МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

ДИДАКТИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

з дисципліни

“МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ”

(розділ І “Лінійне програмування” та “Транспортні задачі”

(для бакалаврів, спеціалістів)

Київ 2007

Підготовлено доцентами кафедри гуманітарних та фундаментальних дисциплін Херсонського інституту МАУП *Г. М. Кравцовим* та *Л. В. Кравцовою*

Затверджено на засіданні кафедри гуманітарних та фундаментальних дисциплін Херсонського інституту МАУП (протокол № 5 від 18.01.07) та на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 8 від 25.04.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Кравцов Г. М., Кравцова Л. В. Дидактичні матеріали для практичних занять з дисципліни “Математичне програмування” (розділ I “Лінійне програмування” та “Транспортні задачі”) (для бакалаврів, спеціалістів). — К.: МАУП, 2007. — 26 с.

Дидактичні матеріали містять пояснювальну записку, приклади розв’язання задач, задачі для самостійного виконання, список літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Математичне програмування (планування) — це розділ математики, що передбачає розробку методів розшуку екстремальних значень функції, на аргументи якої накладені обмеження. Методи математичного програмування використовуються в економічних, організаційних, військових та інших системах для розв'язання так званих **розподільних задач**. Розподільні задачі розв'язуються за наявності обмежених ресурсів, які необхідно якнайефективніше розподілити з метою одержання максимального прибутку або мінімізації витрат (відповідно до вибраного критерію оптимальності).

Використанню методів математичного програмування передує найважливіший етап — побудова математичної моделі, адекватної фізичному змісту задачі. Базовими в цьому разі є задачі лінійного програмування (з одноіндексними змінними) і традиційні транспортні задачі (із двоіндексними змінними), на основі яких будуються моделі задач цілочисельного, цільового, динамічного та інших видів програмування. Мета дидактичних матеріалів — показати, як за фізичним змістом задачі правильно побудувати адекватну математичну модель та за моделлю одержати оптимальний розв'язок з використанням вбудованого модуля електронних таблиць *Excel* "Пошук розв'язку".

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ І. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Постановка, методи розв'язання та аналізу

Лінійне програмування (ЛП) — найпростіший розділ математичного програмування [1, с. 15–56; 2, с. 26–30; 3, с. 17–23]. Характерні ознаки задач ЛП такі:

- показник оптимальності $L(X)$ — ***лінійна*** функція від елементів розв'язку $x = (x_1, x_2,..., x_n)$;
- обмежувальні умови на можливі розв'язки мають вигляд **лінійних** рівностей або нерівностей.

Загальна форма запису моделі задачі ЛП

Цільова функція (ЦФ) $L(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \to \max\ (\min),$ за обмежень $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \le (\ge,=) b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \le (\ge,=) b_2; \\ \quad ... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \le (\ge,=) b_m; \\ x_1, x_2, ... x_k \ge 0\ (k \le n). \end{cases}$	(1.1)

При описуванні реальної ситуації за допомогою лінійної моделі слід перевіряти наявність у моделі таких властивостей, як пропорційність і адитивність. **Пропорційність** означає, що внесок кожної змінної в ЦФ і загальний обсяг споживання відповідних ресурсів повинен бути прямо пропорційний цій змінній. Наприклад, якщо, продаючи j-й товар у загальному випадку за ціною 100 грн, фірма робитиме знижку за певного рівня закупівлі до 95 грн, то буде відсутня пряма пропорційність між доходом фірми і значенням змінної x_j. Іншими словами, у різних ситуаціях *одна* одиниця j-го товару буде давати *різний* дохід. **Адитивність** означає, що ЦФ і обмеження повинні становити сумарні внески від різних змінних. Прикладом порушення адитивності є ситуація, коли збільшення обсягу реалізації одного з конкуруючих видів продукції, вироблених однією фірмою, впливає на обсяг реалізації іншого.

Допустимий розв'язок — це сукупність чисел (план) $X=(x_1, x_2,..., x_n)$, що задовольняють обмеженням задачі (1.1).

Оптимальний розв'язок — це план, при якому ЦФ приймає максимальне (мінімальне) значення.

ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ОДНОІНДЕКСНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Задача 1

Фабрика виробляє два види фарб: перший — для зовнішніх, другий — для внутрішніх робіт. Для виробництва фарб використовуються два інгредієнти: А і В. Максимально можливі добові запаси цих інгредієнтів становлять відповідно 6 і 8 т. Витрати інгредієнтів A і B на 1 т фарби відповідного виду наведені в таблиці. Результати вивчення ринку збуту засвідчили, що добовий попит на фарбу другого виду не перевищує попит на фарбу першого виду більше як на 1 т. Крім того встановлено, що добовий попит на фарбу другого виду не перевищує 2 т. Оптові ціни 1 т фарби такі: 3 тис. грн для фарби першого виду; 2 тис. грн для фарби другого виду.

Інгредієнт	Витрата інгредієнтів на 1 т фарби, т		Добовий запас, т
	першого виду	другого виду	
A	1	2	6
B	2	1	8

Побудувати математичну модель, що дає змогу встановити, яку кількість фарби кожного виду треба виробляти, щоб дохід від реалізації продукції був максимальний.

Розв'язання

Перш ніж побудувати математичну модель задачі, тобто записати її за допомогою математичних символів, необхідно чітко розібратися з економічною ситуацією, описаною в умові. Для цього слід з позицій ***економіки***, а не математики, відповісти на три питання:

- що є ***шуканими величинами*** задачі;
- ***мета*** розв'язання, тобто який ***параметр*** задачі є критерієм ефективності (оптимальності) розв'язання (наприклад, прибуток, собівартість, час). В якому ***напрямку*** повинно змінюватися значення цього параметра (до max або min) для досягнення найкращих результатів;
- які ***умови*** відносно шуканих величин і ресурсів задачі повинні бути виконані. Ці умови встановлюють, як повинні співвідноситися різні параметри задачі, наприклад обсяг ресурсу, витраченого при виробництві, і його запас на складі; обсяг виготовленої продукції та її наявність на складі, де вона зберігатиметься; час, обсяг виготовленої продукції та ринковий попит на неї.

Тільки після цього можна записувати відповіді в ***математичному*** вигляді, тобто здійснювати запис математичної моделі.

- Шукані величини є ***змінними*** задачі, що, як правило, позначаються малими латинськими літерами з індексами. Наприклад, однотипні змінні зручно подавати у вигляді $X = (x_1, x_2,..., x_n)$.

- Мета розв'язання записується у вигляді ***цільової функції***, що позначається, наприклад, $L(X)$. Математична формула ЦФ $L(X)$ відбиває спосіб розрахунку значень параметра — критерію ефективності задачі.
- Умови, що накладають на змінні й ресурси задачі, записуються у вигляді системи рівностей або нерівностей, тобто ***обмежень***. Ліві та праві частини обмежень відбивають спосіб одержання (розрахунок або числові значення з умови задачі) значень параметрів задачі, на які було накладено відповідні умови.

У процесі запису математичної моделі необхідно вказувати одиниці змінних задачі, цільової функції та обмежень.

Побудуємо модель задачі 1, використовуючи описану методику.

Змінні задачі

У задачі потрібно встановити, який обсяг фарби кожного виду треба виготовити. Тому шуканими величинами, а отже, і змінними задачі є *добовий обсяг виробництва* кожного виду фарб:

x_1 — добовий обсяг виробництва фарби першого виду, т;

x_2 — добовий обсяг виробництва фарби другого виду, т.

Цільова функція

В умові задачі сформульовано мету — отримати максимальний дохід від реалізації продукції, тобто критерієм ефективності взято параметр *добового доходу*, що повинен прагнути до *максимуму*. Щоб розрахувати добовий дохід від продажу фарб обох видів, необхідно знати добові обсяги виробництва фарб, тобто x_1 й x_2, а також оптові ціни за 1 т фарби кожного виду — відповідно 3 і 2 тис. грн. Таким чином, дохід від продажу добового обсягу виробництва фарби першого виду дорівнює $3x_1$ тис. грн, а другого виду — $2x_2$ тис. грн. Тому запишемо ЦФ у вигляді суми доходу від продажу фарб обох видів (припускаючи незалежність обсягів реалізації кожної фарби)

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\left[\frac{\text{тис. грн.}}{\text{т фарби}} \cdot \frac{\text{т фарби}}{\text{добу}} = \frac{\text{тис. грн.}}{\text{добу}}\right].$$

Обмеження

Можливі обсяги виробництва фарб x_1 і x_2 обмежуються такими умовами:

- обсяг інгредієнтів А і В, витрачений протягом доби на виробництво фарб обох видів, не може перевищувати добового запасу цих інгредієнтів на складі;
- відповідно до результатів вивчення ринкового попиту добовий обсяг виробництва фарби другого виду може перевищувати добовий обсяг виробництва фарби першого виду, але не більше як на 1 т;
- добовий обсяг виробництва фарби другого виду не повинен перевищувати 2 т, що так само є результатом вивчення ринків збуту;
- обсяги виробництва фарб не можуть мати від'ємних значень.

Таким чином, усі обмеження задачі поділяються на три групи, обумовлені:

- витратами інгредієнтів;
- ринковим попитом фарб;
- невід'ємністю обсягів виробництва фарб.

Обмеження **за витратами** кожного з інгредієнтів мають таку ***змістовну*** форму запису:

$$\begin{pmatrix}\text{Витрати інгредієнта}\\ \text{на виробництво обох видів фарб}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\text{Максимально можливий}\\ \text{запас інгредієнта}\end{pmatrix}.$$

Запишемо ці обмеження в ***математичній*** формі.

Ліва частина обмеження — це формула для розрахунку добової витрати конкретного інгредієнта на виробництво фарб. Наприклад, з умови відомі витрати інгредієнта А на виробництво 1 т фарби першого виду — 1 т і 1 т фарби другого виду — 2 т. Тоді для виробництва x_1 т фарби першого виду і x_2 т фарби другого виду потребуватиметься $x_1 + 2x_2$ т інгредієнта А.

Права частина обмеження — це добовий запас інгредієнта на складі, наприклад, 6 т інгредієнта А (див. табл.). Таким чином, обмеження щодо витрати інгредієнта А таке:

$$1x_1 + 2x_2 \le 6 \qquad \left[\frac{\text{т інгр. А}}{\text{т фарби}} \cdot \frac{\text{т фарби}}{\text{добу}}\right] \le \left[\frac{\text{т інгр. А}}{\text{добу}}\right].$$

Аналогічний математичний запис обмеження щодо витрати інгредієнта В:

$$2x_1 + 1x_2 \le 8 \qquad \left[\frac{\text{т інгр. В}}{\text{т фарби}} \cdot \frac{\text{т фарби}}{\text{добу}}\right] \le \left[\frac{\text{т інгр. В}}{\text{добу}}\right].$$

Примітка. Слід завжди перевіряти розмірність лівої та правої частин кожного з обмежень, оскільки їх розбіжність свідчить про принципову помилку при складанні обмежень.

Обмеження за добовим **обсягом виробництва** фарби першого виду порівняно з обсягом виробництва фарби другого виду має ***змістовну*** форму запису

$$\left(\begin{array}{l}\text{Перевага обсягу виробництва фарби другого виду}\\ \text{над обсягом виробництва фарби першого виду}\end{array}\right) \le \left(1\,\frac{\text{т фарби}}{\text{добу}}\right)$$

і ***математичну*** форму

$$x_2 - x_1 \le 2 \qquad \left[\frac{\text{т фарби}}{\text{добу}}\right] \le \left[\frac{\text{т фарби}}{\text{добу}}\right].$$

Обмеження за добовим **обсягом виробництва** фарби першого виду має ***змістовну*** форму

$$(\text{Попит на фарбу першого виду}) \le \left(2\,\frac{\text{т фарби}}{\text{добу}}\right)$$

і ***математичну*** форму

$$x_1 \le 2 \qquad \left[\frac{\text{т фарби}}{\text{добу}}\right] \le \left[\frac{\text{т фарби}}{\text{добу}}\right]$$

Невід'ємність обсягів виробництва фарб задається так:

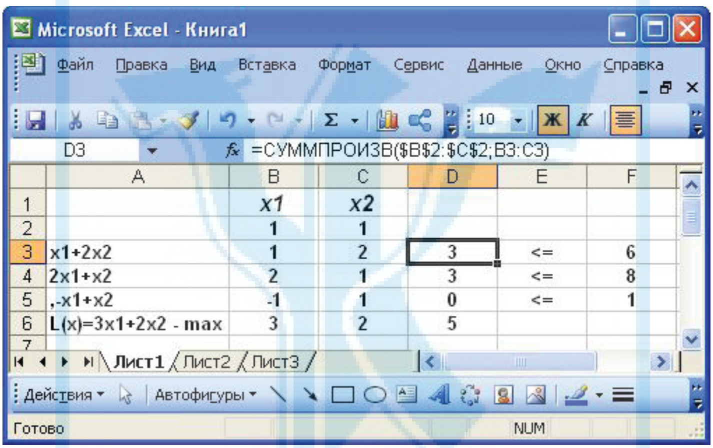
$$x_1 \ge 0;$$
$$x_2 \ge 0.$$

Таким чином, ***математична модель*** цієї задачі має вигляд

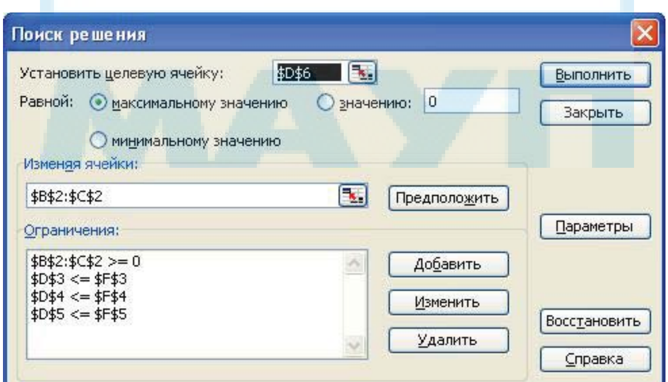
$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \text{MAX}$$

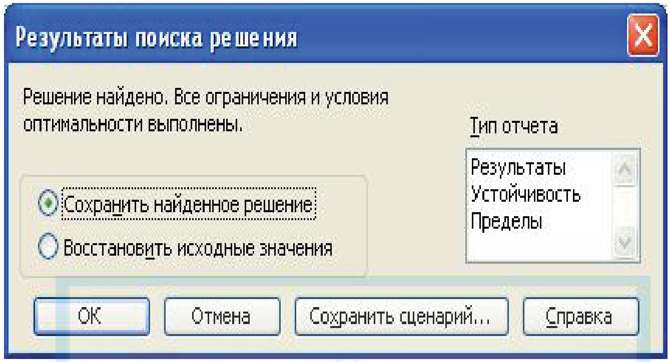
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 8; \\ -x_1 + x_2 \le 1; \\ \qquad x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

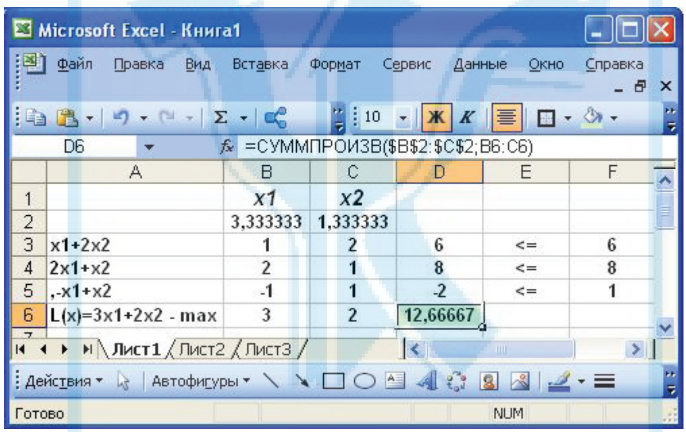
Покажемо тепер, як реалізувати розв'язання цієї задачі в модулі "Пошук розв'язку" електронних таблиць Excel. Внесемо вихідні дані в таблицю. Зміст чарунок B1 і B2 — передбачувані значення змінних X_1 і X_2, які система змінить самостійно при виконанні модуля "Пошук розв'язку". У чарунках діапазону B3 : C5 містяться коефіцієнти системи обмежень, B6, C6 — параметри цільової функції, F3 : F5 — праві частини системи обмежень; зміст чарунок D3 : D6 розрахункове (див. формулу в рядку формул), причому D5 — цільова чарунка (обчислення цільової функції для значень змінних, що містяться в чарунках B2, C2).



Внесемо дані в модуль "Пошук розв'язку".







Отже, розв'язок задачі $X_1 = 3{,}333$, $X_2 = 1{,}333$; при цьому значення цільової функції $L(x) = 12{,}667$ — максимальне.

Задача 2

Замовлення на виробництво 32 виробів И$_1$ і 4 виробів И$_2$ виконують бригади Б$_1$ і Б$_2$. Годинна продуктивість бригади Б$_1$ з виробництва виробів И$_1$ і И$_2$ становить відповідно 4 і 2 вироби, фонд робочого часу цієї бригади — 9,5 год. Годинна продуктивість бригади Б$_2$ — відповідно 1 і 3 вироби, фонд робочого часу — 4 год. Витрати, пов'язані з виробництвом одиниці виробу, бригади Б$_1$ — відповідно 9 і 20 грн, бригади Б$_2$ — 15 і 30 грн. Скласти математичну модель задачі, за якою можна знайти оптимальний обсяг випуску виробів, що забезпечує мінімальні витрати на виконання замовлення.

Змінні задачі

Шуканими величинами в задачі є обсяги випуску виробів. Вироби $И_1$ випускатимуться двома бригадами — $Б_1$ і $Б_2$. Тому необхідно *розрізняти* обсяги випуску виробів $И_1$ бригадою $Б_1$ і обсяги випуску виробів $И_1$ бригадою $Б_2$. Аналогічно обсяги випуску виробів $И_2$ бригадами $Б_1$ і $Б_2$ так само різні. Внаслідок цього в задачі чотири змінні. Для зручності сприйняття використовуватимемо двоіндексну форму запису x_{ij} шт. — кількість виробів $И_j$ ($j = 1, 2$), виготовлених бригадою $Б_i$ ($i = 1, 2$), а саме:

x_{11} — обсяг випуску виробів $И_1$ бригадою $Б_1$;
x_{12} — обсяг випуску виробів $И_2$ бригадою $Б_1$;
x_{21} — обсяг випуску виробів $И_1$ бригадою $Б_2$;
x_{22} — обсяг випуску виробів $И_2$ бригадою $Б_2$.

Примітка. У задачі немає потреби враховувати тимчасовий інтервал (у задачі 1 це було пов'язано з добою), оскільки потрібно знайти не обсяг випуску за певний час, а спосіб розподілу відомого планового обсягу замовлення між бригадами.

Цільова функція

Мета розв'язання задачі — виконати план з *мінімальними* витратами, тобто критерієм ефективності розв'язання є *витрати на виконання замовлення*. Тому ЦФ повинна бути подана формулою для розрахунку цих витрат. Витрати кожної бригади на виробництво одного виробу видів $И_1$ і $И_2$ відомі з умови. Таким чином, ЦФ має вигляд

$$L(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min,$$

$$\left[\frac{\text{грн.}}{\text{шт.}} \cdot \text{шт.} = \text{грн.}\right].$$

Обмеження

Можливі обсяги виробництва виробів бригадами обмежуються такими умовами:

- загальний обсяг випуску виробів $И_1$ обома бригадами повинен дорівнювати 32 шт., а виробів $И_2$ — 4 шт.;
- час, за який повинно бути виконано замовлення, становить для бригади $Б_1$ — 9,5 год, для бригади $Б_2$ — 4 год;

• обсяги виробництва виробів не можуть бути від’ємними.

Таким чином, усі обмеження задачі поділяються на три групи і обумовлені:

• розміром замовлення на виробництво виробів;
• виділеними бригадам фондами часу;
• невід’ємністю обсягів виробництва.

Для зручності складання обмежень запишемо вихідні дані у вигляді таблиці.

Бригада	Годинна продуктивність бригади, шт.		Фонд робочого часу, год
	$И_1$	$И_2$	
$Б_1$	4	2	9,5
$Б_2$	1	3	4
Розмір замовлення, шт.	32	4	

Обмеження за **замовленнями** виробів мають таку ***змістовну*** форму запису:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Обсяг випуску виборів } И_1 \\ \text{бригадами } Б_1 \text{ і } Б_2\end{array}\right) = (32 \text{ шт.})$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Обсяг випуску виробів } И_2 \\ \text{бригадами } Б_1 \text{ і } Б_2\end{array}\right) = (4 \text{ шт.})$$

Математична форма запису:

$$x_{11} + x_{21} = 32; \text{ [шт.] = [шт.];}$$

$$x_{12} + x_{22} = 4; \text{ [шт.] = [шт.].}$$

Обмеження за **фондами часу** має таку ***змістовну*** форму:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Загальнеий час роботи бригади } Б_1 \\ \text{над виготовленням виробів } И_1 \text{ і } И_2\end{array}\right) \leq 9{,}5 \text{ год;}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Загальний час роботи бригади } Б_2 \\ \text{над виготовленням виборів } И_1 \text{ і } И_2\end{array}\right) \leq 4 \text{ год.}$$

Проблема полягає в тому, що в умові задачі прямо не задано час, який витрачають бригади на виготовлення одного виробу $И_1$ або $И_2$, тобто не задано трудомісткість виробництва. Проте міститься інформація про продуктивність кожної бригади, тобто про кількість вироблених виробів за 1 год. Трудомісткість Тр і продуктивність Пр є зворотними величинами, тобто

$$\text{Тр}=\frac{1}{\text{Пр}}\ ;\quad \left[\frac{\text{г}}{\text{шт.}}\right]=\left[1\Big/\frac{\text{шт.}}{\text{г}}\right].$$

Тому за даними таблиці одержуємо:

$\rightarrow\frac{1}{4}$ год витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу $И_1$;

$\rightarrow\frac{1}{2}$ год витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу $И_2$;

$\rightarrow\frac{1}{1}$ год витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу $И_1$;

$\rightarrow\frac{1}{3}$ год витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу $И_2$.

Запишемо обмеження за фондами часу в ***математичному*** вигляді:

$$\frac{x_{11}}{4}+\frac{x_{12}}{2}\le 9{,}5;\qquad \left[\frac{\text{г}}{\text{шт.}}\cdot\text{шт.}\right]\le[\text{год}];$$

$$\frac{x_{21}}{1}+\frac{x_{22}}{3}\le 4;\qquad \left[\frac{\text{г}}{\text{шт.}}\cdot\text{шт.}\right]\le[\text{год}].$$

Невід'ємність обсягів виробництва задається так:

$$x_{ij}\ge 0\ (\text{i}=1,2;\ j=1,2).$$

Таким чином, ***математична модель*** цієї задачі має вигляд

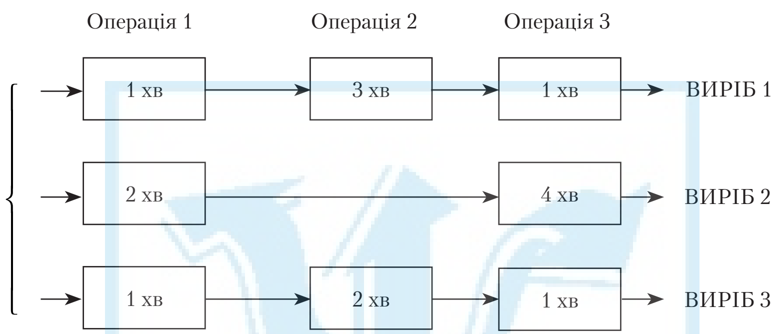
$$L(X)=9x_{11}+20x_{12}+15x_{21}+30x_{22}\rightarrow\min\ \ [\text{грн}],$$

$$\begin{cases} x_1+x_{21}=32\ [\text{шт.}] \\ x_{12}+x_{22}=4\,[\text{шт.}] \\ \dfrac{x_{11}}{4}+\dfrac{x_{12}}{2}\le 9{,}5\,[\text{год}] \\ \dfrac{x_{21}}{1}+\dfrac{x_{22}}{3}\le 4\,[\text{год}] \\ x_{ij}\ge 0\,(\text{i}=1,2;\,j=1,2). \end{cases}$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задача 1

Фірма випускає три види виробів. У процесі виробництва використовуються три технологічні операції. Далі наведено технологічну схему виробництва (затрати часу на обробку одного виробу).



Фонд робочого часу обмежений такими граничними значеннями: для першої операції — 430 хв, для другої — 460 хв, для третьої — 420 хв. Вивчення ринку збуту засвідчило, що очікуваний прибуток від продажу одного виробу видів 1, 2 і 3 становить відповідно 3, 2 і 5 грн.

Побудуйте модель, що дає змогу знайти найвигідніший добовий обсяг виробництва кожного виду продукції.

Задача 2

При виготовленні виробів $И_1$ і $И_2$ використовуються сталь та кольорові метали, а також токарські та фрезерні верстати. За технологічними нормами на виробництво одиниці виробу $И_1$ потрібно 300 і 200 верстато-год відповідно токарського та фрезерного устаткування, а також 10 і 20 кг відповідно сталі та кольорових металів. Для виробництва одиниці виробу $И_2$ потрібно відповідно 400, 100, 70 і 50 таких самих ресурсів.

Цех має 12400 і 6800 верстато-год відповідно токарського та фрезерного устаткування відповідно 640 і 840 кг сталі й кольорових металів. Прибуток від реалізації одиниці виробу $И_1$ становить 6 грн і від одиниці виробу $И_2$ — 16 грн.

Побудувати математичну модель задачі, використовуючи як показник ефективності прибуток.

Задача 3

Для збереження нормальної життєдіяльності людина повинна за добу споживати білків не менше 120 ум. од., жирів — не менше 70 ум. од. і вітамінів не менше 10 ум. од. Їх вміст у кожній одиниці продуктів $П_1$ і $П_2$ дорівнює відповідно (0,2; 0,075; 0) і (0,1; 0,1; 0,1) ум. од. Вартість одиниці продукту $П_1$ — 2 грн, $П_2$ — 3 грн.

Побудувати математичну модель задачі, що сприятиме такій організації харчування, щоб його вартість була мінімальною, а організм одержав необхідну кількість поживних речовин.

Задача 4

У районі лісового масиву розташовані лісопильний завод і фанерна фабрика. Для одержання 2,5 м^3 комерційно реалізовуваних комплектів пиломатеріалів необхідно витратити 2,5 м^3 ялинових і 7,5 м^3 ялицевих лісоматеріалів. Для виготовлення листів фанери по 100 м^3 потрібно 5 м^3 ялинових і 10 м^3 ялицевих лісоматеріалів. Лісовий масив містить 80 м^3 ялинових і 180 м^3 ялицевих лісоматеріалів.

За умовами поставок протягом планованого періоду необхідно виготовити не менше 10 м^3 пиломатеріалів і 1200 м^3 фанери. Дохід від 1 м^3 пиломатеріалів становить 160 грн, з 100 м^2 фанери — 600 грн.

Побудувати математичну модель для розрахунку оптимального плану виробництва.

Примітка. При побудові моделі слід врахувати, що пиломатеріали можуть бути реалізовані тільки у вигляді неподільного комплекту об'ємом 2,5 м^3, а фанера — у вигляді неподільних листів площею 100 м^2 .

Задача 5

З вокзалу можна відправляти щодня кур'єрські й швидкі поїзди. Місткість і наявний парк вагонів зазначені в таблиці.

Характеристика парку вагонів	Тип вагона				
	багажний	поштовий	плацкартний	купейний	м'який
Кількість вагонів у поїзді:					
кур'єрському	1	-	5	6	3
швидкому	1	1	8	4	1
Місткість вагонів, пасажирів	–	–	58	40	32
Наявний парк вагонів	12	8	81	70	27

Побудувати математичну модель задачі, на основі якої можна розрахувати таке співвідношення кількості кур'єрських і швидких поїздів, щоб щоденна кількість пасажирів була максимальною.

Задача 6

Керівництво міського автобусного парку вирішило дослідити можливість раціональнішої організації роботи з метою зниження інтенсивності внутрішньоміського руху. На основі зібраної та опрацьованої інформації було зроблено висновок, що необхідна мінімальна кількість автобусів істотно змінюється протягом доби (рис. 1). Тривалість добового безперервного використання автобусів на лінії дорівнює 8 год (з урахуванням витрат часу на поточний ремонт і обслуговування). Графік змін, що перекриваються, подано на рис. 2.

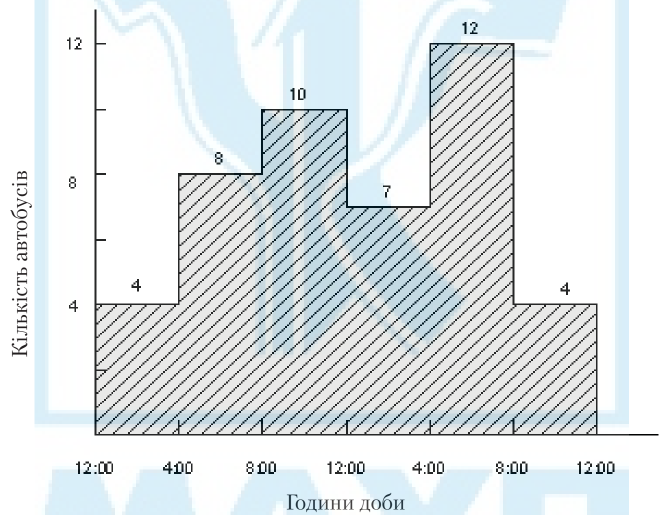


Рис. 1. **Мінімально необхідна кількість автобусів на лінії**

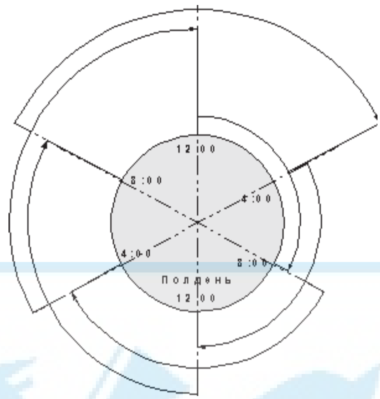


Рис. 2. **Графік змін, що перекриваються**

Побудувати математичну модель, на основі якої можна визначити, яку кількість автобусів необхідно випускати на лінію в кожній зміні за умови, що загальна кількість автобусів, що виходять на лінію протягом доби, повинна бути мінімальною.

Задача 7

Служба постачання заводу одержала від постачальників 500 сталевих прутків довжиною 5 м. Їх необхідно розрізати на деталі А і Б довжиною відповідно 2 і 1,5 м, з яких потім складаються комплекти. Один комплект містить 3 деталі А і 2 деталі Б. Характеристики можливих варіантів розкроювання прутків подано в таблиці.

Варіант розкроювання	Кількість деталей		Відходи, м
	А	Б	
1	2	0	1
2	1	2	0
3	0	3	0,5
Комплектність	3	2	

Побудувати математичну модель задачі, на основі якої можна розрахувати план розкроювання прутків, що гарантує одержання максимальної кількості комплектів.

Примітка. У ЦФ можуть не входити всі змінні задачі.

Задача 8

Щодня в ресторані фірмовий коктейль (місткість порції — 0,33 л) замовляють у середньому 600 відвідувачів. Передбачається, що найближчим часом кількість замовників збільшиться в середньому на 50. Відповідно до рецепта у складі коктейлю повинно бути:

- не менше 20 %, але й не більше 35 % спирту;
- не менше 2 % цукру;
- не більше 5 % домішок;
- не більше 76 % води;
- не менше 7 %, але й не більше 12 % соку.

Процентний вміст напоїв, з яких змішується коктейль, і їх кількість, що ресторан може щодня виділяти на готування коктейлю наведено у табл.

Напій	Вміст, %				Об’єм, л
	спирту	води	цукру	домішок	
Горілка	40	57	1	2	50
Вино	18	67	9	6	184
Сік	0	88	8	4	46

Побудувати модель, на основі якої можна визначити, чи вистачить ресторану наявних щоденних запасів напоїв для задоволення підвищеного попиту на коктейль.

Задача 9

Паперова фірма випускає паперові рулони стандартної ширини 20 м. За спеціальними замовленнями споживачів фірма виготовляє рулони різних розмірів, для чого розрізає стандартні рулони. Характеристика типових замовлень рулонів нестандартних розмірів наведена в табл. 1.

Таблиця 1

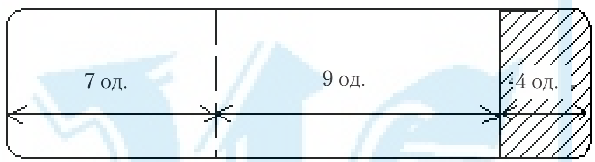
Номер замовлення	Необхідна ширина рулону, м	Необхідна кількість рулонів
1	5	150
2	7	200
3	9	300

Припустимі варіанти розрізування рулонів наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Необхідна ширина рулона, м	Варіант розрізування рулону						Мінімальна кількість рулонів
	1	2	3	4	5	6	
5	0	2	2	4	1	0	150
7	1	1	0	0	2	0	200
9	1	0	1	0	0	2	300
Втрати, ед. шир.	4	3	1	0	1	2	

Перший варіант розрізування рулону показано на рисунку.



Побудувати математичну модель, на основі якої можна розрахувати такий план розрізування рулонів, за якого замовлення на нестандартні рулони задовольняються з мінімальними втратами (тобто непридатними для реалізації залишками рулонів).

Примітка. У задачі для зручності запису моделі можна ввести змінні, що не є *шуканими* величинами.

Комплексна задача

Компанія виробляє три види виробів: Р1, Р2 і Р3. У виробничому процесі використовуються матеріали М1 і М2, що обробляються на верстатах В1 і В2. Дані, що характеризують виробничий процес виготовлення продукції, наведені в таблиці.

Ресурс	Одиниця	Кількість ресурсу на одиницю виробу			Щоденний фонд ресурсів, од.
		Р1	Р2	Р3	
Час роботи верстата В1	хв	1	2	1	430
Час роботи верстата В2	хв	3	0	2	460
Матеріал М1	фунти	1	4	0	420
Матеріал М2	фунти	1	1	1	300

Щоденний обсяг виробництва виробу P2 повинен бути не менше 79 од., виробу P3 — не більше 240. Дохід від одиниці виробів P1, P2, P3 становить відповідно 300, 200 і 500 дол. Керівництво компанії розробляє стратегію для поліпшення свого фінансового становища. Можливі такі пропозиції.

1. Можна збільшити на 20 % дохід від виробу P3, але при цьому зменшиться обсяг його виробництва до 210.

2. Матеріал M2 є критичним чинником, що обмежує поточне виробництво. Можна придбати додаткові обсяги цього матеріалу у сторонніх постачальників, але його ціна за фунт буде на 3 дол. вища, ніж у постачальників, які обслуговують компанію сьогодні.

3. Фонд робочого часу верстатів можна збільшити на 40 хв у робочий день, однак це призведе до додаткової вартості експлуатації кожного верстата — 35 дол. за день.

4. Відділ маркетингу обґрунтував необхідність збільшення денного мінімального обсягу виробництва продукту P2 з 70 до 100.

5. Час обробки одиниці виробу P1 на верстаті B2 можна скоротити до 2 хв з додатковою вартістю 4 дол. за день.

Скласти математичну модель задачі. Розглянути доцільність впровадження пропозицій, враховуючи, що деякі з них можна впровадити одночасно.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ II. ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ

Постановка, методи розв'язання та аналізу

Транспортні моделі (задачі) — спеціальний клас задач лінійного програмування [1, с. 28–36; 2, с. 179–220; 4, с. 53–67]. Ці моделі часто описують переміщення (перевезення) якось товару з пункту відправлення (вихідний пункт, наприклад місце виробництва) до пункту призначення (склад, магазин тощо). Призначення транспортної задачі — визначення обсягів перевезення з пунктів відправлення до пунктів призначення з мінімальною сумарною вартістю перевезень. При цьому слід враховувати обмеження, що накладаються на обсяги вантажів, наявних у пунктах відправлення (пропозиції), і обмеження, що враховують потребу вантажів у пунктах призначення (попит). У транспортній моделі передбачається, що вартість перевезення певним маршрутом прямо пропорційна обсягу вантажу, перевезеного цим маршрутом. У загальному випадку транспортну модель можна застосовувати для опису ситуацій, пов’язаних з управлінням запасами та рухом капіталів, складанням розкладів, призначенням персоналу тощо.

Приклад

Автомобільна компанія “MG Auto” має три заводи в Лос-Анджелесі, Детройті й Новому Орлеані та два розподільних центри в Денвері й Майамі. Обсяги виробництва заводів компанії в наступному кварталі становитимуть відповідно 1000, 1500 і 1200 автомобілів. Щоквартальна потреба розподільних центрів становить 2300 і 1400 автомобілів. Відстані між заводами й розподільними центрами наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Місто, де розташований завод	Відстань, миль, до розподільного центру в місті	
	Денвер	Майамі
Лос-Анджелес	1000	2690
Детройт	1250	1350
Новий Орлеан	1275	850

Послуги транспортної компанії коштують 8 центів за перевезення одного автомобіля на відстань в одну милю. Вартість перевезень (з округленням до долара) кожним маршрутом наведена в табл. 2.

Таблиця 2

Місто	Вартість, дол., перевезення до міста	
	Денвер	Майамі
Лос-Анджелес	80	215
Детройт	100	108
Новий Орлеан	102	68

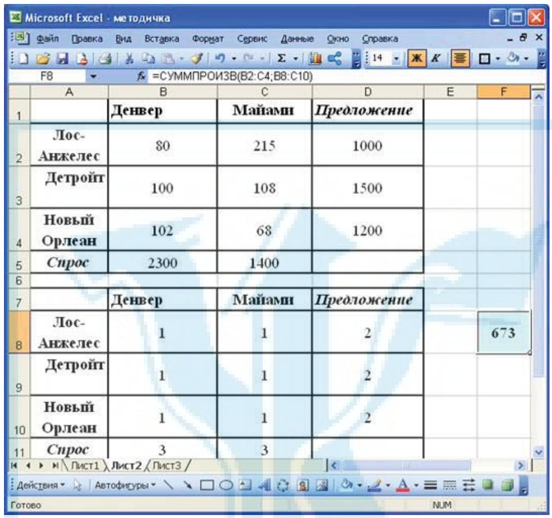
За даними табл. 2 формулюємо задачу лінійного програмування.

Мінімізувати $Z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$ при обмеженнях

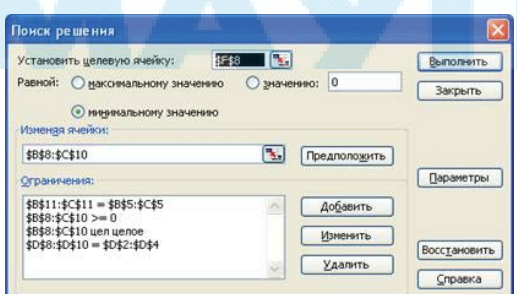
$$x_{11} + x_{12} = 1000 \text{ (Лос-Анджелес)},$$
$$x_{21} + x_{22} = 1500 \text{ (Детройт)},$$
$$x_{31} + x_{32} = 1200 \text{ (Новий Орлеан)},$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300 \text{ (Денвер)},$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400 \text{ (Майамі)},$$
$$x_{ij} > 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2.$$

Ці обмеження мають вигляд рівностей, оскільки загальний обсяг вироблених автомобілів (1000 + 1500 + 1200 = 3700) дорівнює сумарному попиту розподільних центрів (2300 + 1400 = 3700).

Покажемо, як знайти оптимальний розв'язок задачі за допомогою модуля "Пошук розв'язку".



У діапазоні B9 : C10 — передбачувані значення змінних x_{ij} — обсягів перевезень із пункту i до пункту j; у F8 — значення цільової функції (формула обчислень записана в рядку формул); D8 : D10 — реальна (розрахункова) кількість перевезених автомобілів; B11 : C11 — кількість доставлених автомобілів. Тепер можна внести дані в модуль "Пошук розв'язку".



Розв’язок наведений у табл. 3. При цьому витрати (мінімальні) становитимуть 313200 дол. (F8).

Місто	Денвер	Майамі	Обсяг пропозиції
Лос-Анджелес	1000	0	1000
Детройт	1300	200	1500
Новий Орлеан	0	1200	1200
Обсяг попиту	2300	1400	

Якщо сумарний обсяг пропозиції (вантажів, наявних у пунктах відправлення) не дорівнює загальному обсягу попиту на товари (вантажі), запитувані пунктами призначення, транспортна модель вважається незбалансованою. Однак це не вплине на можливість використання модуля “Пошук розв’язку” електронних таблиць Excel; деякі з обмежень типу рівностей будуть замінені на обмеження типу нерівностей відповідно до незбалансованості задачі.

Задачі для самостійного розв’язання

Задача 1

Електрогенеруючі станції потужністю відповідно 25, 40 і 30 млн Квт/год постачають електроенергію у три міста. Максимальна потреба в електроенергії цих міст оцінюється відповідно 30, 35 і 25 млн Квт/год. Ціни за 1 млн Квт/год у містах наведені далі.

		Місто		
		1	2	3
Станція	1	600 дол.	700 дол.	400 дол.
	2	320 дол.	300 дол.	350 дол.
	3	500 дол.	480 дол.	450 дол.

У серпні на 20 % підвищується потреба в електроенергії в кожному з трьох міст. Нестачу електроенергії міста можуть заповнити з іншої електромережі за ціною 1000 дол. за 1 млн Квт/год. На жаль, третє місто не може підімкнутися до альтернативної електромережі. Електрогенеруючі станції планують розробити найекономічніший план розподілу електроенергії й заповнення її нестачі в серпні.

Сформулювати задачу у вигляді транспортної моделі.

Розв’язати транспортну задачу і визначити оптимальний план розподілу електроенергії електрогенеруючими станціями.

Визначити вартість додаткової електроенергії для кожного з трьох міст.

Виконати попередню вправу, припустивши, що 10 % електроенергії втрачається при передаванні електромережами.

Задача 2

Три плодових господарства постачають апельсини в ящиках чотирьом оптовим покупцям. Щоденна потреба цих покупців становить відповідно 150, 150, 400 і 100 ящиків. Припустимо, що всі три плодових господарства використають тільки постійну робочу силу й можуть щодня постачати відповідно 150, 200 і 250 ящиків апельсинів. Перші два господарства можуть збільшити обсяги поставки апельсинів шляхом залучення додаткових робітників, третє господарство такої можливості не має. Транспортні витрати на один ящик апельсинів наведені далі.

		Покупець			
		1	2	3	4
Господарство	1	1 дол.	2 дол.	3 дол.	2 дол.
	2	2 дол.	4 дол.	1 дол.	2 дол.
	3	1 дол.	3 дол.	5 дол.	3 дол.

Сформулювати відповідну транспортну задачу.

Розв'язати сформульовану задачу.

Скільки додаткових ящиків апельсинів можуть поставити перше та друге господарства, використовуючи додаткових робітників?

Задача 3

Три розподільних центри постачають автомобілі п'яти дилерам. Автомобілі від розподільних центрів до дилерів перевозяться трейлерами; вартість перевезень пропорційна відстані між пунктами відправлення та призначення й не залежить від ступеня завантаження трейлера. Відстані між розподільними центрами й дилерами, а також відповідні обсяги попиту та пропозиції, виражені в *кількостях* автомобілів, наведені далі. При повному завантаженні трейлер вміщує 18 автомобілів. Транспортні витрати становлять 25 дол. на одну милю шляху, пройденого трейлером.

		Дилер					
		1	2	3	4	5	Обсяг пропозиції
	1	100	150	200	140	35	400
Центр	2	50	70	60	65	80	200
	3	40	90	100	150	130	150
Обсяг попиту		100	200	150	160	140	

Сформулювати відповідну транспортну задачу.

Розв'язати сформульовану задачу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Жалдак М. І., Триус Ю. В.* Основи теорії оптимізації. — К.: Брама-Україна, 2005.
2. *Хэмди А. Таха.* Исследование операций. — СПб.: Питер, 2001.
3. *Кутковецький В. Я.* Дослідження операцій: Навч. посіб. — К., 2004.
4. *Жильцов О. Б., Кулян В. Р., Юнькова О. О.* Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій). — К., 2006.

Додаткова

5. *Экономическая* информатика / Под ред. П. В. Конюховского, Д. Н. Колесова. — СПб.: Питер, 2001.
6. *Информатика* для юристов и экономистов / С. Симонович и др. — СПб.: Питер, 2001.
7. *Математичне* програмування: Навч. посіб. / Т. П. Романюк, Т. О. Терещенко, Г. В. Присенко, І. М. Городкова. — К.: ІЗМН, 1996.
8. *Калихман И. С.* Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высш. шк., 1975.
9. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1985.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *А. А. Карпова*
Комп’ютерне верстання *М. М. Соколовська*

Зам. № ВКЦ-3069

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП