

МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА
дисципліни
“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”
(для бакалаврів спеціальності “Прикладна математика”)

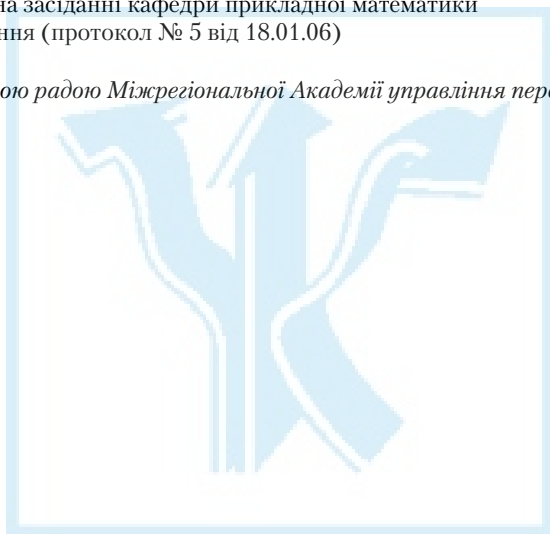
МАУП

Київ 2006

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики
та програмування *В. І. Панчуком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики
та програмування (протокол № 5 від 18.01.06)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом



МАУП

Панчук В. І. Навчальна програма дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” (для бакалаврів спеціальності “Прикладна математика”). — К.: МАУП, 2006. — 15 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика”, питання для самоконтролю, а також список літератури.

© Міжрегіональна Академія
управління персоналом (МАУП),
2006

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Навчальний курс передбачає систематичний виклад математичних основ і положень теорії ймовірностей та статистики. Він охоплює такі важливі поняття, як стохастичний експеримент, ймовірнісні події та величини, розподіли та числові характеристики випадкових величин, граничні теореми теорії ймовірностей, класичні задачі та методи теорії оцінювання статистичних параметрів і перевірки статистичних гіпотез, кореляційний і регресійний аналізи та ін.

Мета вивчення дисципліни — опанувати основи теорії, виробити ймовірнісно-статистичне мислення та інтуїцію, сформувати навички побудови ймовірнісних моделей дослідження та розв'язування відповідних задач.

Для засвоєння матеріалу навчальної програми потребуються знання низки математичних дисциплін, зокрема дискретної математики, основ комбінаторики, математичного аналізу, лінійної алгебри в обсязі, передбаченому відповідними навчальними програмами.

У результаті вивчення дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” студенти повинні

знати і розуміти:

- важливі поняття теорії ймовірностей;
- методи обчислення ймовірностей випадкових подій та випадкових величин;
- числові характеристики та закони розподілу випадкових величин;
- закон великих чисел та граничні теореми теорії ймовірностей;
- базові поняття математичної статистики;
- методи опрацювання емпіричних даних, одержання точкових та інтервальних статистичних оцінок невідомих параметрів, перевірки статистичних гіпотез на основі вибірових даних;
- елементи теорії регресії і кореляції;

уміти:

- застосовувати методи обчислення ймовірностей складених випадкових подій;
- використовувати математичний апарат для дослідження дискретних і неперервних випадкових величин;
- застосовувати методи аналізу статистичної інформації для розв'язання типових практичних задач з поданням результатів у необхідному вигляді (числа, формули, графіка тощо);

- встановлювати теоретико-ймовірнісні закономірності та використовувати отримані результати для обґрунтування прийнятих рішень;
- самостійно орієнтуватися в літературних джерелах з предмету.

Передбачається, що глибоке засвоєння основних понять та методів теорії ймовірностей сприятиме вивченню загальних і спеціальних дисциплін і в подальшому оволодінню теорії випадкових процесів, яка широко використовується в теорії керування при створенні високонадійних систем, теорії масового обслуговування, теорії надійності та багатьох інших важливих напрямках сучасної науки і техніки.

Запропонований курс розрахований на підготовку фахівців вищої кваліфікації з напрямку “Прикладна математика”.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
дисципліни
“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
1	2
	Змістовий модуль 1. Поняття ймовірності та основні правила її обчислення
1	Вступ до теорії ймовірностей. Випадкові події та ймовірності
2	Важливі теореми теорії ймовірностей
3	Послідовність незалежних випробовувань за схемою Бернуллі
	Змістовий модуль 2. Випадкові величини
4	Дискретні випадкові величини, їх закони розподілів та основні числові характеристики
5	Неперервні випадкові величини, їх функції розподілів та основні числові характеристики
6	Системи випадкових величин (випадкові вектори)
7	Важливі розподіли випадкових величин
8	Функції випадкових аргументів
9	Закон великих чисел. Граничні теореми теорії ймовірностей
10	Елементи теорії випадкових процесів

1	2
11	Змістовий модуль 3. Математична статистика
12	Описова математична статистика
13	Основи теорії оцінювання невідомих параметрів розподілів
14	Елементи теорії кореляції і регресії
	Перевірка статистичних гіпотез
Разом годин: 216	

ЗМІСТ
дисципліни

“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”

Змістовий модуль 1. Поняття ймовірності та основні правила її обчислення

Тема 1. Вступ до теорії ймовірностей. Випадкові події та ймовірності

Приклади стохастичних дослідів. Поняття випадкової події, класифікація подій. Алгебра подій. Важливі моделі знаходження ймовірностей подій. Властивості ймовірності. Деякі формули комбінаторного аналізу. Випадкові події як підмножини у просторі елементарних подій. Про аксіоматичну побудову теорії ймовірностей.

Література [1–3; 4, с. 14–30; 5, с. 3–15; 6; 9–11; 14–18]

Тема 2. Важливі теореми теорії ймовірностей

Поняття стохастичної незалежності подій. Умовна ймовірність та її властивості. Теорема про ймовірність добутку подій. Ймовірність появи хоча б однієї події.

Повна група подій. Формула повної ймовірності. Байєсові формули ймовірності гіпотез.

Література [1–3; 4, с. 31–53; 5, с. 16–25; 6; 9–18]

Тема 3. Послідовність незалежних випробувань за схемою Бернуллі

Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Найімовірніше число “успіхів”. Поняття розподілу ймовірностей у схемі Бернуллі.

Асимптотичні формули для знаходження біномних ймовірностей. Теорема Пуассона для малоїмовірних випадкових подій. Локальна та інтегральна граничні теореми Муавра – Лапласа.

Література [1–3; 4, с. 55–63; 5, с. 26–37; 6; 9–18]

Змістовий модуль 2. Випадкові величини

Тема 4. Дискретні випадкові величини, їх розподіли та основні числові характеристики

Поняття випадкової величини. Дискретні випадкові величини. Задавання законів їх розподілу. Функція розподілу та її властивості.

Числові характеристики дискретних випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, моменти; їх властивості. Мода та медіана.

Функції від дискретних випадкових величин; математичне сподівання функції від випадкової величини.

Література [1–3; 4, с. 64–100; 5, с. 38–56; 6; 9–18]

Тема 5. Неперервні випадкові величини, їх функції розподілів та основні числові характеристики

Інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини, її властивості. Диференціальна функція (щільність) розподілу, її властивості. Крива розподілу. Імовірнісний зміст диференціальної функції.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини. Дисперсія, середнє квадратичне відхилення. Початкові та центральні моменти, коефіцієнт асиметрії, ексцес.

Література [1–3; 4, с. 111–126; 5, с. 38–56; 6; 9–18]

Тема 6. Системи випадкових величин (випадкові вектори)

Поняття випадкового вектора. Функція розподілу випадкового вектора; щільність розподілу. Маргінальні розподіли.

Числові характеристики системи двох випадкових величин.

Корельованість і залежність випадкових величин.

Література [1–3; 4, с. 155–185; 5, с. 57–71; 6; 9; 14–18]

Тема 7. Важливі розподіли випадкових величин

Основні розподіли дискретних випадкових величин (рівномірний на скінченній множині, біномний, геометричний, гіпергеометричний, Пуассона та ін.).

Поняття простого потоку подій.

Закони розподілу неперервних випадкових величин: рівномірний на відрізку, показниковий (експоненціальний), нормальний на площині, Лапласа та ін.

Ймовірність потрапляння значень нормально розподіленої величини в заданий інтервал.

Значення та практичне використання ймовірнісних розподілів.

Література [1–3; 4, с. 127–155; 5, с. 90–105; 6; 9–18]

Тема 8. Функції випадкових аргументів

Поняття функції випадкового аргумента. Закон розподілу ймовірностей функції одного випадкового аргумента. Закон розподілу ймовірностей функції двох випадкових аргументів.

Числові характеристики функцій випадкових аргументів (математичні сподівання, дисперсії, кореляційний момент).

Література [1–3; 5, с. 72–81; 10; 18]

Тема 9. Закон великих чисел. Граничні теореми теорії ймовірностей

Нерівність Чебишева. Теорема Чебишева та її значення. Теорема Бернуллі.

Центральна гранична теорема теорії ймовірностей. Застосування закону великих чисел.

Література [1–3; 4, с. 101–110, 135–137; 5, с. 106–113; 6; 9; 10–18]

Тема 10. Елементи теорії випадкових процесів

Означення випадкового процесу та його основні характеристики.

Марковські процеси. Марковські ланцюги та їх класифікація.

Поняття потоку подій та його властивості.

Література [1–3; 4, с. 69–72, 380–385, 455–460; 11; 17]

Змістовий модуль 3. Математична статистика

Тема 11. Описова математична статистика

Основні поняття та типові задачі математичної статистики.

Методи формування статистичної інформації. Генеральна та вибіркова сукупності. Основні вимоги до випадкових вибірок. Подання статистичної інформації (варіаційний та статистичний ряди вибірки; графічні зображення статистичних даних полігонами та гістограма-

ми; аналітичне подання статистичного матеріалу). Емпірична функція (комулята) розподілу та її властивості. Теорема Глівенка — Кантеллі про граничну поведінку емпіричної функції розподілу.

Числові характеристики статистичного ряду (середнє арифметичне, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, емпіричні початкові та центральні моменти, мода, медіана), способи їх розрахунку.

Література [3; 4, с. 187–196; 5, с. 114–132; 6; 9; 11; 18]

Тема 12. Основи теорії оцінювання невідомих параметрів розподілів

Статистичне оцінювання параметрів генеральної сукупності. Вимоги до статистичних оцінок. Нерівність Рао — Крамера.

Оцінка числових характеристик генеральної сукупності. Методи одержання статистичних оцінок невідомих параметрів: моментів (К. Пірсона), максимальної правдоподібності (Р. Фішера).

Деякі спеціальні розподіли математичної статистики.

Поняття про інтервальні оцінки. Довірчий (надійний) інтервал, його побудова для невідомих параметрів з нормальним розподілом.

Властивості статистичних оцінок параметрів деяких стандартних розподілів.

Література [4, с. 197–219, 145–147; 5, с. 133–139; 6; 9; 11; 13; 17; 18]

Тема 13. Елементи теорії регресії і кореляції

Суть і значення кореляційного аналізу. Емпіричний аналог двовимірного розподілу (поняття маргінального, умовного та умовного середнього розподілів). Вибіркове рівняння регресії. Метод найменших квадратів розрахунку параметрів регресії.

Лінійна та нелінійна кореляції. Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості.

Вибіркове кореляційне відношення. Рангова кореляція.

Література [4, с. 253–280; 6; 9; 17; 18]

Тема 14. Перевірка статистичних гіпотез

Основні поняття теорії перевірки гіпотез. Загальна схема побудови критеріїв перевірки гіпотез. Значення критерію, рівень значущості та критична область. Критерії як процедура перевірки гіпотез. Помилки першого та другого роду. Потужність критерію.

Перевірка гіпотез про параметри розподілу: гіпотези про рівність математичних сподівань двох нормально розподілених випадкових величин при відомих та невідомих дисперсіях; гіпотези про рівність дисперсій двох нормальних розподілів; гіпотези про рівність нулю коефіцієнта кореляції та ін.

Критерії згоди Пірсона.

Література [4, с. 281–333; 5, с. 140–148; 6; 9; 11; 17; 18]

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Поняття випадкового експерименту. Приклади таких експериментів.
2. Які події називаються випадковими? Приклади випадкових подій.
3. Приклади достовірних і неможливих подій.
4. Які події називаються несумісними?
5. Поняття “імовірність події”. Приклади.
6. Чому дорівнює ймовірність достовірної та неможливої подій?
7. Основні властивості ймовірності.
8. Основні поєднання (перестановки, розміщення, сполучення). Приклади використання при розрахунку ймовірностей подій.
9. Що називається простором елементарних подій? Приклади елементарних та складених подій.
10. Які операції виконуються над подіями?
11. Аксиоми, на яких будується теорія ймовірностей.
12. Що таке умовна ймовірність? Властивості та приклади умовних ймовірностей.
13. Теорема множення ймовірностей для двох залежних (незалежних) подій.
14. Попарна незалежність подій. Приклади.
15. Які події називаються незалежними в сукупності?
16. Зв'язок між незалежністю в сукупності та попарною незалежністю подій.
17. Чи різняться незалежні та несумісні події?
18. Яку подію називають протилежною та як обчислити її ймовірність? Наведіть приклади
19. Запишіть формулу обчислення ймовірності появи хоча б однієї з n несумісних подій. Приклади.

20. Теорема додавання ймовірностей.
21. Який вигляд має формула повної ймовірності та яке її застосування? Приклади цієї формули.
22. Формули Байеса. Застосування та приклади цієї формули.
23. Послідовність випробувань за схемою Бернуллі. Запишіть формулу Бернуллі. Приклади.
24. Що називається найімовірнішим числом появ події A у випробуваннях Бернуллі та як його визначають?
25. Використання граничних теорем у схемі Бернуллі.
26. Як оцінюється ймовірність випадкової події через частоту її появи?
27. Дискретні випадкові величини. Якими способами задають закони їх розподілу? Приклади цих величин.
28. Означення функції розподілу дискретної випадкової величини та її основні властивості.
29. Як проконтролювати правильність побудови закону розподілу?
30. Як визначити числові характеристики дискретних випадкових величин? Властивості цих характеристик.
31. Приклади неперервних випадкових величин.
32. Означення функції розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин та її властивості.
33. Диференціальна функція розподілу та її властивості.
34. Числові характеристики неперервних випадкових величин та їх властивості.
35. Як обчислюється ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал (a, b) за допомогою інтегральної функції розподілу?
36. Означення системи двовимірних дискретних випадкових величин (X, Y) . Закони розподілу цих величин.
37. Що називається інтегральною та диференціальною функціями (щільністю) розподілу для системи двох випадкових величин (X, Y) ?
38. Що називається умовною щільністю ймовірностей випадкової величини Y при фіксованому X та величини X при фіксованому Y ?
39. Що називається умовним математичним сподіванням випадкової величини X при фіксованому Y та величини Y при фіксованому X ?
40. Що називається рівняннями регресії Y за X та X за Y ?

41. Що називається кореляційною матрицею системи випадкових величин? Приклад.
42. За якою формулою обчислюється математичне сподівання випадкової величини X для системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) ? Приклад.
43. За якою формулою обчислюється дисперсія випадкової величини X для системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) ?
44. За якою формулою обчислюється математичне сподівання випадкової величини Y для двох неперервних випадкових величин (X, Y) ?
45. За якою формулою обчислюється дисперсія випадкової величини Y для системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) ?
46. За якою формулою обчислюється умовне математичне сподівання $M(x/y)$?
47. За якою формулою обчислюється умовне математичне сподівання $M(y/x)$?
48. За якою формулою обчислюється коефіцієнт кореляції для двох випадкових величин X та Y ?
49. Залежні та незалежні випадкові величини.
50. Приклад випадкової величини з біномним законом розподілу. Визначення числових характеристик випадкової величини, розподіленої за біномним законом.
51. Закон біномного розподілу рядом розподілу.
52. Накресліть многокутники біномного розподілу при $n = 3$ і $p = 0,2; 0,3; 0,5; 0,7; 0,8$. Особливості цих многокутників.
53. Приклад випадкової величини, що розподіляється за законом Пуассона. Числові характеристики цієї випадкової величини.
54. Накресліть многокутники розподілу Пуассона при $\lambda = 0,5; 1; 2; 3,5$. Особливості цих многокутників.
55. Приклади випадкових величин, що мають гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей.
56. Закон рівномірного розподілу ймовірностей випадкової величини. Чому дорівнюють числові характеристики рівномірно розподіленої випадкової величини?
57. Нормальний розподіл (Гаусса) та його значення в теорії ймовірностей.
58. Якими параметрами визначається нормальний закон розподілу?

59. Чому дорівнюють числові характеристики нормально розподіленних випадкових величин?
60. Загальний вигляд нормального розподілу та його особливості.
61. Запишіть вираз ймовірності того, що нормально розподілена випадкова величина потрапить до заданого інтервалу $a < X < b$.
62. У чому полягає правило трьох сигм?
63. Показниковий розподіл та його значення в теорії ймовірностей.
64. Приклади застосування експоненціального закону розподілу.
65. Закон розподілу ймовірностей функції одного випадкового аргумента.
66. Закон розподілу ймовірностей функції двох випадкових аргументів.
67. Числові характеристики функцій випадкових аргументів (математичні сподівання, дисперсії, кореляційний момент).
68. За якою формулою обчислюється математичне сподівання для функції дискретного випадкового аргумента?
69. За якою формулою обчислюється математичне сподівання для функції неперервного випадкового аргумента?
70. Сформулюйте та доведіть нерівність Чебишева та теорему Чебишева.
71. Коли застосовують теорему Бернуллі?
72. Граничні теореми, їх застосування в математичній статистиці.
73. Означення випадкового процесу та його основні характеристики.
74. Марковські ланцюги та їх класифікація.
75. Поняття потоку подій та його властивості. Потік Пуассона та сфера його застосування.
76. Генеральна та вибіркова сукупності та їх види. Приклади.
77. Яка вибірка називається репрезентативною?
78. Що таке статистичний ряд, варіанта, варіаційний ряд? Приклади.
79. Дайте означення полігону частот. Як його побудувати? Приклади.
80. Що таке гістограма частот, гістограма відносних частот та як їх будують?
81. Вибіркове середнє, вибіркова дисперсія, середнє квадратичне відхилення та їх властивості.
82. За якою формулою обчислюється дисперсія у практичних задачах? Приклад.

83. Поняття статистичної оцінки.
84. Що таке незміщеність, ефективність, спроможність, достатність статистичних оцінок?
85. Оцінка числових характеристик (дисперсії, математичного сподівання) генеральної сукупності.
86. Метод моментів для одержання спроможних оцінок параметрів (метод К. Пірсона).
87. Означення логарифмічної функції правдоподібності.
88. Метод максимальної правдоподібності (метод Р. Фішера).
89. Які оцінки параметрів розподілу називаються інтервальними? Відмінності між точковим та інтервальним оцінюваннями.
90. Як визначається довірчий інтервал для математичного сподівання при відомому та при невідомому σ ?
91. Вибіркове рівняння регресії.
92. Лінійна та нелінійна регресії.
93. Структура кореляційної таблиці.
94. Метод найменших квадратів розрахунку параметрів регресії.
95. Що таке вибірковий коефіцієнт кореляції? Визначення та властивості.
96. Коли кореляційну залежність називають нелінійною?
97. Що таке статистична гіпотеза? Яка гіпотеза називається нульовою, альтернативною (конкуруючою)?
98. Що називається статистичним критерієм та рівнем значущості критерію?
99. Перевірка гіпотези про вигляд розподілу.
100. Перевірка гіпотези про рівність двох нормальних розподілів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1963.
2. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Физматгиз, 1965.
3. *Жлуктенко Ю. О.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посіб.: У 2 ч. — К.: Вид-во КНЕУ, 2000.
4. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 1999. — 480 с.
5. *Горбань С. Ф., Снижко Н. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: МАУП, 1999. — 164 с.

6. *Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики* / Р. К. Чорней та ін. — К.: МАУП, 2003.
7. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Практикум з курсу “Теорія ймовірностей і математична статистика”. — К.: Вид-во КІНГ, 1991.
8. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Практикум з математичної статистики. — К.: Вид-во КІНГ, 1991.
9. *Агапов Г. И.* Задачник по теории вероятностей. — М.: Высш. шк., 1986 — 80 с.
10. *Каніовська І. Ю.* Теорія ймовірностей у прикладах і задачах. — К.: Політехніка НТУУ КПІ, 2004. — 154 с.

Додаткова

11. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: Выща шк., 1979. — 408 с.
12. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк., 1999.
13. *Кремер Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: ЮНИТИ, 2000.
14. *Шефтель З. Г.* Теорія ймовірностей. — К., 1994.
15. *Тюрин Ю. Н., Макаров А. А.* Анализ данных на компьютере: — М.: ИНФРА-М, 2003. — 544 с.
16. *Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Зубков А. М.* Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Наука, 1980. — 214 с.
17. *Конет І. М.* Теорія ймовірностей та математична статистика в прикладах і задачах. — Кам'янець-Подільський: Абетка, 2001. — 218 с.
18. *Сеньо П. С.* Теорія ймовірностей та математична статистика. — К.: Центр навч. літ., 2004. — 360 с.

ЗМІСТ

Пояснювальна записка	3
Тематичний план дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика”	4
Зміст дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика”	5
Питання для самоконтролю.....	9
Список літератури.....	13



МАУП

Зам. № ВКЦ-2694

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП