

МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

**НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**  
дисципліни  
**“ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ”**  
(для бакалаврів)

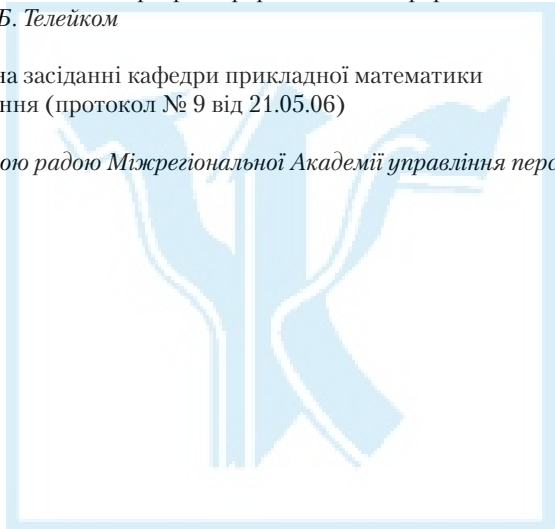
МАУП

Київ 2006

Підготовлено доцентом кафедри інформатики та інформаційних технологій *А. Б. Телейком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 9 від 21.05.06)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*



**МАУП**

**Телейко А. Б.** Навчальна програма дисципліни “Функціональний аналіз” (для бакалаврів). — К.: МАУП, 2006. — 18 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Функціональний аналіз”, варіанти контрольних робіт, питання для самоконтролю, а також список літератури.

© Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2006

## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета вивчення курсу “Функціональний аналіз” — опанувати класичний арсенал абстрактних математичних методів аналізу.

У пропонованому курсі вивчаються метричні простори та їх властивості, елементарні властивості топологічних просторів, лінійні нормовані, евклідові та локально-опуклі топологічні простори, простори лінійних функціоналів, властивості лінійних операторів.

Курс базується на дисциплінах дискретної математики, математичного аналізу, алгебри та геометрії і є базовим для курсів додаткових розділів аналізу, математичного програмування.

### ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН дисципліни “ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ”

№ пор.	Назва модуля і теми
	<b>Змістовий модуль I. Метричні та топологічні простори</b>
1	Метричні простори
2	Топологічні простори
	<b>Змістовий модуль II. Функціональні простори</b>
3	Нескінченновимірні лінійні простори
4	Нормовані простори
5	Евклідові простори
	<b>Змістовий модуль III. Лінійні оператори</b>
6	Лінійні оператори
Разом годин: 108	

**ЗМІСТ**  
**дисципліни**  
**“ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ”**

**Змістовий модуль I. Метричні та топологічні простори**

***Тема 1. Метричні простори***

Поняття метрики. Поняття метричного простору. Неперервні відображення метричних просторів. Відношення ізометричності. Поняття псевдометрики.

Граничні точки. Операція замикання. Збіжність. Щільні підмножини. Сепарабельність. Відкриті та замкнені множини.

Повнота метричного простору. Теорема про вкладені кулі. Теорема Бера про категорії. Канторівське поповнення метричного простору.

Принцип Банаха стискуючих відображень. Застосування принципу стискуючих відображень до доведення теорем існування та єдиності для диференціальних рівнянь. Застосування принципу стискуючих відображень до операторних рівнянь.

Цілом обмеженість. Компактність у метричному просторі. Передкомпактність. Теорема Арцела. Теорема Пеано. Рівномірна неперервність. Неперервні відображення метричних компактів.

*Література [1–3]*

***Тема 2. Топологічні простори***

Поняття топологічного простору. Відкриті та замкнені множини. Оператор замикання. Оператор внутрішності. Порівняння топологій. Аксиоми віддільності. Топологічні простори як узагальнення метричних.

База топологічного простору. Передбаза топологічного простору. Аксиоми зліченності. Збіжність в топологічних просторах.

Неперервні відображення. Гомеоморфізм.

Компактність в топологічних просторах. Неперервні відображення компактних просторів. Зліченна компактність. Локально компактні простори. Псевдокомпактні простори.

Метризовність топологічних просторів. Метризаційні теореми.

*Література [3; 4; 9; 11]*

## **Змістовий модуль II. Функціональні простори**

### ***Тема 3. Нескінченновимірні лінійні простори***

Лінійні простори. Приклади нескінченновимірних лінійних просторів. Підпростори. Фактор-простори. Лінійні функціонали. Геометричний зміст лінійного функціонала.

Опуклі множини. Опуклі тіла. Однорідно-опуклі функціонали. Функціонал Мінковського. Теорема Хана-Банаха. Слабкі топології. Слабка топологія в топологічному векторному просторі. Слабка топологія спряженого простору. Теорема Банаха-Алаоглу. Теорема Крейна-Мільмана.

*Література* [1–4; 7; 8; 10–12; 14]

### ***Тема 4. Нормовані простори***

Нормовані простори. Підпростори нормованого простору. Фактор-простори нормованого простору. Банахові простори.

Лінійні функціонали на нормованих просторах. Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі. Спряжений простір. Сильна топологія в спряженому просторі. Другий спряжений простір.

Слабка топологія та слабка збіжність в лінійних топологічних просторах. Слабка збіжність в нормованих просторах. Слабка топологія та слабка збіжність в спряженому просторі.

*Література* [1–3; 7; 8; 10–12; 14]

### ***Тема 5. Евклідові простори***

Евклідові простори. Існування ортогональних базисів. Процедура ортогоналізації. Ряд Фур'є. Нерівність Бесселя. Замкнуті ортогональні системи. Рівність Парсеваля. Теореми Вейерштраса. Теорема Ріса-Фішера. Гільбертові простори. Теорема про ізоморфізм для гільбертових просторів. Ортогональне доповнення. Пряма сума.

*Література* [1; 3; 5–8; 10–14]

## **Змістовий модуль III. Лінійні оператори**

### ***Тема 6. Лінійні оператори***

Лінійні оператори. Неперервність. Обмеженість. Операції над операторами. Обернений оператор. Оборотність. Спряжені оператори.

ри. Спряжені оператори в евклідовому просторі. Самоспряженість. Поняття спектра оператора. Резольвента.

Компактні оператори та їх властивості. Власні значення компактного оператора. Компактні оператори в гільбертовому просторі. Самоспряжені компактні оператори в гільбертовому просторі.

*Література* [1–3; 7; 9–12; 14]

## **ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ**

Варіант контрольної роботи вибирається за останньою цифрою номера залікової книжки. Цифра нуль відповідає номеру варіанта 10.

### **Варіант 1**

1. У просторі  $C[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій з метрикою

$$d(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$$

обчислити відстань між точками  $f(x) = \sin \frac{x}{10}$  та  $g(x) = x^2 + 1$ .

2. Розв'язати рівняння  $\operatorname{tg} x = 10 - 10x$  на відрізку  $[0;1]$  з точністю до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискуєче відображення.

3. Перевірити, чи система векторів  $\left\{ \frac{1}{(kn)^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  у просторі

$l_2$  сумованих в квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  є лінійно незалежною.

4. Перевірити, чи множина  $\{f \in C[0;1] \mid |f(x)| \leq 1\}$  є опуклою.

5. Знайти кут між векторами  $f(x) = x^3 + x^2$  та  $g(x) = 2x^2 - 6$  просторі  $C_2[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій зі скалярним добутком

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

6. Знайти точковий і неперервний спектри оператора  $A\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_1 = 0$ , у просторі  $l_2$  сумованих в квадраті послідовностей.

## Варіант 2

1. У просторі  $C_2[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій з метрикою

$$d(f, g) = \left( \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

обчислити відстань між точками  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$  та  $g(x) = x^3 + 1$ .

2. Розв'язати рівняння  $x^6 + 10x + 1 = 0$  на відрізку  $[0;1]$  з точністю до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискуєче відображення.

3. Перевірити, чи система векторів  $\sin nx$ ,  $n = 1, 2, \dots$  у просторі  $C[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій є лінійно незалежною.

4. Перевірити, чи множина  $\left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l_2 \mid \sum_{n=1}^\infty x_n^2 \leq 1 \right\}$  є опуклою, де

$l_2$  – простір сумованих у квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ .

5. Знайти кут між векторами  $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=1}^\infty$  та  $\left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^\infty$  у просторі  $l_2$  сумованих у квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  зі скалярним добутком

$$\left( \{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \right) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$$

6. Знайти точковий і неперервний спектри оператора  $Af(x) = x^2 f(x)$  у просторі  $C[0;2]$  неперервних на відрізку  $[0;2]$  функцій.

## Варіант 3

1. У просторі  $l_2$  сумованих у квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  з метрикою

$$d\left(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty\right) = \left( \sum_{n=1}^\infty (x_n - y_n)^2 \right)^{1/2}$$

обчислити відстань між точками  $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  та  $\left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ .

2. Розв'язати рівняння  $\frac{1}{\sqrt[10]{x}} = x - 1$  на відрізку  $[1,2]$  з точністю до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискуєче відображення.

3. Перевірити, чи система векторів  $\ln nx$ ,  $n = 1, 2, \dots$  у просторі  $C[1;2]$  неперервних на відрізку  $[1;2]$  функцій є лінійно незалежною.

4. Перевірити, чи множина  $\{f \in C[0;1] \mid |f(x)| \geq 1\}$  є опуклою, де  $C[0;1]$  – простір неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій.

5. Знайти кут між векторами  $\{n+1\}_{n=1}^{100}$  та  $\{2^n\}_{n=1}^{100}$  у просторі  $R^{100}$  100-мірних векторів зі скалярним добутком

$$\left( \{x_n\}_{n=1}^{100}, \{y_n\}_{n=1}^{100} \right) = \sum_{n=1}^{100} x_n y_n$$

6. Знайти точковий та неперервний спектри оператора  $A\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{x_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  у просторі  $l_2$  сумованих у квадраті послідовностей.

#### Варіант 4

1. У просторі  $l_{\infty}$  обмежених послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  з метрикою

$$d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sup_n |x_n - y_n|$$

обчислити відстань між точками  $\left\{ \frac{10}{n+10} \right\}_{n=1}^{\infty}$  та  $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ .

2. Розв'язати рівняння  $\sqrt[5]{x} = 2 - x$  на відрізку  $[1,2]$  з точністю до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискуєче відображення.

3. Перевірити, чи система векторів  $\cos nx$ ,  $n = 1, 2, \dots$  у просторі  $C[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій є лінійно незалежною.

4. Перевірити, чи множина  $\left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \geq 1 \right\}$  є опуклою,



де  $l_2$  — простір сумованих у квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

5. Знайти кут між векторами  $f(x) = 2\sin x$  та  $g(x) = \cos^3 x$  в просторі  $C_2\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  неперервних на відрізку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  функцій зі скалярним добутком

$$(f, g) = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx.$$

6. Знайти точковий та неперервний спектр оператора  $Af(x) = \frac{f(x)}{x}$  у просторі  $C[1,2]$  неперервних на відрізку  $[1,2]$  функцій.

### Варіант 5

1. У просторі  $R_{\infty}^{30}$  30-ти елементних послідовностей з метрикою

$$d(\{x_n\}_{n=1}^{30}, \{y_n\}_{n=1}^{30}) = \max_n |x_n - y_n|$$

обчислити відстань між точками  $\{\sqrt{2n}\}_{n=1}^{30}$  та  $\{\sqrt{n+8}\}_{n=1}^{30}$ .

2. Розв'язати рівняння  $\ln x = 2x - 4$  на відрізку  $[2,3]$  з точністю до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискуєче відображення.

3. Перевірити, чи система векторів  $e^{nx}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  у просторі  $C[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0,1]$  функцій є лінійно незалежною.

4. Перевірити, чи множина  $\left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 \leq 1 \right\}$  є опуклою,

де  $l_2$  — простір сумованих у квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

5. Знайти кут між векторами  $f(x) = e^x$  та  $g(x) = x^2$  в просторі  $C_2[1,2]$  неперервних на відрізку  $[1,2]$  функцій зі скалярним добутком

$$(f, g) = \int_1^2 f(x)g(x)dx$$

6. Знайти точковий та неперервний спектри оператора  $Af(x) = f(\sqrt{x})$  у просторі  $C[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій.

### Варіант 6

1. У просторі  $C[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0;2]$  функцій з метрикою

$$d(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 2} |f(x) - g(x)|$$

обчислити відстань між точками  $f(x) = \cos \frac{x}{10}$  і  $g(x) = x^2 - 1$ .

2. Розв'язати рівняння  $\cos x = 5 - 5x$  на відрізку  $[0,1]$  з точністю до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискуєче відображення.

3. Перевірити, чи система векторів  $\left\{ \frac{1}{(kn)^{2n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  у просторі  $l_2$  сумованих у квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  є лінійно незалежною.

4. Перевірити, чи множина  $\{f \in C[0;1] \mid |f^3(x)| \leq 1\}$  є опуклою.

5. Знайти кут між векторами  $f(x) = 2x^3 - x^2$  та  $g(x) = x^2 + 5$  у просторі  $C_2[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій зі скалярним добутком

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

6. Знайти точковий та неперервний спектр оператора  $A\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n-2}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_1 = 0, x_2 = 0$ , у просторі  $l_2$  сумованих у квадраті послідовностей.

### Варіант 7

1. У просторі  $C_2[0,1]$  неперервних на відрізку  $[0,1]$  функцій з метрикою

$$d(f, g) = \left( \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

обчислити відстань між точками  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$  та  $g(x) = x^3 - 1$ .

2. Розв'язати рівняння  $x^4 + 10x - 1 = 0$  на відрізку  $[0,1]$  з точністю до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискуєче відображення.

3. Перевірити, чи система векторів  $\sin n^2 x$ ,  $n = 1, 2, \dots$  у просторі  $C[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0,1]$  функцій є лінійно незалежною.

4. Перевірити, чи множина  $\left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2 \mid \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^2 \leq 1 \right\}$  є опуклою,

де  $l_2$  – простір сумованих у квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

5. Знайти кут між векторами  $\left\{ \frac{1}{4^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  та  $\left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  у просторі  $l_2$  сумованих у квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  зі скалярним добутком

$$\left( \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

6. Знайти точковий та неперервний спектри оператора  $Af(x) = x^3 f(x)$  у просторі  $C[0;2]$  неперервних на відрізку  $[0;2]$  функцій.

### Варіант 8

1. У просторі  $l_2$  сумованих у квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  з метрикою

$$d\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right)^{1/2}$$

обчислити відстань між точками  $\left\{ \frac{1}{4^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  та  $\left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ .

2. Розв'язати рівняння  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 2 - x$  на відрізку  $[1;2]$  з точністю

до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискуєче відображення.

3. Перевірити, чи система векторів  $\ln n^2 x$ ,  $n = 1, 2, \dots$  у просторі  $C[1;2]$  неперервних на відрізку  $[1;2]$  функцій є лінійно незалежною.

4. Перевірити, чи множина  $\{f \in C[0;1] \mid |f^3(x)| \geq 1\}$  є опуклою, де  $C[0;1]$  – простір неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій.

5. Знайти кут між векторами  $\{n-5\}_{n=1}^{100}$  та  $\{3^n\}_{n=1}^{100}$  у просторі  $R^{100}$  100-мірних векторів зі скалярним добутком

$$\left(\{x_n\}_{n=1}^{100}, \{y_n\}_{n=1}^{100}\right) = \sum_{n=1}^{100} x_n y_n.$$

6. Знайти точковий та неперервний спектри оператора  $A\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{x_n}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$  у просторі  $l_2$  сумованих у квадраті послідовностей.

### Варіант 9

1. У просторі  $l_{\infty}$  обмежених послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  з метрикою

$$d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sup_n |x_n - y_n|$$

обчислити відстань між точками  $\left\{\frac{5}{n+5}\right\}_{n=1}^{\infty}$  та  $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ .

2. Розв'язати рівняння  $\frac{\sqrt[3]{x}}{2} = x - 1$  на відрізку  $[1;2]$  з точністю до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискуєче відображення.

3. Перевірити, чи система векторів  $\cos n^2 x$ ,  $n=1, 2, \dots$  у просторі  $C[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій є лінійно незалежною.

4. Перевірити, чи множина  $\left\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2 \mid \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^2 \geq 1\right\}$  є опуклою,

де  $l_2$  – простір сумованих у квадраті послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

5. Знайти кут між векторами  $f(x) = 2\sin^3 x$  та  $g(x) = \cos x$  у просторі  $C_2 \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  неперервних на відрізку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  функцій з скалярним добутком

$$(f, g) = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx.$$

6. Знайти точковий та неперервний спектри оператора

$$Af(x) = \frac{f(x)}{x^2} \text{ у просторі } C[1;2] \text{ неперервних на відрізку } [1;2]$$

функцій.

### Варіант 10

1. У просторі  $R_\infty^{30}$  30-ти елементних послідовностей з метрикою

$$d(\{x_n\}_{n=1}^{30}, \{y_n\}_{n=1}^{30}) = \max_n |x_n - y_n|$$

обчислити відстань між точками  $\{\sqrt{3n}\}_{n=1}^{30}$  та  $\{\sqrt{n+12}\}_{n=1}^{30}$ .

2. Розв'язати рівняння  $\ln x = 6 - 2x$  на відрізку  $[2;3]$  з точністю до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискуєче відображення.

3. Перевірити, чи система векторів  $e^{nx^2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  у просторі  $C[0;1]$  неперервних на відрізку  $[0;1]$  функцій є лінійно незалежною.

4. Перевірити, чи множина  $\left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l_2 \mid \sum_{n=1}^\infty n^2 x_n \leq 1 \right\}$  є опуклою,

де  $l_2$  – простір сумованих у квадратах послідовностей  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ .

5. Знайти кут між векторами  $f(x) = e^{2x}$  та  $g(x) = x^3$  у просторі  $C_2[1;2]$  неперервних на відрізку  $[1;2]$  функцій зі скалярним добутком

$$(f, g) = \int_1^2 f(x)g(x)dx.$$

6. Знайти точковий та неперервний спектр оператора  $Af(x) = f(\sqrt[3]{x})$  у просторі  $C[0;1]$  неперервних на відрізок  $[0;1]$  функцій.

### **ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Сформулюйте поняття метрики.
2. Наведіть приклади метричних просторів.
3. В чому відмінність між метрикою та псевдометрикою?
4. Наведіть природні приклади псевдометрик.
5. Що таке ізометрія?
6. Наведіть нетривіальні приклади ізометричних просторів.
7. У чому полягає відмінність між точкою дотику та граничною точкою?
8. Що таке внутрішня точка?
9. Що таке ізольована точка?
10. Сформулюйте властивості операції замикання.
11. Наведіть поняття неперервності функції.
12. Доведіть, що відображення метрики є неперервним.
13. Наведіть приклад метричного простору, в якому куля більшого радіуса міститься в кулі меншого радіуса.
14. Наведіть приклад несепарабельного метричного простору.
15. Що таке фундаментальна послідовність?
16. Що таке повний метричний простір?
17. Наведіть приклади неповних метричних просторів.
18. Обґрунтуйте необхідність усіх умов теореми про вкладені кулі.
19. Наведіть приклади просторів першої категорії
20. Наведіть приклади просторів другої категорії.
21. опишіть процедуру поповнення метричного простору.
22. Сутність стискуючого відображення.
23. Обґрунтуйте необхідність усіх умов принципу стискуючих відображень.
24. Наведіть приклади застосування принципу стискуючих відображень.
25. Наведіть приклади цілком обмежених множин.
26. Наведіть приклад не цілком обмеженої множини.
27. Сформулюйте поняття компактності в термінах послідовностей.
28. Наведіть приклад передкомпактної не компактної множини.

29. Доведіть еквівалентність означень компактності в термінах послідовностей та покрить.
30. Наведіть приклад замкненої не компакної множини.
31. Сформулюйте поняття рівномірної неперервності.
32. Наведіть приклад неперервного не рівномірно неперервного відображення.
33. Наведіть приклад таких двох ізометричних компактів, що їх добутки на відрізок  $[0;1]$  не ізометричні.
34. Сформулюйте означення топологічного простору в термінах оператора замикання.
35. Сформулюйте означення топологічного простору в термінах відкритих множин.
36. Сформулюйте означення неперервного відображення в термінах відкритих множин.
37. Сформулюйте аксіоми віддільності.
38. Покажіть, що метричний простір є нормальним.
39. Наведіть приклад не нормального простору.
40. Що таке гомеоморфізм?
41. Наведіть приклад взаємно однозначного неперервного відображення, яке не є гомеоморфізмом.
42. Сформулюйте аксіоми зліченності.
43. Наведіть приклад компактного незліченно компактного простору.
44. Наведіть приклад локально компактного некомпактного простору.
45. Сформулюйте поняття бази та передбази простору.
46. опишіть стандартні базу та передбазу дійсної прямої.
47. Наведіть приклад неметризованого простору.
48. Яка топологія на просторі неперервних функцій відрізка слабша, інтегральна чи рівномірна?
49. Сформулюйте поняття лінійного простору.
50. Що таке вимір лінійного простору?
51. Наведіть приклади нескінченновимірних лінійних просторів.
52. опишіть конструкцію фактор-простору.
53. Наведіть приклад фактор-простору ко-виміру 2.
54. опишіть геометричний зміст лінійного функціоналу.
55. Сформулюйте поняття однорідно-опуклого функціоналу.
56. опишіть всі опуклі множини дійсної прямої.
57. Обґрунтуйте необхідність всіх умов теореми Хана — Банаха.

58. Опишіть поняття норми.
59. Що таке узгоджена з метрикою норма?
60. Наведіть приклад метричного простору, що не допускає узгодженої норми.
61. Наведіть приклади банахових просторів.
62. Сформулюйте означення евклідового простору.
63. Доведіть нерівність Коші — Буняковського.
64. Що таке узгоджений з нормою скалярний добуток?
65. Як перевірити, чи допускає нормований простір узгоджений скалярний добуток?
66. Наведіть приклад нормованого простору, що не допускає узгодженого скалярного добутку.
67. Опишіть процедуру ортогоналізації.
68. Наведіть поняття ряду Фур'є.
69. Доведіть нерівність Бесселя.
70. Що таке повна система векторів?
71. Що таке базис Гамеля?
72. Що таке замкнена система векторів?
73. Сформулюйте теореми Вейерштрасса про поліноміальні та тригонометричні наближення неперервних функцій.
74. У чому, на Вашу думку, значення теореми Ріса—Фішера?
75. Наведіть приклади гільбертових просторів.
76. Порівняйте поняття сильної та слабкої збіжності лінійних функціоналів.
77. Опишіть конструкцію спряженого простору.
78. У чому, на Вашу думку, важливість конструкції спряженого простору?
79. Наведіть означення лінійного оператора.
80. Що таке ядро оператора?
81. Порівняйте поняття обмеженості та неперервності лінійного оператора.
82. Наведіть приклади необоротних операторів.
83. Сформулюйте поняття спряженості операторів.
84. Наведіть приклади нетривіальних самоспряжених операторів.
85. Наведіть поняття спектра оператора.
86. Які Ви знаєте види спектрів лінійного оператора?
87. Що таке резольвента?
88. Опишіть властивості компактного оператора.
89. Якими можуть бути власні значення компактного оператора.
90. Сформулюйте теорему Гільберта — Шмідта.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

### Основна

1. *Банах С.* Курс функціонального аналізу. — К.: Рад. шк., 1948.
2. *Виленкин Н. Я. и др.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1964.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.

### Додаткова

4. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. — М.: Иностран. лит., 1959.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: Иностран. лит., 1962.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. — М.: Мир, 1966.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
9. *Келли Дж.* Общая топология. — М.: Наука, 1968.
10. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
11. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967.
12. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
13. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.
14. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967

## ***ЗМІСТ***

Пояснювальна записка .....	3
Тематичний план дисципліни “Функціональний аналіз” .....	3
Зміст дисципліни “Функціональний аналіз” .....	4
Варіанти контрольних робіт .....	6
Питання для самоконтролю .....	14
Список літератури .....	17



Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*  
Редактор *Т. М. Тележенко*  
Комп'ютерне верстання *М. М. Соколовська*

**МАУП**

Зам. № ВКЦ-2787

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)  
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП