МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА
дисципліни

“ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ”

(для бакалаврів)

Київ 2005

Підготовлено кандидатом фізико-математичних наук, професором
А. В. Кузьміним

Затверджено на засіданні кафедри математики МАУП
(протокол № 6 від 24.03.05)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Кузьмін А. В. Навчальна програма дисципліни "Диференціальні рівняння в частинних похідних" (для бакалаврів). — К.: МАУП, 2005. — 16 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, навчально-тема-тичний план, програмний матеріал до вивчення дисципліни "Диференці-альні рівняння в частинних похідних", теми практичних занять, питання для самоконтролю, , а також список рекомендованої літератури.

© Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2005

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Питання курсу “Диференціальні рівняння в частинних похідних” пов’язані з дослідженням різноманітних фізичних явищ: розповсюдження тепла та дифузії речовини, коливання струни, стрижня та мембрани, електромагнітних і звукових коливань, рухи рідини й газу та ін.

Мета дисципліни — поглиблене вивчення теорії рівнянь із частинними похідними й інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Диференціальні рівняння класифіковано і для кожного з їх типів сформульовано основні крайові задачі. Розглянуто методи розв’язання крайових задач і задач Коші для різних типів рівнянь. Зокрема, розглянуто зв’язок крайових задач у частинних похідних з інтегральними рівняннями Фредгольма.

Навчальний курс грунтується на знаннях, здобутих під час вивчення фізики, математичного аналізу, диференціальних рівнянь.

Завдання курсу — ознайомити студентів з основними типами диференціальних рівнянь із частинними похідними, вивчити методи постановки та розв’язання крайових задач і задач Коші, дослідити питання коректності поставлених задач.

МАУП

НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
вивчення дисципліни
“ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ”

№ пор.	Назва теми
1	Предмет і метод дисципліни “Диференціальні рівняння в частинних похідних”. Основні поняття теорії рівнянь із частинними похідними
2	Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду та методи дослідження їх розв’язків
3	Задача Штурма — Ліувілля та її використання для зображення функцій у вигляді рядів
4	Математичні моделі фізичних процесів, що приводять до крайових задач для рівнянь у частинних похідних
5	Класифікація рівнянь у частинних похідних, коректність постановок, узагальнені та класичні розв’язки
6	Поняття фундаментальних розв’язків рівняння в частинних похідних, функція Гріна й інтегральне подання розв’язків
7	Метод відокремлення змінних для розв’язання крайових задач математичної фізики
8	Гіперболічні рівняння. Постановка задачі Коші та мішаних задач для хвильового рівняння
9	Параболічні рівняння. Постановка задачі Коші та крайових задач для рівняння теплопровідності
10	Еліптичні рівняння. Постановка основних крайових задач для рівняння Пуассона; гармонічні функції

ПРОГРАМНИЙ МАТЕРІАЛ
до вивчення дисципліни
“ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ”

Тема 1. Предмет і метод дисципліни “Диференціальні рівняння в частинних похідних”. Основні поняття теорії рівнянь із частинними похідними

Поняття про математичний експеримент як метод дослідження навколишнього середовища. Природа виникнення рівнянь у частинних похідних. Основна проблематика предмета. Математичний апарат дослідження крайових задач для рівнянь у частинних похідних.

Література [3; 4; 6]

Тема 2. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду та методи дослідження їх розв’язків

Метод послідовних наближень для знаходження розв’язків інтегральних рівнянь у частинних похідних з неперервними та полярними ядрами. Поняття повторних ядер і резольтенти. Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь другого роду з неперервним і полярним ядром. Інтегральні рівняння Фредгольма з ермітовим ядром. Теорема про існування характеристичних чисел в ермітового неперервного та полярного ядра. Теорема Гільберта — Шмідта і її наслідки про подання ядра інтегрального рівняння. Формула Шмідта для знаходження розв’язків інтегральних рівнянь з ермітовим ядром. Додатно визначені ядра та їх властивості.

Література [3; 5; 9]

Тема 3. Задача Штурма — Ліувілля та її використання для зображення функцій у вигляді рядів

Постановка задачі Штурма — Ліувілля. Функція Гріна оператора Штурма — Ліувілля та її властивості. Зведення задачі Штурма — Ліувілля до інтегрального рівняння Фредгольма з ермітовим ядром. Теорема Стеклова про розвинення функцій в ряд Фур’є.

Література [3; 5; 6]

Тема 4. Математичні моделі фізичних процесів, що приводять до крайових задач для рівнянь у частинних похідних

Математичні моделі розповсюдження тепла у просторі та дифузії речовини. Математичні моделі руху ідеальної рідини та розповсюдження акустичних коливань. Моделі коливання струни, стрижня, мембрани. Моделі електростатики та магнітостатики.

Література [3; 4; 7; 10]

Тема 5. Класифікація рівнянь у частинних похідних, коректність постановок, узагальнені та класичні розв'язки

Класифікація рівнянь у частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними. Класифікація рівнянь у частинних похідних з більше ніж двома незалежними змінними. Класифікація систем рівнянь у частинних похідних.

Поняття коректності постановки задач математичної фізики. Приклад Адамара. Узагальнення поняття розв'язку крайової задачі в частинних похідних Узагальнені та класичні розв'язки.

Література: [3; 4; 9–11]

Тема 6. Поняття фундаментальних розв'язків рівняння в частинних похідних, функція Гріна й інтегральне подання розв'язків

Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів у частинних похідних.

Використання фундаментальних розв'язків для побудови розв'язків задачі Коші для рівняння теплопровідності та хвильового рівняння.

Поняття функції Гріна для основних крайових задач. Інтегральне подання розв'язків крайових задач за допомогою функції Гріна. Задача Діріхле рівняння Пуассона для кулі. *Література* [3–6; 9]

Тема 7. Метод відокремлення змінних для розв'язання крайових задач математичної фізики

Загальна схема методу відокремлення змінних (методу Фур'є). Застосування методу до розв'язання мішаних задач для хвильового рівняння. Поняття про функції Бесселя та їх найпростіші властивості. Дослідження збіжності ряду.

Література [3; 4; 9; 10]

Тема 8. Гіперболічні рівняння. Постановка задачі Коші та мішаних задач для хвильового рівняння

Постановка задачі Коші для хвильового рівняння, її фізичний зміст. Розв'язність задачі про вільні та вимушені коливання нескінченної струни. Формула Д'Аламбера, її фізична інтерпретація. Принцип Гюйгенса та дифузія хвиль. Коректність постановки задачі про вільні та вимушені коливання напівнескінченної струни.

Постановка основних крайових (мішаних) задач для хвильового рівняння, їх фізичний зміст. Інтеграл енергії. Єдиність розв'язку основних крайових задач. Неперервна залежність розв'язку від правої частини рівняння та початкових умов.

Література [3; 4; 7; 9; 10]

Тема 9. Параболічні рівняння. Постановка задачі Коші та крайових задач для рівняння теплопровідності

Постановка задачі Коші для рівняння теплопровідності, її фізичний зміст. Фундаментальний розв'язок задачі Коші. Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності. Неперервна залежність від початкової умови та правої частини. Постановка основних крайових задач для рівняння теплопровідності, їх фізичний зміст. Єдиність розв'язку основних крайових задач. Принцип максимуму для розв'язку однорідного рівняння теплопровідності та його застосування до перевірки коректності постановки основних крайових задач. Розв'язання основних крайових задач для рівняння теплопровідності методом Фур'є.

Література [3; 4; 7; 9; 10]

Тема 10. Еліптичні рівняння. Постановка основних крайових задач для рівняння Пуассона; гармонічні функції

Постановка основних крайових задач для рівняння Пуассона, їх фізичний зміст. Фундаментальний розв'язок оператора Лапласа.

Формула Гріна для оператора Лапласа. Інтегральне зображення двічі неперервно диференційовних функцій. Гармонічні функції, інтегральне зображення гармонічних функцій. Теореми про середнє арифметичне та принцип максимуму для гармонічних функцій.

Єдиність розв'язку основних крайових задач для рівняння Пуассона. Функція Гріна оператора Лапласа, її властивості та методи її побудови. Приклади функцій Гріна для найпростіших областей (півплощини, півпростору, круга, кулі).

Інтегральні зображення розв'язків основних крайових задач. Розв'язання задачі Діріхле для круга та кулі. Формула Пуассона. Властивості гармонійних функцій, що випливають з формули Пуассона; теорема Ліувілля, теорема Гарнака.

Література [3; 4; 7; 9; 10]

ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

1. Метод послідовних наближень для інтегрального рівняння Фредгольма.
2. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами, знаходження влас-них функцій і характеристичних чисел.
3. Застосування теорем Фредгольма для дослідження розв'язків інтегральних рівнянь.
4. Застосування формули Шмідта для подання розв'язків інтегральних рівнянь з ермітовим ядром.
5. Знаходження розв'язків задачі Штурма — Ліувілля.
6. Побудова функції Гріна.
7. Математичний опис задач про малі поперечні коливання струни та поздовжні коливання стрижня.
8. Математичний опис задач про поширення тепла в однорідному твердому тілі.
9. Класифікація та зведення до канонічного вигляду лінійних рівнянь другого порядку з n незалежними змінними.
10. Класифікація та зведення до канонічного вигляду лінійних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними.
11. Розв'язання задачі Коші для хвильового рівняння. Розв'язання задачі Коші для рівняння теплопровідності.
12. Розв'язання основних мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу в декартових координатах методом відокремлення змінних (задач про вільні коливання стрижня).
13. Розв'язання основних мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу в декартових координатах методом відокремлення змінних (задач про вимушені коливання стрижня).
14. Розв'язання основних мішаних задач для рівнянь параболічного типу в декартових координатах методом відокремлення змінних.
15. Оператор Лапласа в криволінійних ортогональних координатах.
16. Застосування методу відокремлення змінних до розв'язання основних мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу в полярних, ци-

ліндричних і сферичних координатах. Використання функ-цій Бесселя.

17. Розв'язання методом відокремлення змінних задач про коливання струн, стрижнів, мембран у разі резонансу.
18. Застосування методу відокремлення змінних до розв'язання основних мішаних задач для рівнянь параболічного типу в полярних координатах.
19. Застосування методу відокремлення змінних до розв'язання основних мішаних задач для рівнянь параболічного типу в циліндричних і сферичних координатах. Використання функцій Бесселя.
20. Застосування методу відокремлення змінних до розв'язання основних крайових задач для рівнянь еліптичного типу в полярних координатах.
21. Застосування методу відокремлення змінних до розв'язання основних крайових задач для рівнянь еліптичного типу в циліндричних координатах.
22. Розв'язання крайових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона методом функцій Гріна.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

До теми 1

1. Що таке диференціальне рівняння з частинними похідними?
2. Що таке порядок диференціального рівняння з частинними похідними?
3. Яке диференціальне рівняння з частинними похідними називається лінійним?
4. Навести приклад лінійного диференціального рівняння другого порядку.
5. Що таке класичний розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними?
6. Які додаткові умови задають для диференціальних рівнянь із частинними похідними?

До теми 2

1. Записати схему методу послідовних наближень для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.
2. Сформулювати умови збіжності методу послідовних наближень інтегрального рівняння з неперервним і полярним ядром.
3. Що таке повторні ядра та резольвента ядра? Сформулювати умови збіжності резольвенти.
4. Сформулювати першу теорему Фредгольма з виродженим ядром.
5. Сформулювати другу теорему Фредгольма з виродженим ядром.
6. Сформулювати третю теорему Фредгольма з виродженим ядром.
7. Сформулювати першу теорему Фредгольма з неперервним ядром.
8. Сформулювати другу теорему Фредгольма з неперервним ядром.
9. Сформулювати третю теорему Фредгольма з неперервним ядром.
10. Сформулювати четверту теорему Фредгольма.
11. Який оператор називається цілком неперервним?
12. Сформулювати критерій компактних множин функцій у класі неперервних функцій.
13. Сформулювати теорему про існування характеристичних чисел і власних функцій ермітових операторів.
14. Сформулювати теорему Гільберта — Шмідта.
15. Сформулювати теорему про розвинення ермітового ядра в білінійний ряд за системою власних функцій.
16. Записати формулу Шмідта для подання розв'язків неоднорідного інтегрального рівняння з ермітовим ядром.
17. Записати властивості інтегральних операторів з додатно визначеними ядрами.

До теми 3

1. Сформулювати задачу Штурма — Ліувілля.
2. Що таке область визначення оператора задачі Штурма — Ліувілля?
3. Сформулювати основні властивості оператора задачі Штурма — Ліувілля.
4. Сформулювати основні властивості власних функцій і власних значень задачі Штурма — Ліувілля.
5. Що таке функція Гріна задачі Штурма — Ліувілля?
6. Які властивості має функція Гріна?
7. Сформулювати теорему про інтегральне подання розв'язку крайової задачі.

8. Сформулювати теорему про еквівалентність задачі Штурма — Ліувілля та задачі на власні значення для однорідного інтегрального рівняння.
9. Сформулювати теорему Стеклова про розвинення розв'язку в ряд Фур'є за власними функціями задачі Штурма — Ліувілля.
10. Сформулювати теорему про повноту власних функцій задачі Штурма — Ліувілля.

До теми 4

1. Записати закон збереження теплової енергії в диференціальному й інтегральному виглядах.
2. Записати диференціальне рівняння теплопровідності в загальному вигляді. Записати можливі спрощення рівняння.
3. Які крайові та початкові умови задають для рівняння теплопровідності? Який фізичний зміст вони мають?
4. Записати закон збереження речовини, що дифундує в розчині чи розплаві, в інтегральній і диференціальній формах.
5. Записати рівняння дифузії речовини в загальному та спрощеному вигляді.
6. Записати основні типи крайових і початкових умов для рівняння дифузії, пояснити їх фізичний зміст.
7. Записати закон збереження маси для ідеальної рідини в диференціальній та інтегральній формах.
8. Записати закон збереження імпульсу для ідеальної рідини в диференціальній та інтегральній формах.
9. Записати закон збереження повної енергії для ідеальної рідини в диференціальній та інтегральній формах.
10. У чому полягає метод лінеарізації стосовно моделі руху ідеальної рідини?
11. Записати систему рівнянь акустичних коливань.
12. Записати основні типи крайових умов для моделі руху ідеальної рідини.
13. Записати рівняння поперечних коливань струни. Пояснити фізичний зміст відповідних функцій і коефіцієнтів.
14. Записати основні типи крайових умов для рівняння коливання струни. Пояснити їх фізичний зміст.
15. Записати рівняння поперечних коливань стрижня. Пояснити фізичний зміст відповідних функцій і коефіцієнтів.

16. Записати крайові умови рівняння коливання стрижня. Пояснити фізичний зміст.
17. Записати перший закон теорії поля в диференціальній та інтегральній формах.
18. Записати основні крайові умови для задачі електростатики.
19. Записати другий закон теорії поля. Пояснити фізичний зміст відповідних величин.
20. Записати третій закон теорії поля. Пояснити фізичний зміст відповідних величин.
21. Записати диференціальні рівняння магнітостатики. Надати фізичний зміст відповідних величин.
22. Записати основні типи крайових умов для рівнянь магнітостатики.

До теми 5

1. Як класифікують диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку з n незалежними змінними в точці й області?
2. Означити основні типи рівнянь другого порядку з n незалежними змінними.
3. Записати канонічну форму рівняння еліптичного типу.
4. Записати канонічну форму рівняння гіперболічного типу.
5. Записати канонічну форму рівняння параболічного типу.
6. Як класифікують диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними в точці та в області?
7. Записати канонічну форму рівнянь еліптичного, гіперболічного та параболічного типів із двома незалежними змінними.
8. Яке рівняння називається характеристичним?
9. Навести приклади характеристик для різних типів рівнянь.
10. Яка задача математичної фізики називається коректно поставленою?
11. Записати приклад Адамара некоректно поставленої задачі.
12. Що називається класичним розв'язком крайової задачі.
13. Які розв'язки називаються узагальненими.

До теми 6

1. Що таке фундаментальний розв'язок оператора Лапласа? Який вигляд він має?

2. Що таке фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності? Записати його вигляд.
3. Що таке фундаментальний розв'язок хвильового оператора? Записати його вигляд.
4. Записати інтегральне зображення розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності.
5. Записати інтегральне зображення розв'язку задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння (формулу Даламбера).
6. Записати інтегральне зображення розв'язку задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння (формулу Пуассона).
7. Дати визначення функції Гріна для оператора Лапласа.
8. Записати формулу інтегрального зображення розв'язку основних крайових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона.
9. Дати визначення функції Гріна для основних крайових задач рівняння теплопровідності.
10. Записати інтегрального зображення розв'язку основних крайових задач рівняння теплопровідності.
11. Як побудувати функції Гріна задачі Діріхле для кулі?

До теми 7

1. Навести схему застосування методу відокремлення змінних для розв'язання задачі про вільні коливання струни.
2. Навести схему застосування методу відокремлення змінних для розв'язання задачі про вимушені коливання струни.
3. Як звести задачу для хвильового рівняння з неоднорідними крайовими умовами до задачі з однорідними крайовими умовами?
4. Сформулювати лему про повноту системи ортонормованих функцій від двох змінних.
5. Записати рівняння Бесселя.
6. Що таке функція Бесселя ν-го порядку?
7. Записати норми для функцій Бесселя.

До теми 8

1. У чому полягає фізичний зміст задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння?
2. Записати формулу Д'Аламбера розв'язання задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння.
3. Що таке принцип Гюйгенса у процесах коливань?

4. Що таке дифузія хвиль?
5. Сформулювати основні мішані задачі для хвильового рівняння.
6. Пояснити фізичний зміст мішаних задач для хвильового рівняння.
7. Записати умови узгодження початкових і крайових умов.
8. Записати форму інтеграла енергії.
9. Сформулювати теореми про єдиність і стійкість розв'язку мішаних задач для хвильового рівняння.

До теми 9

1. Записати постановку задачі Коші для рівняння теплопровідності.
2. Які основні властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності?
3. Пояснити фізичний зміст фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності.
4. Сформулювати основні мішані задачі для рівняння теплопровідності.
5. Пояснити фізичний зміст мішаних задач для рівняння теплопровідності.
6. Записати умови узгодження початкових і крайових умов.
7. Сформулювати принцип максимуму для розв'язку однорідного рівняння теплопровідності.
8. Записати основні наслідки принципу максимуму для розв'язку однорідного рівняння теплопровідності.
9. Навести схему застосування методу відокремлення змінних до розв'язання мішаних задач для рівняння теплопровідності.

До теми 10

1. Сформулювати внутрішні крайові задачі для рівнянь еліптичного типу.
2. Як ставлять зовнішні крайові задачі для рівнянь еліптичного типу?
3. Що таке умови регулярності в зовнішніх крайових задачах?
4. Пояснити фізичний зміст крайових задач для рівнянь еліптичного типу.
5. Означити гармонічну функцію.
6. Записати сингулярний розв'язок рівняння Лапласа.
7. Записати формулу інтегрального зображення двічі неперервно диференційовних функцій.
8. Записати формулу інтегрального зображення гармонічної функ-ції.
9. Сформулювати найпростіші властивості гармонічних функцій.

10. Сформулювати теорему про середнє арифметичне для гармонічної функції.
11. Сформулювати принцип максимуму для гармонічної функції.
12. Сформулювати основні наслідки принципу максимуму для гармонічної функції.
13. Сформулювати теореми про єдиність розв'язку основних крайових задач для рівняння Пуассона.
14. Означити функції Гріна оператора Лапласа.
15. Записати формули інтегральних зображень розв'язків основних крайових задач для рівняння Пуассона.
16. Які властивості має функція Гріна оператора Лапласа?
17. Які є методи побудови функції Гріна?
18. Записати формулу Пуассона для кулі.
19. Сформулювати теорему Ліувілля для гармонічних функцій.
20. Сформулювати теорему Гарнака для гармонічних функцій.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вірченко Н. О.* Основні методи розв'язання задач математичної фізики. — К.: Вид-во КПІ, 1997. — 370 с.
2. *Владимиров В. С.* Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1974. — 272 с.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.
4. *Гончаренко В. М.* Основи теорії рівнянь з частинними похідними. — К., 1996.
5. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высш. шк., 1977. — 432 с.
6. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. — К.: Либідь, 2002. — 336 с.
7. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. — М.: Высш. шк., 1964. — 560 с.
8. *Сборник* задач по математической физике / В. М. Будак и др. — М.: Наука, 1972. — 688 с.
9. *Смирнов В. И.* Курс Высшей математики. — М.: Наука, 1981. — Т. 4; Ч. 2. — 552 с.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 724 с.
11. *Уравнения* в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков и др. — М.: Высш. шк., 1970. — 712 с.

ЗМІСТ

Пояснювальна записка 3
Навчально-тематичний план вивчення дисципліни
“Диференціальні рівняння в частинних похідних” 4
Програмний матеріал до вивчення дисципліни
“Диференціальні рівняння в частинних похідних” 5
Теми практичних занять.....8
Питання для самоконтролю 9
Список рекомендованої літератури.....15

Відповідальний за випуск *Н. Г. Потапенко*
Редактор *С. Г. Атдаєва*
Комп’ютерне верстання *Т. Г. Замура*

Зам. № ВКЦ-2279

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП