

МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА
дисципліни

***“ДОДАТКОВІ ГЛАВИ АНАЛІЗУ.
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ
І ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ”***

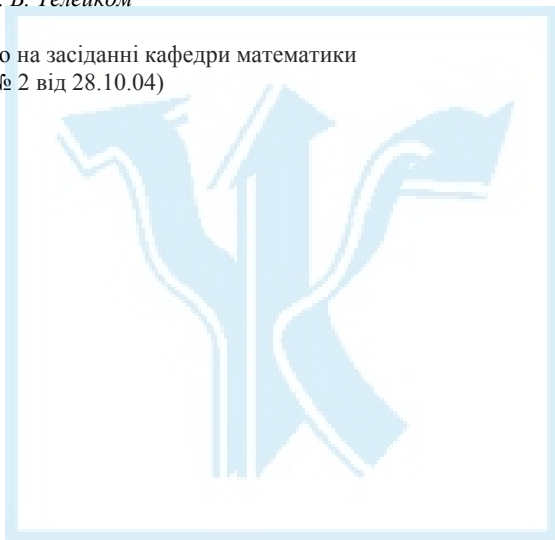
(для спеціалістів)

МАУП

Київ 2005

Підготовлено кандидатом фізико-математичних наук,
доцентом *А. Б. Телейком*

Затверджено на засіданні кафедри математики
(протокол № 2 від 28.10.04)



Телейко А. Б. Навчальна програма дисципліни “Додаткові глави аналізу. Основи теорії функцій і функціонального аналізу” (для спеціалістів). — К.: МАУП, 2005. — 18 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, навчально-тематичний план, програмний матеріал до вивчення дисципліни “Додаткові глави аналізу. Основи теорії функцій і функціонального аналізу”, конт-рольні питання, завдання для контрольних робіт, а також список рекомендованої літератури.

© Міжрегіональна Академія
управління персоналом (МАУП),
2005

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета вивчення курсу “Додаткові глави аналізу. Основи теорії функцій та функціонального аналізу” — ознайомитись з основними напрямками узагальнень і розвитку об’єктів і методів класичних математичних дисциплін, насамперед теорії диференціювання та інтегрування, а також прикладного аналізу.

Пропонований курс складається з кількох взаємопов’язаних частин.

Перша з них вивчає елементи теорії функцій комплексної змінної, властивості цих функцій, які узагальнюють поняття функції дійсної змінної. Зокрема, у межах цієї теорії розглядаються методи порівняно легкого інтегрування функцій дійсної змінної, які засобами звичайного математичного аналізу інтегрувати важко.

Друга частина розглядає теорію метричних просторів як узагальнення теорії n -вимірною дійсного простору, що є складовою математичного аналізу, один з найкласичніших ітераційних методів, принцип стискаючих відображень, а також області його застосування, зокрема теорему Пеано про існування розв’язку звичайного диференціального рівняння.

Третя частина формується класичним ядром функціонального аналізу, а саме теорією нескінченно вимірних лінійних просторів, лінійних функціоналів та операторів. Серед прикладних результатів цієї частини виокремлюється насамперед теорема Крейна — Мільмана, що є фундаментом лінійного програмування.

Четверта частина присвячена теорії міри та інтегралу Лебега, області застосування яких є формалізація основних понять теорії ймовірності.

П’ята частина курсу вивчає лінійні інтегральні рівняння, зокрема приклади застосування інтегральних рівнянь для розв’язування задач звичайних диференційних рівнянь і диференційних рівнянь у частинних похідних.

Пропонований курс базується на курсах основ дискретної математики, математичного аналізу, лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Крім того, для розуміння низки застосувань студенти повинні ґрунтовно володіти матеріалом курсів диференційних рівнянь, теорії ймовірностей, ймовірнісних процесів та математичної статистики, чисельних методів в інформатиці, диференційних рівнянь у частинних похідних, математичних методів дослідження операцій.

Цей курс розвиває низку математичних дисциплін бакалаврату і є завершальним у математичній підготовці спеціаліста.

Завдання курсу полягає в ознайомленні майбутніх спеціалістів з потужними математичними методами аналізу широкого класу прикладних задач.

НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
вивчення дисципліни
“ДОДАТКОВІ ГЛАВИ АНАЛІЗУ.
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ
І ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ”

№ пор.	Назва теми
1	Аналітичні функції
2	Метричні простори
3	Нескінченновимірні лінійні простори
4	Теорія міри та інтеграл Лебега
5	Лінійні інтегральні рівняння

ПРОГРАМНИЙ МАТЕРІАЛ
до вивчення дисципліни
“ДОДАТКОВІ ГЛАВИ АНАЛІЗУ.
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ
І ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ”

Тема 1. Аналітичні функції

Комплексні числа. Функції комплексної змінної. Поняття моногенності й аналітичності. Умови Коші — Рімана. Геометричний зміст модуля і аргументу похідної. Конформні відображення. Елементарні аналітичні функції та їх властивості.

Багатозначні функції. Однозначні гілки багатозначної функції. Приріст багатозначної функції. Приріст аргументу. Елементарні багатозначні функції та їх властивості.

Означений інтеграл. Інтегральні теореми Коші. Інтегральна формула Коші. Первісна. Теореми Морери. Теорема Гурса. Гармонійні функції.

Функціональні ряди. Теорема Вейерштраса. Степеневі ряди. Узгаальнені степеневі ряди.

Нулі аналітичних функцій. Ізольовані особливі точки однозначного характеру. Усувна особлива точка. Поліус. Істотно особлива точка. Принцип максимуму модуля.

Лишки. Основна теорема теорії лишків. Обчислення означених інтегралів за допомогою лишків.

Література [2; 6–8; 10; 13; 14; 18]

Тема 2. Метричні простори

Поняття метрики. Поняття метричного простору. Неперервні відображення метричних просторів. Відношення ізометричності. Поняття псевдометрики.

Граничні точки. Операція замикання. Збіжність. Щільні підмножини. Сепарабельність. Відкриті та замкнені множини.

Повнота метричного простору. Теорема про вкладені кулі. Теорема Бера про категорії. Канторове поповнення метричного простору.

Принцип Банаха стискаючих відображень. Застосування принципу стискаючих відображень до доведення теорем існування та єдиності для диференціальних рівнянь. Застосування принципу стискаючих відображень до операторних рівнянь.

Цілоком обмеженість. Компактність у метричному просторі. Передкомпактність. Теорема Арцела. Теорема Пеано. Рівномірна неперервність. Неперервні відображення метричних компактів.

Література [1; 5; 12; 20]

Тема 3. Нескінченно вимірні лінійні простори

Лінійні простори. Приклади нескінченно вимірних лінійних просторів. Підпростори. Фактор-простори. Лінійні функціонали. Геометричний зміст лінійного функціонала.

Опуклі множини. Опуклі тіла. Однорідно-опуклі функціонали. Функціонал Мінковського. Теорема Хана — Банаха. Теорема Крейна — Мільмана.

Нормовані простори. Підпростори нормованого простору. Фактор-простори нормованого простору. Банахові простори.

Евклідові простори. Існування ортогональних базисів. Процедура ортогоналізації. Нерівність Бесселя. Замкнені ортогональні системи. Теорема Ріса — Фішера. Гільбертові простори. Теорема про ізоморфізм для гільбертових просторів. Ортогональне доповнення. Пряма сума.

Лінійні функціонали на нормованих просторах. Теорема Хана — Банаха в нормованому просторі. Спряжений простір. Сильна збіжність лінійних функціоналів. Слабка збіжність лінійних функціоналів.

Лінійні оператори. Неперервність. Обмеженість. Операції над операторами. Обернений оператор. Оборотноість. Спряжені оператори. Спряжені оператори в евклідовому просторі. Самоспряженість. Поняття спектру оператора. Компактні оператори та їх властивості.

Література [1; 3–5; 11; 12; 16; 20]

Тема 4. Теорія міри та інтеграл Лебега

Кільце множин. Напівкільце множин. Кільце, породжене напівкільцем. σ -алгебри множин.

Міра елементарної множини. Лебегова міра плоскої множини. Загальне поняття міри. Продовження міри з півкільця на кільце. Адитивність та σ -адитивність. Лебегове продовження міри. Розширення поняття вимірності у випадку σ -скінченності.

Вимірні функції. Основні властивості вимірних функцій. Операції над вимірними функціями. Еквівалентність вимірних функцій. Збіжність майже скрізь. Теорема Єгорова. Збіжність за мірою.

Прості функції. Інтеграл Лебега для простих функцій. Загальне поняття інтеграла Лебега на множині скінченної міри. σ -адитивність та абсолютна неперервність інтеграла Лебега. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега. Інтеграл Лебега за множиною нескінченної міри. Порівняння інтегралів Лебега і Рімана.

Застосування теорії міри та інтеграла Лебега до формалізації понять теорії ймовірності.

Література [5; 17; 19]

Тема 5. Лінійні інтегральні рівняння

Лінійні інтегральні рівняння. Типи інтегральних рівнянь. Приклади задач, що зводяться до інтегральних рівнянь.

Інтегральні рівняння Фредгольма. Інтегральний оператор Фредгольма. Рівняння із симетричним ядром. Теореми Фредгольма. Рівняння Вольтерра. Інтегральні рівняння першого роду.

Література [5; 19; 15]

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Порівняльна характеристика понять моногенності та аналітичності.
2. Чи використовується у виведенні умов Коші — Рімана неперервність частинних похідних дійсної та уявної частин функції?
3. Геометричний зміст аргументу похідної аналітичної функції.
4. Властивості конформних відображень.
5. Чи зберігає конформне відображення замкненість області?
6. Чи можна за допомогою цілої лінійної функції відобразити півкруг на круг?
7. Довести, що степенева функція є скінченнозначною тоді й тільки тоді, коли її показник раціональний.
8. Чи завжди похідна аналітичної функції є аналітичною?
9. Знайдіть цілу функцію з дійсною частиною $e^x \cos y$.
10. Виведіть інтегральну формулу Коші.
11. Наведіть приклад узагальненого степеневого ряду, множиною збіжності якого є одиничне коло.
12. Чи можна диференціювати почленно ряд Лорана в кільці його збіжності.
13. Наведіть приклади всіх типів ізольованих особливостей.
14. Сформулюйте принцип максимуму модуля.
15. Чи справедливий принцип аргументу, якщо на краю області функція має один нуль?
16. Сформулюйте основну теорему теорії лишків.
17. Чи може сума степеневого ряду мати особливі точки поза кругом збіжності?
18. Наведіть нетривіальні приклади ізометричних просторів.
19. Наведіть природні приклади псевдометрик.
20. Властивості операції замикання.
21. Наведіть приклад несепарабельного метричного простору.
22. Наведіть приклади неповних метричних просторів.
23. Наведіть приклади просторів першої та другої категорій.
24. Опишіть процедуру поповнення метричного простору.
25. Обґрунтуйте необхідність усіх умов принципу стискаючих відображень.
26. Наведіть приклади застосування принципу стискаючих відображень.
27. Наведіть приклади цілком обмежених множин.
28. Наведіть приклад передкомпактної некомпактної множини.
29. Доведіть еквівалентність означень компактності в термінах послідовностей та покриттів.
30. Наведіть приклад замкненої некомпактної множини.

31. Наведіть приклад неперервного нерівномірно неперервного відображення.
32. Наведіть приклад таких двох ізометричних компактів, що їх добутки на відрізок $[0,1]$ не ізометричні.
33. Наведіть приклади нескінченно вимірних лінійних просторів.
34. Геометричний зміст лінійного функціоналу.
35. Наведіть означення однорідно-опуклого функціоналу.
36. Обґрунтуйте необхідність всіх умов теореми Хана — Банаха.
37. Наведіть означення норми.
38. Наведіть приклад метричного простору, що не допускає узгодженої норми.
39. Наведіть приклади банахових просторів.
40. Наведіть означення евклідового простору.
41. Наведіть приклад нормованого простору, що не допускає узгодженого скалярного добутку.
42. опишіть процедуру ортогоналізації.
43. Значення теореми Ріса — Фішера.
44. Наведіть приклади гільбертових просторів.
45. Порівняльна характеристика понять сильної та слабкої збіжностей лінійних функціоналів.
46. Конструкція спряженого простору.
47. Важливість конструкції спряженого простору.
48. Наведіть означення лінійного оператора.
49. Порівняйте поняття обмеженості та неперервності лінійного оператора.
50. Наведіть приклади необоротних операторів.
51. Наведіть означення спряженості операторів.
52. Наведіть приклади нетривіальних самоспряжених операторів.
53. Властивості компактного оператора.
54. опишіть конструкцію σ -алгебри множин.
55. Як позначають лебегову міру плоских множин?
56. Наведіть означення лебегової міри в загальному випадку.
57. Наведіть приклад аддитивної не σ -адитивної міри.
58. опишіть процедуру лебегового продовження міри.
59. Наведіть приклади вимірних функцій.
60. Важливість поняття вимірної функції.
61. Наведіть означення еквівалентності вимірних функцій.
62. Наведіть нетривіальний приклад збіжної майже скрізь функції.

63. Поняття інтеграла Лебега на множинах скінченної та нескінченної міри.
64. Порівняльна характеристика інтегралів Лебега та Рімана.
65. Властивості інтеграла Лебега.
66. Наведіть означення лінійного інтегрального рівняння.
67. Класифікація лінійних інтегральних рівнянь.
68. Теорема Фредгольма.
69. Наведіть приклади задач, що зводяться до інтегральних рівнянь.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Варіант контрольної роботи студенти вибирають за останньою цифрою номера залікової книжки (див. таблицю).

Остання цифра номера залікової книжки	Номер варіанта
1, 6	1
2, 7	2
3, 8	3
4, 9	4
5, 0	5

Варіант 1

1. Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа:

$$\frac{(1+i)^5}{(i\sqrt{3}-1)^3}$$

2. Знайти образ множини $\{z : \operatorname{Im} z \leq -1\}$ при відображенні $w = \frac{z+1}{z-2}$.

3. За основною формулою теорії лишків обчислити невластний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 1} dx$$

4. У просторі $C[0; 1]$ неперервних на відрізку $[0; 1]$ функцій з метрикою

$$d(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$$

обчислити відстань між точками $f(x) = 2x + 3$ та $g(x) = 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$.

5. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x = 10 - 10x$ на відрізку $[0; 1]$ з точністю до двох знаків після коми за допомогою теореми Банаха про стискаюче відображення.

6. Перевірити, чи лінійно незалежна система векторів $\left\{ \frac{1}{(kn)^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \dots$ у просторі l_2 сумованих у квадраті послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

7. Перевірити, чи є множина $\{f \in C[0; 1] \mid |f(x)| \leq 1\}$ опуклою.

8. Знайти кут між векторами $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ та $g(x) = x^2 + 5x - 6$ у просторі $C_2[0; 1]$ неперервних на відрізку $[0; 1]$ функцій зі скалярним добутком

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

9. Знайти точковий та неперервний спектри оператора $A\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $x_0 = 0$, у просторі l_2 сумованих у квадраті послідовностей.

10. Число, яке є коренем деякого многочлена з цілими коефіцієнтами, називають алгебраїчним. Обчислити лебегову міру множини всіх алгебраїчних чисел відрізка $[0; 1]$.

11. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \text{ раціональне,} \\ \sin x & \text{у протилежному разі.} \end{cases}$$

Обчислити інтеграл Лебега цієї функції на відрізку $\left[0; \frac{p}{2}\right]$.

Варіант 2

1. Знайти модуль і аргумент комплексного числа

$$(\sqrt{3}-i)^4(i-1)^7.$$

2. Знайти образ множини $\{z : |z-1| \geq 2\}$ при відображенні $w = \frac{z+i}{z-3}$.

3. За основною формулою теорії лишків обчислити невластний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+5x^2+6} dx.$$

4. У просторі $C_2 [0; 1]$ неперервних на відрізку $[0;1]$ функцій з метрикою

$$d(f, g) = \left(\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

- обчислити відстань між точками $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ та $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

5. Розв'язати рівняння $x^6 + 10x + 1 = 0$ на відрізку $[0;1]$ з точністю до двох знаків після коми, скориставшись теоремою Банаха про стискаюче відображення.

6. Перевірити, чи є лінійно незалежною система векторів $\sin nx$, $n = 1, 2, \dots$ у просторі $C[0; 1]$ неперервних на відрізку $[0;1]$ функцій.

7. Перевірити, чи є множина $\left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq 1 \right\}$ опуклою, де l_2 — простір сумованих у квадраті послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

8. Знайти кут між векторами $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ та $\left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ у просторі l_2 сумованих у квадраті послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ зі скалярним добутком

$$\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

9. Знайти точковий та неперервний спектр оператора $Af(x) = x^2 f(x)$ у просторі $C[0; 2]$ неперервних на відрізку $[0; 2]$ функцій.

10. Обчислити лебегову міру множини всіх точок квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$, які мають хоча б одну раціональну координату.

11. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{якщо } x \in \left(\frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}} \right], n = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Обчислити інтеграл Лебега цієї функції на відрізку $[0; 1]$.

Варіант 3

1. Знайти всі корені 10-го степеня з комплексного числа

$$512i - 512\sqrt{3}.$$

2. Знайти образ множини $\left\{ z : |z| \leq 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{3} \right\}$ при відображенні

$$w = z^4.$$

3. За основною формулою теорії лишків обчислити невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx.$$

4. У просторі l_2 сумованих у квадраті послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ з метрикою

$$d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right)^{1/2}$$

обчислити відстань між точками $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ та $\left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

5. Розв'язати рівняння $\frac{1}{\sqrt[10]{x}} = x - 1$ на відрізку $[1; 2]$ з точністю до двох знаків після коми за теоремою Банаха про стискаюче відображення.

6. Перевірити, чи система векторів $\ln nx$, $n = 1, 2, \dots$ в просторі $C[1; 2]$ неперервних на відрізку $[1; 2]$ функцій є лінійно незалежною.

7. Перевірити, чи є опуклою множина $\{f \in C[0; 1] \mid |f(x)| \geq 1\}$, де $C[0; 1]$ — простір неперервних на відрізку $[0; 1]$ функцій.

8. Знайти кут між векторами $\{2n\}_{n=1}^{100}$ та $\{3n+1\}_{n=1}^{100}$ у просторі R^{100} 100-мірних векторів зі скалярним добутком

$$\left(\{x_n\}_{n=1}^{100}, \{y_n\}_{n=1}^{100} \right) = \sum_{n=1}^{100} x_n y_n.$$

9. Знайти точковий та неперервний спектр оператора $A\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{x_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ у просторі l_2 сумованих у квадраті послідовностей.

10. Число, яке не є коренем жодного многочлена із цілими коефіцієнтами, називають трансцендентним. Обчислити лебегову міру множини всіх трансцендентних чисел відрізка $[0; 1]$.

11. Число, яке є коренем деякого многочлена з цілими коефіцієнтами, називають алгебраїчним. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{якщо } x \text{ алгебраїчне,} \\ xe^x & \text{у противному разі.} \end{cases}$$

Обчислити інтеграл Лебега цієї функції на відрізку $[1; 2]$.

Варіант 4

1. Обчисліть вираз

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5}.$$

2. Знайти образ множини $\{z : |z| = 4\}$ при відображенні $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

3. За основною формулою теорії лишків обчислити невластний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3} dx.$$

4. У просторі l_∞ обмежених послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ з метрикою

$$d(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \sup_n |x_n - y_n|$$

обчислити відстань між точками

$$\left\{ \frac{10}{n+10} \right\}_{n=1}^\infty \text{ та } \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}_{n=1}^\infty.$$

5. Розв'язати рівняння $\sqrt[5]{x} = 2 - x$ на відрізку $[1; 2]$ з точністю до двох знаків після коми за теоремою Банаха про стискаюче відображення.

6. Перевірити, чи є лінійно незалежною система векторів $\cos nx$, $n = 1, 2, \dots$ у просторі $C[0; 1]$ неперервних на відрізку $[0; 1]$ функцій.

7. Перевірити, чи є множина $\left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l_2 \mid \sum_{n=1}^\infty x_n^2 \geq 1 \right\}$ опуклою, де

l_2 — простір сумованих у квадраті послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

8. Знайти кут між векторами $f(x) = \sin 2x$ та $g(x) = \cos 3x$ у просторі $C_2 \left[0; \frac{p}{2} \right]$ неперервних на відрізку $\left[0; \frac{p}{2} \right]$ функцій зі скалярним добутком:

$$(f, g) = \int_0^{p/2} f(x)g(x)dx.$$

9. Знайти точковий та неперервний спектр оператора $Af(x) = \frac{f(x)}{x}$ у просторі $C[1; 2]$ неперервних на відрізку $[1; 2]$ функцій.

10. Обчислити лебегову міру множини всіх точок квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$, сума координат яких є раціональним числом.

11. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} m^n, & \text{якщо } x = \frac{1}{m^n}, m, n = 1, 2, \dots, \\ x & \text{у противному разі.} \end{cases}$$

Обчислити інтеграл Лебега цієї функції на відрізку $[0; 1]$.

Варіант 5

1. Записати у тригонометричній формі комплексне число

$$-1 + \cos \frac{p}{12} + i \sin \frac{p}{12}.$$

2. Знайти образ множини $\{z : \operatorname{Im} z = 2\}$ при відображенні $w = z^2$.

3. За основною формулою теорії лишків обчислити невластний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

4. У просторі R_{∞}^{30} тридцятиелементних послідовностей з метрикою

$$d(\{x_n\}_{n=1}^{30}, \{y_n\}_{n=1}^{30}) = \max_n |x_n - y_n|$$

обчислити відстань між точками $\{\sqrt{2n}\}_{n=1}^{30}$ та $\{\sqrt{n+8}\}_{n=1}^{30}$.

5. Розв'язати рівняння $\ln x = 2x - 4$ на відрізку $[2; 3]$ з точністю до двох знаків після коми за теоремою Банаха про стискаюче відображення.

6. Перевірити, чи є лінійно незалежною система векторів e^{nx} , $n = 1, 2, \dots$ у просторі $C[0; 1]$ неперервних на відрізку $[0; 1]$ функцій.

7. Перевірити, чи є множина $\left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 \leq 1 \right\}$ опуклою, де

l_2 — простір сумованих у квадраті послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

8. Знайти кут між векторами $f(x) = x$ та $g(x) = \ln x$ у просторі $C[1; 2]$ неперервних на відрізку $[1; 2]$ функцій зі скалярним добутком:

$$(f, g) = \int_1^2 f(x)g(x)dx.$$

9. Знайти точковий та неперервний спектри оператора $Af(x) = f(\sqrt{x})$ у просторі $C[0; 1]$ неперервних на відрізку $[0; 1]$ функцій.

10. Обчислити лебегову міру множини всіх точок квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$, добуток координат яких є раціональним числом.

11. Канторовою називають множину K , побудовану в наведеній далі формі. З відрізка $[0; 1]$ викидають середню третину $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Далі з кож-

ної частини, яка залишилась, викидають середню третину. Цей процес триває до нескінченності. На межі виходить множина K . Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \notin K, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \in K. \end{cases}$$

Обчислити інтеграл Лебега цієї функції на множині K .

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Банах С.* Курс функціонального аналізу. — К.: Рад. шк., 1948.
2. *Гольдберг А. А., Шеремета М. М.* Аналітичні функції. — К.: НМК ВО, 1991.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
6. *Луңц Г. Л., Эсгольц Л. Э.* Функции комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958.
7. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Гостехиздат, 1957.
8. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. — М.: Наука, 1968.
9. *Михлин С. Г.* Лекции по интегральным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1959.
10. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1967.
11. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
12. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

13. *Сборник задач по теории аналитических функций* / М. А. Евграфов, К. А. Бежанов, Ю. В. Сидоров и др. — М.: Наука, 1972.
14. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1967.
15. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. — М.: ИЛ, 1960.
16. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.
17. *Халмош П.* Теории меры. — М.: Мир, 1953.
18. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969.
19. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. — М.: Наука, 1964.
20. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.



ЗМІСТ

Пояснювальна записка	3
Навчально-тематичний план вивчення дисципліни “Додаткові глави аналізу. Основи теорії функцій і функціонального аналізу”	4
Програмний матеріал до вивчення дисципліни “Додаткові глави аналізу. Основи теорії функцій і функціонального аналізу”	4
Контрольні питання	7
Завдання для контрольних робіт	9
Список рекомендованої літератури	16

Відповідальний за випуск
Редактор
Комп’ютерне верстання

Н. Г. Потапенко
І. В. Хронюк
Т. Г. Замура

МАУП

Зам. № ВКЦ-2063

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП