

МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА
дисципліни
“ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ”
(для бакалаврів)

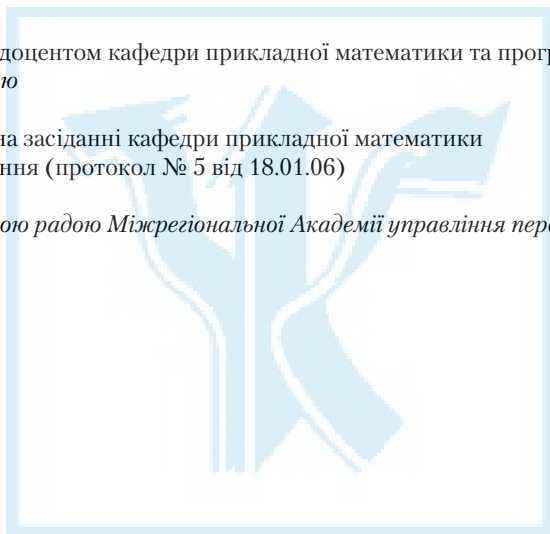
МАУП

Київ 2006

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики та програмування
Н. Г. Кирилахою

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики
та програмування (протокол № 5 від 18.01.06)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом



Кирилаха Н. Г. Навчальна програма дисципліни “Варіаційне числення”
(для бакалаврів). — К.: МАУП, 2006. — 12 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Варіаційне числення”, питання для самоконтролю, а також список літератури.

© Міжрегіональна Академія
управління персоналом (МАУП),
2006

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Курс “Варіаційне числення” є своєрідним містком серед загально-освітніх дисциплін, таких як математичний аналіз, диференціальні рівняння, рівняння математичної фізики прикладних задач з розділів природознавства. Сучасна освіта вимагає не тільки знання теоретичних положень і висновків, а й вміння використовувати їх при розв’язанні конкретних задач. Тому мета курсу — ознайомити студентів з основним арсеналом методів варіаційного числення, сформулювати їхній кругозір щодо застосування методів варіаційного числення при дослідженні прикладних задач.

Предметом курсу “Варіаційне числення” є основні методи та ідеї варіаційного числення, побудова математичного апарату для дослідження задач природознавства.

Завдання курсу — набути навичок побудови та розв’язання варіаційних задач. Зокрема ознайомити студентів з методами, які використовуються при розв’язанні варіаційних задач за допомогою обчислювальної техніки.

Форми занять з дисципліни: лекції, практичні заняття.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні *знати*:

- основні теоретичні принципи і термінологію варіаційного числення;
- основні методи, які використовуються для побудови та дослідження функціоналів;
- основні типи задач, де використовуються методи варіаційного числення;

уміти:

- будувати математичну модель процесу у вигляді варіаційної задачі;
- проводити дослідження варіаційних задач на існування екстремуму;
- робити висновки щодо отриманих результатів;
- самостійно опрацьовувати літературні джерела з предмета.

Курс “Варіаційне числення” є обов’язковою навчальною дисципліною. Матеріал дисципліни базується на знаннях курсів “Математичний аналіз”, “Аналітична геометрія та лінійна алгебра”, “Теорія ймовірностей та математична статистика”, “Диференціальні рівняння” і слугує підґрунтям для подальшого освоєння курсів “Чисельні

методи математичної фізики”, “Рівняння математичної фізики” “Математичні методи та моделі оптимального управління”, “Моделювання економічних систем”, “Системний аналіз та проектування систем обробки інформації”, “Методи оптимізації” та інших, а також для виконання курсових і дипломних робіт.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
дисципліни
“ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ”

№ пор.	Назва змістових модулів і тем
1 2 3	Змістовий модуль 1. Постановка варіаційної задачі та необхідна умова існування екстремуму функціонала Постановка найпростішої задачі варіаційного числення Необхідна умова екстремуму функціонала. Рівняння Ейлера Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення
4 5	Змістовий модуль 2. Основні типи варіаційних задач Варіаційні задачі з граничними точками, що рухаються Варіаційні задачі на умовний екстремум
6 7	Змістовий модуль 3. Методи дослідження варіаційних задач Достатні умови екстремуму функціонала в найпростішій задачі варіаційного числення Прямі методи варіаційного числення
Разом годин: 108	

ЗМІСТ
дисципліни
“ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ”

Змістовий модуль 1. Постановка варіаційної задачі та необхідна умова існування екстремуму функціонала

Тема 1. Постановка найпростішої задачі варіаційного числення

1. Поняття функціонала.
2. Функціональні простори.
3. Неперервність функціонала.
4. Умови близькості. Сильний та слабкий екстремум.
5. Постановка найпростішої задачі варіаційного числення.
6. Історія розвитку варіаційного числення.
7. Основні відомості про застосування методів варіаційного числення.

Література [1–12]

Тема 2. Необхідна умова екстремуму функціоналау. Рівняння Ейлера

1. Поняття варіації функціонала.
2. Вивід необхідної умови екстремуму функціонала.
3. Побудова рівняння Ейлера.
4. Віпадки інтегровності рівняння Ейлера.

Література [1–12]

Тема 3. Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення

1. Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку. Умова Ейлера — Пуасона.
2. Функціонали, що залежать від кількох функцій. Система рівнянь Ейлера.
3. Функціонали, що залежать від функції кількох незалежних змінних. Умова Ейлера — Остроградського.

Література [1–2]

Змістовий модуль 2. Основні типи варіаційних задач

Тема 4. Варіаційні задачі з граничними точками, що рухаються

1. Постановка задачі з рухомими граничними точками.
2. Необхідні умови екстремуму функціонала з рухомими граничними точками.
3. Умови трансверсальності.
4. Геометрична інтерпретація умов трансверсальності.
5. Варіаційні задачі з рухомими границями для функціоналів від двох функцій.

Література [1–12]

Тема 5. Варіаційні задачі на умовний екстремум

1. Задачі варіаційного числення з голоморфними та негломорфними зв'язками.
2. Ізопериметрична задача.
3. Поняття задачі Лагранжа. Метод Лагранжа.
4. Поле лагранжевих кривих.
5. Задача Майєра. Задача Больца.

Література: [1-12].

Змістовий модуль 3. Методи дослідження варіаційних задач

Тема 6. Достатні умови екстремуму функціонала в найпростішій задачі варіаційного числення

1. Поняття поля кривих. Поле екстремалей.
2. Достатня умова Якобі можливості включення екстремалей у центральне поле.
3. Функція Вейерштрасса.
4. Поняття варіації першого та вищих порядків. Умова Лежандра.

Література [1–10]

Тема 7. Прямі методи варіаційного числення

1. Поняття прямих методів варіаційного числення.
2. Кінцево-різницевий метод Ейлера.
3. Метод Рітца.

Література [1–13; 15; 16]

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке область визначення функції? Як визначається неперервність функції в точці?
2. Дати визначення точки екстремуму функції. Необхідна і достатня умова існування екстремуму в точці. Чи всяка критична точка буде точкою екстремуму?
3. Які типи звичайних диференціальних рівнянь ви знаєте? Основні ідеї розв'язання лінійних та однорідних рівнянь першого порядку та лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами другого порядку.
4. Дати визначення функціонального простору. Які основні функціональні простори ви знаєте?
5. Як ви розумієте відстань нульового, першого, n -го порядку між двома функціями? Як залежать ці поняття від виду функціонального простору?
6. Дати визначення неперервності функціонала в точці. Неперервність є смислом близькості n -го порядку.
7. Дати визначення варіації функціонала. Який зв'язок між варіацією та похідною?
8. Сутність найпростішої задачі варіаційного числення.
9. Сформулювати необхідну умову екстремуму функціонала. Записати різні форми рівняння Ейлера.
10. Що таке екстремаль функціонала? Допустима екстремаль? Як знайти допустимі екстремалі функціонала? Які ви знаєте випадки інтегровності рівняння Ейлера?
11. Наведіть приклади функціоналів, для яких рівняння Ейлера має аналітичний розв'язок.
12. Сформулюйте задачу про брахістохрону. Сформулюйте задачу про найменшу поверхню обертання.
13. Сформулювати варіаційну задачу для функціоналів, що залежать від кількох функцій.
14. Сформулювати необхідну умову існування екстремуму функціонала, що залежить від кількох функцій.
15. Які ви знаєте методи розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь другого порядку? Яким чином визначаються константи при знаходженні допустимих екстремалей?
16. Як трансформується необхідна умова існування екстремуму у випадку функціонала, що залежить від похідних вищих порядків.

17. Система рівнянь Ейлера.
18. Який вигляд має необхідна умова існування екстремуму функціонала, що залежить від кількох незалежних змінних? Рівняння Ейлера – Остроградського.
19. Наведіть приклади задач, в яких математична модель формулюється у вигляді варіаційної задачі.
20. Як у загальному вигляді формулюється задача Лагранжа? Які зв'язки називаються голоморфними? Які зв'язки називаються негломорфними?
21. Сформулюйте необхідну умову існування екстремалі в задачі Лагранжа.
22. Стосовно якої функції будується система рівнянь Ейлера?
23. Яке сімейство кривих утворює власне поле? Що таке S -дискримінантна крива? Яка крива називається обгинаючою сімейства кривих?
24. Сформулюйте умову Якобі у геометричній формі. Сформулюйте умову Якобі в аналітичній формі.
25. Сформулюйте умову Лежандра.
26. Достатня умова для слабкого екстремуму. Сформулюйте достатню умову для сильного екстремуму.
27. Яку екстремаль можна включити до поля екстремалей?
28. Який вигляд має функція Вейерштрасса? Сформулюйте умову досягання екстремуму функціонала з використанням функції Вейерштрасса.
29. Що таке прямі методи варіаційного числення? Коли вони застосовуються?
30. Сутність ідеї кінцево-різницевих методів.?
31. До якої системи рівнянь доходимо при використанні методу Ейлера?
32. В якому вигляді отримаємо наближені розв'язки при використанні методу Ейлера?
33. Яка основна ідея чисельного розв'язання варіаційних задач чисельними методами?
34. Що таке лінійно-незалежна система функцій? Які граничні умови називаються однорідними?
35. Яка система функцій називається повною у просторі функцій $f(x) \in C_1[a, b]$?
36. Сутність ідеї методу Рітца.

37. Як ви розумієте термін “задача з рухомими границями”? Наведіть приклади прикладних задач, які приводять до розглядання варіаційних задач з рухомими границями.
38. Що таке умови трансверсальності? Як формуються умови трансверсальності у випадку, коли границя сковзає по прямій $x = a$?
39. Як формуються варіаційні задачі з рухомими кінцями? Як виглядають умови трансверсальності у випадку коли один кінець рухається уздовж прямої $x = a$?
40. Як виглядатимуть умови трансверсальності, якщо один кінець шуканої екстремалі рухається по кривій $y = \phi(x)$, а другий — по кривій $y = \psi(x)$?
41. Сформулювати варіаційну задачу, до якої зводиться задача знаходження відстані між двома кривими.
42. Що таке кусково-гладка крива? Коли слід підозрювати існування ламаних екстремалей?
43. Яким умовам повинна відповідати екстремаль у точці?
44. Сформулюйте умови Вейерштрасса — Ердмана.
45. Скільки довільних констант містить розв’язок у випадку існування точки зламу? Як їх визначити?
46. Як формулюється варіаційна задача на умовний екстремум?
47. Які зв’язки називаються голоморфними, а які — негломорфними?
48. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму функціонала в задачі Лагранжа. Як будується лагранжіан?
49. Що таке геодезична крива на поверхні? Як формулюється варіаційна задача про знаходження геодезичної кривої? Загальна властивість геодезичних ліній.
50. Як формулюється ізопериметрична задача? Чому вона так називається?
51. Як використовується метод Лагранжа при розв’язанні ізопериметричної задачі?
52. Як будується лагранжіан при розв’язанні ізопериметричної задачі?
53. Дайте загальне формулювання задачі Лагранжа?
54. Як ставиться задача Больца?
55. У чому полягає задача Майера?
56. У чому основна ідея методу множників Лагранжа?
57. Як можна звести задачу Больца до задачі Лагранжа?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Ахиезер Н. И. Вариационное исчисление. — Х.: Изд-во Харьк. ун-та. — 1981. — 168 с.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. — М.: Гостехиздат, 1955.
3. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. — М.: ИЛ, 1950.
4. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление. — М.: Наука, 1973. — 192 с.
5. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 296 с.
6. Букреев Б. Я. Вступ до варіаційного числення. — Харків: 1931. — 139 с.
7. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969 — 424 с.
8. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. — К., 2003. — 380 с.
9. Савелов Н. И. Вариационное исчисление. — Новосибирск: НИИТ, 1955.
10. Егоров Д. Ф. Основания вариационного исчисления. — М.: ОНТИ, 1923. — 74 с.
11. Смирнов В. И., Крылов В. П., Канторович Л. В. Вариационное исчисление. — Л.: КУБУЧ, 1933. — 201 с.
12. Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — 2-е изд. — М., 2001. — 344 с.

Додаткова

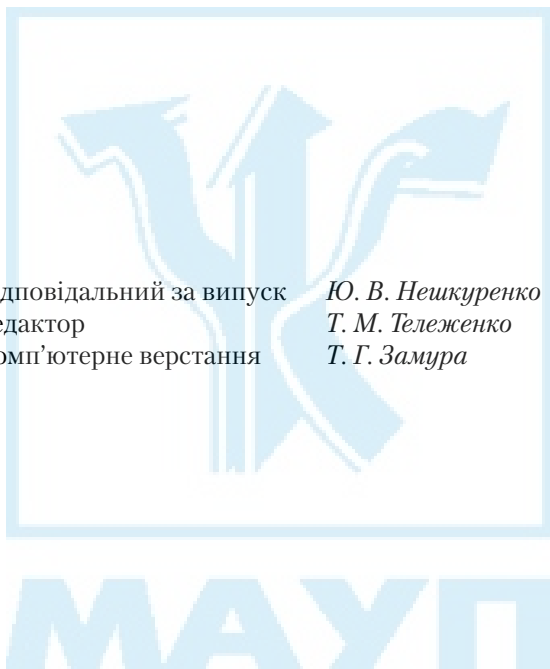
13. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966. — 176 с.
14. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974. — 488 с.
15. Буслаев В. С. Вариационное исчисление. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. — 288 с.
16. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1941. — 308 с.
17. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

18. *Коша А. В.* Вариационное исчисление. — М.: Высш. шк., 1981. — 280 с.
19. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.
20. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1963. — 228 с.



ЗМІСТ

Пояснювальна записка.....	3
Тематичний план дисципліни “Варіаційне числення”	4
Зміст дисципліни “Варіаційне числення”	5
Питання для самоконтролю.....	7
Список літератури.....	10



Відповідальний за випуск *Ю. В. Нешкуренко*
Редактор *Т. М. Тележенко*
Комп'ютерне верстання *Т. Г. Замура*

Зам. № ВКЦ-2664

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП