

МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

**НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**  
**дисципліни**  
**“ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ”**  
**(для бакалаврів)**

Київ  
ДП «Видавничий дім «Персонал»  
2012

## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Підготовлено професором кафедри прикладної математики та програмування *Р. М. Чернігою*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 5 від 18.08.06)

Перезатверджено на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (протокол № 22 від 13.07.11)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*

**Черніга Р. М.** Навчальна програма дисципліни “Теорія функцій комплексної змінної” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2012. — 12 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Теорія функцій комплексної змінної”, вказівки до самостійного вивчення програмного матеріалу, питання для самоконтролю, а також список літератури.

- © Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2012
- © ДП «Видавничий дім «Персонал», 2012

Мета вивчення курсу — отримати знання, вміння та навички розв’язування задач з теорії функцій комплексної змінної. Теорія функцій комплексної змінної — це математична дисципліна, яка вивчає основи аналізу комплексних чисел і комплексних функцій, методи диференціального та інтегрального числення для комплексних функцій, властивості аналітичних функцій, основи теорії конформних відображень, особливі точки та ряди Лорана, теорію лишків та її застосування для розв’язання деяких задач математичної фізики.

Для вивчення курсу необхідні знання з математичного аналізу, лінійної алгебри та звичайних диференціальних рівнянь.

У процесі навчання студенти здобувають знання і формують навички розв’язування основних задач теорії функцій комплексної змінної, потрібні в подальшому при вивченні математичних дисциплін за програмою підготовки бакалавра зі спеціальності “Прикладна математика”, зокрема, при вивченні:

- рівнянь математичної фізики;
- числових методів рівнянь математичної фізики;
- диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- методів математичного моделювання;
- варіаційного числення.

Для підсумкової перевірки засвоєних знань студенти складають іспит.

## ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН дисципліни

### “ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ”

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
1	2
	<b>Змістовий модуль I. Основи аналізу функцій комплексної змінної</b>
1	Комплексні числа
2	Функції комплексної змінної
3	Похідна функції комплексної змінної
4	Означення та властивості аналітичних функцій
5	Інтегрування аналітичних функцій
6	Ряди Лорана та класифікація особливих точок

1	2
7	<b>Змістовий модуль II. Застосування функцій комплексної змінної</b>
8	Конформні відображення
9	Основи теорії лишків та її застосування
10	Гармонічні функції та їх застосування
	Перетворення Лапласа
Разом годин: 108	

## **ЗМІСТ** **дисципліни**

### **“ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ”**

#### **Змістовий модуль I. Основи аналізу функцій комплексної змінної**

##### **Тема 1. Комплексні числа**

Комплексні числа. Означення, модуль та аргумент комплексного числа. Зображення комплексних чисел. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Основні операції над комплексними числами та поле комплексних чисел. Алгебраїчна замкненість поля комплексних чисел. Невпорядкованість комплексних чисел. Послідовності комплексних чисел. Граничні точки. Нескінченно віддалена точка та компактифікація поля комплексних чисел. Стереографічна проекція.

*Література [1–6; 9–18]*

##### **Тема 2. Функції комплексної змінної**

Функція комплексної змінної. Неперервні функції. Одно- та багатозначні функції. Приклади елементарних однозначних і багатозначних функцій: лінійна, степенева, корінь  $n$ -го степеня. Збіжність функціональних і степеневих рядів з комплексними членами. Теорема Коші — Адамара. Показникова, тригонометричні та гіперболічні функції комплексної змінної. Логарифмічна функція. Інтеграл від функції комплексної змінної вздовж спрямлюваної (кусково-гладкої) кривої та його властивості. Формула зведення обчислення від інтеграла від функції комплексної змінної до інтеграла Рімана.

*Література [1–6; 9–18]*

##### **Тема 3. Похідна функції комплексної змінної**

Похідна функції комплексної змінної: означення та приклади. Формальні правила обчислення похідних. Теорема про диференційовність функції комплексної змінної. Умови Коші — Рімана в декартових і полярних координатах. Приклади застосування умов Коші — Рімана для встановлення диференційовності елементарних функцій. Формула обчислення уявної частини диференційованої функції комплексної змінної через відому дійсну частину.

*Література [1–6; 9–18]*

##### **Тема 4. Означення та властивості аналітичних функцій**

Поняття аналітичної функції. Означення та основні властивості аналітичних функцій. Два різних способи означення аналітичної функції — через диференційовність і через суму збіжного степеневого ряду. Геометрична інтерпретація аналітичної функції. Означення однолистої функції. Приклади однолистої функції та їх геометрична інтерпретація. Поняття конформного відображення.

*Література [1–6; 9–12]*

##### **Тема 5. Інтегрування аналітичних функцій**

Інтеграл вздовж замкненого контура від аналітичної функції в одно- та багатозв'язній областях. Інтегральна формула Коші. Теорема про середнє значення. Теорема про максимум модуля. Формула Коші для похідної аналітичної функції. Оцінки модуля похідної аналітичної функції. Нескінченна диференційовність аналітичної функції. Способи означення аналітичної функції. Теорема Ліувіля.

*Література [1–6; 9–12]*

##### **Тема 6. Ряди Лорана та класифікація особливих точок**

Аналітичні функції та їх степеневі ряди. Нулі аналітичної функції. Єдиність задавання аналітичної функції. Аналітичне продовження. Зображення рядом Лорана однозначної функції. Класифікація особливих точок однозначних аналітичних функцій. Цілі функції. Мероморфні функції. Поведінка однозначної аналітичної функції в околі полюса та суттєво особливої точки.

*Література [1–6; 9–12]*

## Змістовий модуль II. Застосування функцій комплексної змінної

### Тема 7. Конформні відображення

Означення та властивості конформних відображень. Основна задача теорії конформних відображень. Теорема Рімана. Дробово-лінійні конформні відображення та їх властивості. Формула знаходження дробово-лінійного відображення за трьома точками. Конформне відображення комплексної півплощини та круга в півплощину або круг. Відображення многокутників. Інтеграл Крістофеля — Шварца.

*Література* [1–6; 9–12]

### Тема 8. Основи теорії лишків та її застосування

Означення лишка. Методи обчислення лишка однозначної аналітичної функції. Обчислення лишка в полюсі. Лишок у нескінченно віддаленій точці. Основна теорема теорії лишків. Обчислення контурних інтегралів. Обчислення невластних інтегралів дійсного аналізу за допомогою теорії лишків. Логарифмічний лишок.

*Література* [1–6; 9–12]

### Тема 9. Гармонічні функції та їх застосування

Гармонічні функції. Аналітичні та спряжені гармонічні функції. Побудова гармонічної функції за спряженою. Інваріантність оператора Лапласа відносно конформних відображень. Задача Діріхле. Розв'язання задачі Діріхле за допомогою функції Гріна. Функція Гріна задачі Діріхле: означення, фізичний зміст. Формула Гріна. Побудова функції Гріна для півплощини та круга. Розв'язання задачі Діріхле для круга. Формула Пуасона. Розв'язання задачі Діріхле для півплощини. Формула Шварца.

*Література* [1–6; 9–12]

### Тема 10. Перетворення Лапласа

Перетворення Лапласа. Основні його властивості. Операційний метод і його застосування до розв'язування задач Коші для лінійних звичайних диференціальних рівнянь і крайових задач для параболічних рівнянь. Випадок застосування до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь типу згортки.

*Література* [7–8; 15–18]

## ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ ПРОГРАМНОГО МАТЕРІАЛУ

1. Регулярна робота з конспектом лекцій та опрацювання відповідного матеріалу рекомендованих літературних джерел.
2. Регулярне виконання домашніх завдань для підготовки до практичних занять.
3. Самостійне опрацювання теми “Перетворення Лапласа” теоретичного курсу. Для успішного засвоєння цієї теми необхідно повторити матеріал з курсу математичного аналізу про перетворення Фур'є та матеріал з курсу диференціальних рівнянь про постановку та розв'язування задач Коші, а також відвідати консультацію, яку зобов'язаний провести викладач. Матеріал для опрацювання цієї теми рекомендується взяти з [7; 8; 15–18].

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Формули для визначення модуля і аргумента комплексного числа.
2. Тригонометрична форма комплексного числа.
3. Показникова форма комплексного числа.
4. Як виконуються арифметичні дії над комплексними числами?
5. Формула Муавра.
6. Формула для знаходження  $n$  коренів з комплексного числа.
7. Означення границі послідовності комплексних чисел.
8. Нескінченно віддалена точка комплексної площини.
9. Означення функції комплексної змінної.
10. Як вводиться поняття неперервності функції комплексної змінної?
11. Приклад одно- та багатозначної функції комплексної змінної.
12. Означення поточної збіжності функціонального ряду з комплексними членами.
13. Означення рівномірної збіжності функціонального ряду з комплексними членами.
14. Загальний запис степеневого ряду з комплексними членами.
15. Теорема Коші — Адамара для степеневих рядів.
16. Розвинути показникову функцію комплексного аргумента в степеневий ряд.

17. Як виражаються тригонометричні функції комплексного аргумента через показникову функцію?
18. Як виражаються гіперболічні функції комплексного аргумента через показникову функцію?
19. Зв'язок між гіперболічним і звичайним синусами у випадку комплексної змінної.
20. Зв'язок між гіперболічним і звичайним косинусами у випадку комплексної змінної.
21. Означення області на комплексній площині.
22. Означення однозв'язної області.
23. Означення інтеграла від функції комплексної змінної вздовж кривої.
24. Як зміниться значення інтеграла від функції комплексної змінної, якщо змінити орієнтацію кривої?
25. Формула зведення обчислення інтеграла від функції комплексної змінної до інтеграла Рімана.
26. Означення диференційованості функції комплексної змінної в точці.
27. Умови Коші — Рімана.
28. Умови Коші — Рімана в полярній системі координат.
29. Теорема про умови диференційованості функції комплексної змінної.
30. Формула похідної для диференційованої функції.
31. Формула похідної для диференційованої функції в полярній системі координат.
32. Довести, що для функції  $\operatorname{sh}(z)$  виконуються умови Коші — Рімана.
33. Довести, що для функції  $\operatorname{cos}(z)$  виконуються умови Коші — Рімана.
34. Чи гарантує диференційованість функції комплексної змінної диференційованість її дійсної та уявної частин?
35. Приклад функції комплексної змінної, диференційованої лише в одній точці.
36. Чи диференційована функція, яка є добутком двох диференційованих функцій?
37. Означення аналітичної функції в точці.
38. Означення аналітичної функції в області.
39. Чи є сума, різниця та добуток двох аналітичних функцій аналітичною функцією?

40. Теорема про аналітичну функцію як суму збіжного степеневого ряду.
41. Розвинути експоненту від комплексної змінної  $z$  в степеневий ряд.
42. Означення однолистої функції.
43. Геометрична інтерпретація однолистої аналітичної функції на прикладі лінійної функції.
44. Чи є похідна від аналітичної функції в деякій області знову аналітичною в тій самій області?
45. У що перетворює лінійна функція  $w = az$ ,  $a \in \mathbb{C}$  промінь з початком у точці  $O$ ?
46. У що перетворює лінійна функція  $w = az$ ,  $a \in \mathbb{C}$  коло з центром у точці  $O$ ?
47. Як перетворюється промінь з початком у точці  $O$  при дії функції  $w = 1/z$ ?
48. Як перетворюється круг з центром у точці  $O$  при дії функції  $w = 1/z$ ?
49. В яких областях показникова функція однолистова?
50. Означення конформного відображення.
51. Що таке коефіцієнт лінійного розтягу в заданій точці  $z$  при дії аналітичної функції  $f(z)$ ?
52. На який кут повертаються всі криві, що проходять через задану точку  $z$ , при дії конформного відображення  $f(z)$ ?
53. Формула обчислення довжини образу кривої при дії конформного відображення  $f(z)$ .
54. Формула обчислення площі образу області при дії конформного відображення  $f(z)$ .
55. Як обчислити інтеграл вздовж замкненої кривої (контур) від аналітичної функції в однозв'язній області?
56. Інтегральна формула Коші.
57. Теорема Ліувіля.
58. Що таке аналітичне продовження?
59. Що таке ряд Лорана?
60. Як класифікуються особливі точки аналітичних функцій?
61. Поведінка аналітичної функції в околі полюса.
62. Чи є суперпозиція конформних відображень конформним відображенням?

63. Теорема Рімана.
64. Загальна формула для дробово-лінійного перетворення та знаходження оберненого до нього.
65. У що відображає дробово-лінійне відображення коло?
66. У що відображає дробово-лінійне відображення пряму?
67. Формула знаходження дробово-лінійного відображення за трьома різними точками та їх образами.
68. Записати дробово-лінійне відображення, яке відображає дві різні задані точки у точку нуль і нескінченно віддалену точку.
69. Записати будь-яке конформне відображення, яке відображає комплексну півплощину в півплощину.
70. Означення ізольованої особливої точки, яка є полюсом.
71. Приклади функцій, що мають ізольовані особливі точки, які відповідно є полюсом і суттєво особливою.
72. Означення ізольованої особливої точки, яка є суттєво особливою.
73. Приклад обчислення будь-якого інтеграла за допомогою лишків.
74. Означення лишка.
75. Як обчислити лишок у полюсі?
76. Який лишок у нескінченно віддаленій точці?
77. Основна теорема теорії лишків.
78. Яка сума лишків функції, що є аналітичною скрізь, крім скінченної кількості ізольованих точок?
79. Означення гармонічної функції.
80. Формула побудови гармонічної функції за спряженою.
81. Оператор Лапласа для функції двох дійсних змінних.
82. Що отримується в підсумку, якщо подіяти оператором Лапласа на дійсну частину аналітичної функції?
83. Що отримується в підсумку, якщо подіяти оператором Лапласа на уявну частину аналітичної функції?
84. Функція Гріна для задачі Діріхле.
85. Що таке задача Діріхле для круга?
86. Як розв'язати задачу Діріхле за допомогою функції Гріна?
87. Функція Гріна для півплощини та круга.
88. Що таке формула Пуасона?
89. Формула перетворення Лапласа.
90. Застосування перетворення Лапласа до похідної шуканої функції.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

### Основна

1. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1982. — 488 с.
2. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. — М.: Наука, 1985. — 336 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
4. Гольберг А. А., Шеремета М. М., Заблоцький М. В., Скасків О. Б. Комплексний аналіз. — Львів: Афіша, 2002. — 204 с.
5. Грищенко А. Е., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Теория функций комплексной переменной. Решение задач. — К.: Выща шк., 1986. — 336 с.
6. Білоколот Є. Д., Шека Д. Д. Збірник задач з комплексного аналізу. — К., 2004. — 58 с.

### Додаткова

7. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979. — 392 с.
8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
9. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
10. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 296 с.
11. Евграфов М. А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1968. — 472 с.
12. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984. — 432 с.
13. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1976.
14. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. — 436 с.
15. Godement R. Analyse methematique. III. — Springer-Verlag, Berlin, 2002. — 490 p.
16. Godement R. Analyse methematique. IV. — Springer-Verlag, Berlin, 2003. — 600 p.
17. Kaczor W. J., Nowak M. T. Problems in mathematical analysis. II. — AMS, Providence, 2001. — 398 p.
18. Kaczor W. J., Nowak M. T. Problems in mathematical analysis. III. — AMS, Providence, 2003. — 356 p.

## ***ЗМІСТ***

Пояснювальна записка .....	3
Тематичний план дисципліни “Теорія функцій комплексної змінної” .....	3
Зміст дисципліни “Теорія функцій комплексної змінної” ...	4
Вказівки до самостійного вивчення програмного матеріалу.....	7
Питання для самоконтролю .....	7
Список літератури.....	11

Відповідальний за випуск *Ю. В. Нешкуненко*  
Редактор *І. В. Хронюк*  
Комп’ютерне верстання *Г. В. Макуха, О. М. Бабаєва*

Зам. № ВКЦ-2699

Формат 60 84/16, Папір офсетний.  
Друк ротатійний трафаретний.  
Наклад 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)  
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»  
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008 р.*

Надруковано в друкарні ДП «Видавничий дім «Персонал»