \cos 3x$; з) $y = \cos^5 2x$;

і) $y = \frac{\mathrm{ctg}\, x}{x+1}$; ї) $y = \frac{1}{5}\sin^5 x - \sin x + \sin\frac{\pi}{9}$; й) $y = 1 + \cos^2\frac{x}{2}$;

к) $y = x\,\mathrm{tg}3x$; л) $y = (2x - 1)\,\mathrm{ctg}(x+5)$;

м) $y = \mathrm{tg}3x + \frac{3}{4}\mathrm{tg}^2 4x$.

128. Знайти похідну функції:

а) $y = 1 - e^{\cos^2 3x}\sin^2 3x$; б) $y = \arcsin\mathrm{tg}x$;

в) $y = x\sqrt{a^2 - x^2} - a^2\arccos\frac{x}{a}$; г) $y = \sqrt{x}\arccos\sqrt{x} - \sqrt{1-x}$;

д) у $= x\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$; е) $y = \mathrm{arcctg}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;

є) $y = \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 2\ln\cos\frac{x}{2}$; ж) $y = \arccos\frac{x^2+1}{x-1}$;

з) $y=$ $x\arcsin 3^x$; і) $y=$ $x^3+y^3=3xy$; ї) $y=$ $x^3-x^2y+y^3=25$;

й) $y=$ $3^x+3^y=3^{x+y}$; к) $y=$ x^2-y $=\operatorname{arcctg} y$;

л) $y=$ $\lg x$ $+\dfrac{x+1}{y}=ay^2$; м) $y=$ $xy=\arcsin(x+y)$.

н) $y=\begin{cases}x=3\sin 2t-\sin 3t,\\ y=3\cos 2t+\cos 3t;\end{cases}$ о) $y=\begin{cases}x=e^{2t}\sin 3t,\\ y=e^{2t}\cos 3t;\end{cases}$

п) $y=\begin{cases}x=\dfrac{\cos t}{1-\sin t},\\ y=\dfrac{\sin t}{\sin t-1};\end{cases}$ р) $y=\begin{cases}x=\lg(2+t^3),\\ y=\operatorname{arcctg}-2t;\end{cases}$

с) $y=\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=2t\sin t;\end{cases}$ т) $y=\begin{cases}x=te^{-1},\\ y=\dfrac{2}{3-5t}.\end{cases}$

129. Використовуючи логарифмування, знайти похідні функції:

а) $y=$ x^{5x}; б) $y=$ x^{3x}; в) $y=$ $(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}$; г) $y=$ $(\lg x)^{\frac{5}{2x}}$;

д) $y=$ $(\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$; е) $y=$ $x^{3\cos x}$.

130. Знайти похідну другого порядку:

а) $y=$ $\sin^2 x$; б) $y=$ $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; в) $y=$ $\log_5 \sqrt[3]{x^2-1}$;

г) $y=$ e^{-5x^3}; д) $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$; е) $y=$ $x^{2\sqrt{x}}$; є) $y=$ $\ln \operatorname{tg} x$;

ж) $y=$ $\dfrac{1}{2}x^2(4\ln x-5)$; з) $y=$ $\dfrac{1}{3}(3x\sin 2x+2\cos 3x)$;

і) $y=$ $x^2\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x$; ї) $y=$ $x\sqrt{x}+\operatorname{ctg}2x+1$;

й) $y=$ $\sqrt[3]{x}+\lg x$; к) $y=$ $e^{2x}\ln(x+1)$.

131. Знайти:

а) $y''(0)$ і $y'''(0)$, якщо $y(x)=e^{3x}\sin 2x$;

б) $y'''(0)$, якщо $y=\lg(2x+1)$;

в) $y^{(5)}(1)$, якщо $y=x^4\ln x$; г) $y''(0)$, якщо $y=2^{\cos x}\sin(\cos x)$.

Пошуково-аналітична робота (індивідуальні завдання)

Користуючись посібником [1, с. 176–208], вивчити питання "Використання поняття похідної в економіці". Підготувати для обговорення на аудиторних заняттях задачі:

1) залежність між витратами виробництва і обсягом випуску продукції;
2) залежність між собівартістю одиниці продукції і обсягом випуском продукції.

Проілюструвати розв'язання задач 7.54 — 7.56 [1, с. 176–208].

Література [1, с. 176–208; 4, с. 199–212; 7, с. 105–115]

Тема 10. Диференціал функції. Застосування диференціала для наближених обчислень

Підготовка до поточних аудиторних занять

10.1. Довідковий матеріал

1. Основні теоретичні положення

1. $df(x) = f'(x)dx.$

2. $d(u+v) = du + dv.$

3. $d(uv) = vdu + udv.$

4. $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$

5. $y = f(x), \quad x = \varphi(t), \quad dy = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$

6. $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$

7. $y = f(x), \quad dy = f'(x)dx; \quad d^2y = f''(x)dx^2; \quad d^3y = f'''(x)dx^3.$

10.2. Питання для самоконтролю

1. Що називається диференціалом функції?
2. Як виражається диференціал функції через її похідну?
3. Геометричний та механічний зміст диференціала.
4. Властивості диференціала.
5. Що називається похідною другого порядку від функції $y = f(x)$? У чому полягає її механічний зміст? Як її позначають?
6. Як знайти похідні вищих порядків від явно заданих функцій? Як їх позначають?

7. Зазначити, що називається диференціалом другого порядку функції, якщо $y = f(x)$,
де x — незалежна змінна; диференціалом n-го порядку.
8. Чи мають диференціали вищих порядків інваріантну властивість?

10.3. Основні типи задач

1. Обчислення диференціалів заданої функції.
2. Доведення тотожностей, що містять диференціали.
3. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.

10.4. Завдання для самостійного розв'язання

132. Знайти диференціал функції:

а) $y = x^2\sqrt{x}$; б) $y = (ax+b)(cx+d)$;

в) $y = \lg\frac{5x}{2x+1}$; г) $y = 5\cos x - x^2\sin x + 7$;

д) $y = \arcsin\frac{\cos x}{1+\mathrm{tg}x}$; е) $y = 5^{x-4} + \ln(1+x^2)$;

є) $y = \mathrm{tg}^3\frac{x^3}{5}$; ж) $y = \lg\frac{x+1}{2x+5}$; з) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$;

і) $y = (ax^2+bx+c)^n$; ї) $y = \sin^n x\cos^m x$; й) $y = 5^{\sin x\cos 2x}$;

к) $y = \sqrt[3]{\mathrm{arctg}^2 x}$.

133. Знайти диференціал функції:

а) $y = \lg\sin\mathrm{tg}\sqrt[5]{x^4}$; б) $y = \arcsin^2 x + \arccos^3 x^2$;

в) $y = \mathrm{arctg}^4 x^3$; г) $y = \arccos\frac{ax+b}{c}$; д) $y = \sin^3\frac{6x}{x+1}$;

е) $y = \sqrt{\arccos x + ctg^3 x}$; є) $y = \frac{\mathrm{tg}\,x}{1+x^2}$; ж) $y = 5x^2 + 2x^5$.

134. Користуючись поняттям диференціала, наближено обчислити:

а) $\sqrt[3]{15{,}15}$; б) $\cos 31^0$; в) $\sin 46^0$; г) $\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{0{,}99}{1{,}014}}$; д) $e^{1{,}05}$;

е) $1{,}03^{2{,}02}$.

135. Знайти d^3y, якщо:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = e^{2x}$.

Література [1, с. 244–250; 4, с. 213–216; 5, с. 266–269; 7, с. 118–123]

Тема 11. Застосування диференціального числення для дослідження функцій

Підготовка до поточних аудиторних занять

11.1. Довідковий матеріал

Основні теоретичні положення

1. Алгоритм дослідження функції f на монотонність

1. Знайти область визначення функції f і зобразити її на числовій прямій.
2. Знайти похідну функції f. Визначити критичні точки.
3. Позначити критичні точки на числовій прямій і визначити знак $f'(x)$ на кожному з утворених інтервалів.
4. Інтервали, на яких $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, функція зростає (спадає).

2. Алгоритм дослідження функції f на екстремум

1. Знайти похідну $f'(x)$ заданої функції.
2. Знайти критичні точки першого роду (значення $x \in D(f)$, при яких $f'(x) = 0$ або $f'(x) = \infty$, або $f'(x)$ не існує).
3. У кожній критичній точці перевірити зміну знаку похідної $f'(x)$. (Якщо при переході через критичну точку x_0 (зліва направо) $f'(x)$ змінює знак з “+” на “–”, то x_0 — точка максимуму, а якщо з “–” на “+”, то x_0 — точка мінімуму.)
4. Обчислити екстремальні значення функції $f_{\max}$ і $f_{\min}$ у точках екстремуму.

3. Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку [a, b]

1. Знайти критичні точки функції, які належать $[a, b]$.

2. Знайти значення функції на кінцях відрізка і у критичних точках $[a, b]$.
3. Серед одержаних значень функції вибрати найбільше і найменше.

4. Алгоритм дослідження функції f на опуклість і точки перегину

1. Знайти другу похідну $f''(x)$.
2. Знайти критичні точки другого роду (точки $x \in D(f)$, в яких $f''(x) = 0$, або $f''(x) = \infty$, або $f''(x)$ не існує).
3. Дослідити зміну знаку другої похідної при переході через ці точки (якщо при переході x через критичну точку x_0 $f''(x)$ змінює знак, то x_0 — точка перегину).
4. Знайти інтервали опуклості вгору (вниз). Якщо $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ при $x \in (a; b)$, то крива $y = f(x)$ опукла вгору (вниз) на $(a; b)$.

5. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність, періодичність.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Знайти точки розриву та дослідити їх.
5. Знайти асимптоти графіка функції та зобразити їх на площині *Oxy*.
6. Знайти проміжки монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.
7. Визначити проміжки опуклості, угнутості та точки перегину.
8. Обчислити значення функції в деяких допоміжних точках.
9. Враховуючи виконані дослідження, побудувати графік функції.

11.2. Питання для самоконтролю

1. Сформулювати:
   а) достатню ознаку монотонності функції;
   б) необхідну умову існування екстремуму;
   в) першу і другу достатні умови існування екстремуму.
2. Зазначте, за яким алгоритмом слід діяти в такому випадку:
   а) при дослідженні функції на монотонність;
   б) при визначенні найбільшого і найменшого значень функції на відрізку.

3. Зазначити, чи правильні твердження:
   а) якщо $f'(x_0)=0$, то x_0 — точка екстремуму;
   б) якщо $f'(x_0)$ не існує, то x_0 — точка екстремуму.
4. Дати означення опуклої (угнутої) функції.
5. Сформулювати достатню умову:
   а) опуклості (угнутості) функції на інтервалі;
   б) існування точки перегину.
6. Що називається асимптотою кривої?
7. Записати рівняння асимптот:
   а) вертикальної;
   б) горизонтальної;
   в) похилої.
8. Зазначити, чи правильні твердження:
   а) якщо хоча б одна з границь (1) або (2), тобто

   $$(1)\quad k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)\quad (2),$$

   не існує або дорівнює нескінченності, то крива похилої асимптоти не має;
   а) якщо $k = 0$, то $b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;
   б) асимптоти кривої $y=f(x)$ при $x\to\infty$ і $x\to-\infty$ завжди дорівнюють одна одній.
9. Сформулювати загальний алгоритм дослідження функції.

11.3. Основні типи задач

1. Знаходження проміжків монотонності функції, локальних екстремумів.
2. Визначення найбільшого і найменшого значень функції на відрізку.
3. Дослідження функції на опуклість (угнутість).
4. Знаходження асимптот (вертикальних, похилих).
5. Дослідження функції і побудова її графіка.
6. Застосування диференціального числення до розв'язання економічних задач.

11.4. Завдання для самостійного розв'язання

136. Показати, що функція

   а) $y=\dfrac{4}{x}-2x$ спадає на будь-якому інтервалі, який не містить точки $x = 0$;

б) $y = e^x - x$ зростає при $x > 0$.

137. Знайти інтервали монотонності:

а) функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$;

б) та екстремуми функції:

1) $y = 2x^2 - \ln|x| + 1$; 2) $y = 2\sin x$; 3) $y = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln|x+2|$;

4) $y = x^2 - 4\ln(1+x)$; 5) $y = \sqrt{3x} + \cos 2x - 3$;

6) $y = \ln\left|x^2 - 2x\right| + 1$; 7) $y = \ln|\sin x| - \sqrt{3x} + 5$;

8) $y = x - \ln|\cos x| + 1$; 9) $y = xe^{x^3 - 3x}$;

10) $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2 + 2x + 9}$; 11) $y = (x^2 - 2x)\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$;

12) $y = \dfrac{1}{2}(x^2 + 1)\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{8}x^2 - \dfrac{x-1}{2}$;

13) $y = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)\arcsin x + \dfrac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} - \dfrac{\pi}{12}x^2$;

14) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$; 15) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}$; 16) $y = \dfrac{x}{4} - \sqrt[4]{x}$;

17) $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$; 18) $y = x^2 \ln x$; 19) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$;

20) $y = \ln(x^2 + x + 1) - \ln\dfrac{3}{4}$.

138. Знайти найбільше і найменше значення заданих функцій у зазначених інтервалах:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, [- 4; 0]; б) $y = x - 4\sqrt{x} + 1$, [1; 9];

в) $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$, [-1; 2]; г) $y = x + \dfrac{4}{x^2}$, [1; 3];

д) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$, [0; 2].

139. Зазначте, якими мають бути розміри ящика з кришкою об'ємом V = 1764 см^3, якщо сторони основи відносяться як 3 : 4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу.

140. Об'єм правильної шестикутної призми дорівнює V. Якою має бути сторона основи, щоб площа повної поверхні призми була найменшою?

141. Довжина відкритого басейну площею 288 м^2 вдвічі перевищує ширину. Якими мають бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

142. Знайти асимптоти ліній:

а) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$; б) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$; в) $y=\dfrac{2x^2+3}{x^2+5}$;

г) $4x^2-y^2-8x-4y-1=0$; д) $y=\dfrac{x^2+2}{x+1}$; е) $y=\dfrac{2x^3}{x^2-2x-3}$;

є) $y=3\sqrt{x^2-1}$; ж) $y=x+1+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$; з) $y=\operatorname{arctg}2x$.

143. Дослідити функцію і побудувати її графік.

а) $y=\dfrac{(x^2-4)^2}{16}$; б) $y=\dfrac{1}{4}(x-1)^2(x+5)$; в) $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$;

г) $y=x(x^2-5)^2$; д) $y=\dfrac{1}{5}x^3(x^2-15)$; е) $y=\dfrac{x^4}{8}(x^4-16)$.

Пошуково-аналітична робота (індивідуальні завдання)

Проаналізувати літературні джерела [1; 3; 5] з позицій застосування диференціального числення в економіці та інших сферах діяльності людини. Підготувати інформацію для обговорення на практичних заняттях.

Література [1, с. 209–240; 3, с. 286–325; 4, с. 217–226; 5, с. 298–344; 7, с. 124–142]

Тема 12. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Підготовка до поточних аудиторних занять

12.1. Довідковий матеріал

Основні поняття

Якщо $z = f(x, y)$, то частинні прирости за змінними x, y і повний приріст функції визначаються рівняннями

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),\ \ \Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y),$$

$$\Delta\ z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

Частинну похідну функції $z = f(x, y)$ позначають одним із символів $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $f'_x(x,y)$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ і записують $z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Частинні похідні другого порядку від функції $z = f(x,y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ **функції** $z = f(x,y)$ **за напрямом** $\bar{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ обчислюється за формулою $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.$

Вектор $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ **називається градієнтом функції в точці *M***, спрямований у бік найшвидшої зміни функції і позначається так:

$$grad \quad z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$$

Алгоритм знаходження екстремумів функції двох змінних

$$z = f(x,y)$$

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти частинні похідні $f'x$, $f'y$, $f''x^2$, $f''y^2$, $f''xy$.
3. Визначити критичні точки заданої функції з умови $\begin{cases} f'x(x,y) = 0; \\ f'y(x,y) = 0, \text{ де } \quad (x,y) \in D(f) \end{cases}$
4. Обчислити частинні похідні другого порядку у критичній точці (x_0, y_0):
   $A = f''_{x^2}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$.
5. Визначити знак виразу $\Delta = AC - B^2$:
   а) якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$, то функція досягає $\max z\,(x_0, y_0)$ при $A<0$, $\min z\,(x_0, y_0)$ при $A>0$;
   б) якщо $\Delta = AC - B^2 < 0$, то екстремуму немає;
   в) якщо $\Delta = AC - B^2 = 0$ — сумнівний випадок.

6. Обчислити значення $f_{\max}$ і $f_{\min}$.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x,y)$ в обмеженій замкненій області

1. Знайти критичні точки заданої функції з умови $\begin{cases} f'x = 0; \\ f'y = 0. \end{cases}$ Обчислити значення функції в цих точках.
2. Визначити найбільше і найменше значення функції на межі області D.
3. Серед одержаних значень вибрати найбільше $\max\limits_{D} f(x,y)$, і найменше $\min\limits_{D} f(x,y)$.

12.2. Питання для самоконтролю

1. Навести приклади функцій з двома змінними.
2. Дати означення частинної похідної функції двох змінних.
3. Як визначають частинні похідні другого (третього) порядку від функції двох змінних?
4. Дати означення диференціала другого порядку функції двох змінних, записати формулу для його знаходження.
5. Як знайти похідну функції за напрямом $\bar{l}$?
6. Що називається градієнтом функції $f(x, y)$ у точці M.
7. Сформулювати алгоритм знаходження екстремумів функції двох змінних.
8. План дослідження функцій двох змінних щодо найбільшого і найменшого значень у замкненій області.

12.3. Основні типи задач

1. Обчислення частинних похідних за кожною незалежною змінною.
2. Знаходження диференціала функції двох змінних.
3. Дослідження функції на екстремум.

12.4. Завдання для самостійного розв’язання

144. Дано дві функції: $y = \sqrt{a^2 - x^2}\,(a = \text{const})$ та $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ і $\dfrac{dz}{dx}$.

Порівняти результати.

145. Знайти частинні похідні першого порядку за кожною незалежною змінною від функцій:

а) $z=x^2y+x+y+15$; б) $z=x^3+y^3-3xy$; в) $z=\frac{y}{x}$;

г) $z=\frac{x-y}{x+y}$; д) $z=\frac{x^2+y^2}{5}$; е) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

є) $z=\frac{1}{x^2+y}$; ж) $z=\sqrt[3]{x^2+y^3}$; з) $z=(3x^2y+4xy^2+5)^2$;

і) $z=\ln\frac{x}{y}$; ї) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; й) $z=\ln\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt{x+y}}$;

к) $z=\ln\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$; л) $z=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2-x}}{\sqrt{x^2+y^2+x}}$; м) $z=x^y$;

н) $z=e^{-\frac{x}{y}}$; о) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; п) $z=\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}$;

р) $z=\ln\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; с) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

146. Дослідити функцію на екстремум:

а) $z=x^2-y^2+2x$; б) $z=-x^2+y^2+6y-12$;

в) $z=x^5-y^5$.

147. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=f(x,y)$ у замкненій області D:

а) $z=xy$, $D=\{(x;y): x^2+y^2\le 4\}$

б) $z=\sqrt{x^4+y^4}$, $D=\{(x;y): x^2+y^2\le 9\}$.

148. Фірма реалізує одну частину товару на внутрішньому ринку, а іншу експортує. Зв'язок ціни товару P_1 і його проданого обсягу Q_1 на внутрішньому ринку описується кривою попиту за рівнянням $P_1 + Q_1 = 500$. Аналогічно для експорту ціна P_2 і обсяг Q_2 так само пов'язані співвідношенням $2P_2 + 3Q_2 = 720$. Сумарні витрати визначаються виразом $C = 500000 + 20\,(Q_1 + Q_2)$.

Яку цінову політику повинна здійснювати фірма, щоб прибуток був максимальний?

Література [2, с. 284–307; 5, с. 345–366; 6, с. 54–60]

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Высшая* математика для экономистов: Учеб. для вузов / Н. Ш. Кре-мер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2000. — 472 с.
2. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика: Навч. посіб. — К.: А.С.К., 2001. — 648 с.
3. *Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О.* Вища математика: Приклади і задачі: Посібник. — К.: Видав. центр “Академія”, 2003. — 624 с.
4. *Жильцов О. Б., Торбін Г. М.* Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навч. посіб. — К.: МАУП, 2002. — 408 с.
5. *Клепко В. Ю., Голець В. Л.* Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посіб. — К.: Центр навч. літ., 2006. — 600 с.
6. *Лубенська Т. В., Чупаха Л. Д.* Вища математика в таблицях: Довідник. — К.: МАУП, 2002. — 88 с.
7. *Практикум* з вищої математики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / І. І. Юртин, О. Ю. Дюженкова, О. Б. Жильцов та ін.; За ред. І. І. Юртина— К.: МАУП, 2003. — 248 с.

Додаткова

8. *Данко П. Е., Кожевников А. Г., Попов А. Г.* Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высш. шк., 1986. — Ч. I. — 354 с.
9. *Дюженкова О. Ю.* Тестові завдання з дисципліни “Вища математика”. — К.: МАУП, 1999 — 56 с.
10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1968. — 232 с.
11. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ: В 2 т. — М.: Высш. шк., 1970. — Т. 1. — 590 с.
12. *Почтман Ю. Ю.* Основы математики: Учеб.-метод. пособие. — К.: МАУП, 1997. — 144 с.
13. *Соколенко О. І., Новик Г. А.* Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посіб. — К.: Либідь, 2001. — 248 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *А. А. Карпова*
Комп’ютерне верстання *О. Л. Лапшина*

Зам. № ВКЦ-3189

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП