

МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



**МАУП**

Київ 2005

Підготовлено кандидатом фізико-математичних наук, доцентом  
*Р. М. Трохимчуком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 8 від 14.04.04)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*

**Трохимчук Р. М.** Навчальна програма дисципліни “Дискретна математика” (для бакалаврів напрямку “Прикладна математика”). — К.: МАУП, 2005. — 30 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, навчально-тематичний план, програмний матеріал до вивчення дисципліни “Дискретна математика”, теми практичних та індивідуальних занять, питання для самоконтролю, а також список рекомендованої літератури.

## **ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА**

Дискретна математика — це розділ сучасної теоретичної, або математичної, кібернетики, в якому закладаються основи теорії і практики проектування та використання електронних обчислювальних машин і програмування, тому дискретну математику ще називають “комп’ютерною математикою” [8].

Програма курсу “Дискретна математика” має на меті ознайомити студентів з основними поняттями, моделями, результатами та методами досліджень у таких розділах сучасної математики, як теорія множин і відношень, комбінаторика, теорія графів, булеві функції і теорія скінченних автоматів, навчити ефективно застосовувати зазначений математичний апарат для розв’язування різноманітних практичних задач.

Навчальний курс належить до основ математики і базується на знаннях і навичках, здобутих при вивченні насамперед шкільного курсу математики.

Основна мета вивчення курсу — засвоїти теоретичні знання і набути практичних навичок з основ дискретної математики, потрібних студентам, які спеціалізуються в галузях прикладної математики та інформатики, математичної кібернетики і в подальшому вивчатимуть такі розділи сучасної інформатики, як теорія алгоритмів і математична логіка, системне програмування, системи автоматизованого керування, системи аналізу і проектування обчислювальної техніки та інших пристроїв дискретної дії, системи обробки і передачі інформації, аналіз даних, оптимізація обчислень, системи штучного інтелекту, комп’ютерної графіки, розпізнавання образів тощо.

**НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН**  
**вивчення дисципліни**

**“ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА”**

№ пор.	Назва теми
1	Множини і відношення
2	Комбінаторика
3	Теорія графів
4	Булеві функції
5	Теорія автоматів

**ПРОГРАМНИЙ МАТЕРІАЛ**  
**до вивчення дисципліни**

**“ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА”**

**Тема 1. Множини і відношення**

Поняття множини. Способи задання множин. Поняття порожньої й універсальної множин. Відношення належності та включення. Підмножини. Операції над множинами.

Декартів (прямий) добуток множин. Відповідність. Обернена відповідність, композиція відповідностей. Властивості відповідностей: всюди визначеність, функціональність, сюр'єктивність, ін'єктивність. Взаємно однозначна (бієктивна) відповідність.

Рівнопотужність множин. Злічені та незлічені множини. Континуальні множини.

Відношення, властивості бінарних відношень.

Відношення еквівалентності. Розбиття множини. Фактор-множина.

Відношення часткового порядку. Лінійний порядок. Лексикографічний порядок.

*Література [1–3; 5; 7; 9; 12; 13; 16; 18; 19]*

## **Тема 2. Комбінаторика**

Комбінаторні обчислення для основних теоретико-множинних операцій. Формула включення-виключення. Основне правило комбінаторики (правило множення). Сполуки, перестановки і розміщення. Перестановки і сполуки з повтореннями.

Біном Ньютона і поліномна теорема. Біномні тотожності.

Рекурентні співвідношення. Лінійні однорідні рекурентні співвідношення зі сталими коефіцієнтами.

Метод генератрис. Генератриси і рекурентні співвідношення.

*Література* [1–3; 6–8; 11; 16]

## **Тема 3. Теорія графів**

Поняття графа. Способи задання графів. Степені вершин графа. Ізоморфізм графів. Підграфи. Операції над графами. Графи і бінарні відношення.

Шлях у графі. Ланцюги і цикли. Зв'язність графів. Метричні характеристики графа: відстань, ексцентриситет, радіус, діаметр.

Дерево, ліс. Властивості дерев. Кістякові дерева і кістякові ліси графів. Двочасткові графи.

Обходи графів. Ейлерові цикли та ейлерові графи. Теорема Ейлера. Гамільтонові цикли.

Планарність графів, критерії планарності. Розфарбування графів.

Орієнтовані графи. Застосування теорії графів. Граф як модель.

*Література* [1–3; 7; 8; 10; 11; 14; 16; 17]

## **Тема 4. Булеві функції**

Булева функція. Задання булевої функції. Таблиця істинності. Елементарні булеві функції.

Булеві функції і формули. Рівносильність (еквівалентність) формул. Основні тотожності алгебри логіки.

Теорема про розклад булевої функції за змінними. Канонічні форми булевих функцій: досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) булевої функції та її ДКНФ.

Алгебра Жегалкіна. Методи побудови полінома Жегалкіна для заданої булевої функції.

Проблема повноти систем булевих функцій. Метод зведення. Приклади функціонально повних систем булевих функцій. Замкнені класи булевих функцій.

Теорема про функціональну повноту (теорема Поста). Критеріальна таблиця.

Проблема мінімізації формул алгебри логіки. Критерії оптимізації. Методи побудови мінімальних ДНФ. Імпліканта булевої функції, властивості імплікант. Поняття простої імпліканти. Метод Квайна, карти Карно.

*Література* [1–5; 7–9; 15; 16]

### **Тема 5. Теорія автоматів**

Поняття скінченного автомата. Методи задання автоматів: табличний, графічний і матричний. Автоматне відображення. Властивості автоматних відображень.

Гомоморфізм, ізоморфізм і невідрізнюваність (еквівалентність) автоматів.

Мінімальний (зведений) автомат. Відношення  $k$ -невідрізнюваності. Індуктивний алгоритм мінімізації скінченного автомата.

Дві моделі скінченних автоматів: модель Мілі й модель Мура.

Два типи автоматів: автомати-перетворювачі й автомати-розпізнавачі.

Автомат без виходів. Подія, зображувана в скінченному автоматі. Події і джерела.

Регулярні події і регулярні вирази. Алгоритми синтезу й аналізу скінченних автоматів-розпізнавачів. Теорема Кліні про регулярні події.

*Література* [4; 5; 7; 8; 16]

## **ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ТА ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАНЯТЬ**

1. Способи задання множин. Підмножини. Поняття порожньої та універсальної множин. Відношення належності й включення та їх властивості. Відмінність між цими відношеннями.
2. Операції над множинами. Основні тотожності для теоретико-множинних операцій і способи їх доведення. Діаграми Венна і логічні таблиці.
3. Доведення теоретико-множинних співвідношень. Булеан множини.
4. Декартів (прямий) добуток множин. Декартів степінь множини. Властивості декартового добутку множин.
5. Відповідність. Способи задання відповідностей. Обернена відповідність, операція композиції відповідностей. Властивості відповідностей: всюди визначеність, функціональність, сюр'єктивність, ін'єктивність, бієктивність.
6. Спосіб порівнювання кількостей елементів скінченних множин. Обчислення кількості всіх підмножин заданої скінченної множини.
7. Рівнопотужність множин. Властивості відношення рівнопотужності та їх доведення. Приклади рівнопотужних нескінченних множин. Зліченні та континуальні множини.
8. Відношення. Способи задання відношень. Властивості бінарних відношень: рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність.
9. Відношення еквівалентності. Розбиття множини. Поняття фактор-множини. Зв'язок між еквівалентностями і розбиттями. Канонічне (природне) відображення.
10. Відношення часткового порядку. Лінійний порядок. Лексикографічний порядок.
11. Верхня і нижня грані. Найбільший і найменший елементи. Максимальний і мінімальний елементи. Співвідношення між цими поняттями.
12. Комбінаторні обчислення для основних теоретико-множинних операцій. Формула включення-виключення. Розв'язування простих комбінаторних задач. Принцип Дирихле.

13. Основне правило комбінаторики (правило множення). Приклади застосування правила множення.
14. Сполуки, перестановки і розміщення, зв'язок між ними.
15. Перестановки і сполуки з повтореннями.
16. Біном Ньютона і поліномна теорема. Трикутник Паскаля. Біномні тотожності та їх доведення. Метод траскторій та його застосування для доведення біномних тотожностей.
17. Рекурентні співвідношення. Розв'язування лінійних однорідних рекурентних співвідношень зі сталими коефіцієнтами.
18. Метод генератрис. Обчислення генератрис і розв'язування рекурентних співвідношень.
19. Поняття графа. Способи задання графів. Ізоморфізм графів. Підграфи. Операції над графами. Степені вершин графа.
20. Шлях у графі. Ланцюги і цикли. Зв'язність графів. Означення метричних характеристик у графі (відстань, ексцентриситет, радіус, діаметр).
21. Методи та алгоритми перевірки зв'язності графів.
22. Дерево, ліс. Властивості дерев. Кістякове дерево (ліс). Цикломатичне число графа.
23. Двочасткові графи.
24. Плоскі і планарні графи. Теорема Ейлера та її наслідки. Критерії планарності графів.
25. Розфарбування графів. Визначення хроматичного числа графа.
26. Обходи графів. Ейлерів цикл і ланцюг. Гамільтонів цикл. Критерії існування обходів.
27. Орієнтовані графи (орграфи). Способи задання. Маршрут в орграфі. Повний орграф (турнір). Основні теореми про орграфи. Обходи орграфів.
28. Граф як модель. Приклади застосування графів.
29. Двійкові (булеві) кортежі, їх властивості. Булева функція. Задання булевої функції.
30. Елементарні булеві функції. Формули. Булеві функції від однієї і двох змінних. Побудова таблиці істинності.
31. Стандартний метод перевірки рівносильності формул.
32. Розклад булевої функції за змінними. Окремі випадки розкладу.



33. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) булевої функції. Властивості ДДНФ (правила побудови). Досконала кон'юнктивна нормальна форма булевої функції (ДКНФ).
34. Побудова полінома Жегалкіна для заданої булевої функції.
35. Проблема повноти для систем булевих функцій. Метод зведення. Приклади неповних систем і доведення їх неповноти.
36. Критеріальна таблиця. Перевірка повноти заданої системи булевих функцій.
37. Методи побудови мінімальних ДНФ. Імпліканта булевої функції, властивості та пошук імплікант. Проста імпліканта.
38. Метод Квайна побудови скороченої ДНФ.
39. Імплікантна таблиця, її побудова і застосування.
40. Мінімізація формул за допомогою карт Карно.
41. Релейно-контактні та комбінаційні схеми і булеві функції.
42. Методи задання скінченних автоматів: табличний, графічний, матричний. Побудова скінченних автоматів за заданими умовами їх поведінки.
43. Автоматне відображення. Доведення властивостей автоматних відображень.
44. Мінімальний (зведений) автомат. Індуктивний алгоритм мінімізації скінченних автоматів.
45. Зв'язок між автоматами Мілі і автоматами Мура.
46. Автомат без виходів (автомат-акцептор). Зображуваність подій в автоматах. Зображуваність скінченних подій. Приклади подій, незображуваних у скінченних автоматах.
47. Регулярні події. Алгебра регулярних подій. Регулярні вирази.
48. Події та джерела. Алгоритм побудови джерела, що зображує задану регулярну подію. Рівносильні перетворення для джерел.
49. Детермінізація джерела.
50. Алгоритми синтезу й аналізу скінченних автоматів-розпізнавачів.
51. Можливість розширення сигнатури алгебри регулярних подій. Приклад. Побудова відповідних автоматів.

## **КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ**

### **До теми 1**

1. Зазначити основні способи задання множин. Які множини називають рівними?
2. Відношення належності та включення, їх властивості. Відмінність між цими відношеннями.
3. Підмножина. Строга (або власна) підмножина. Булеан множини.
4. Як обчислити кількість елементів у булеані заданої скінченної множини?
5. Навести означення основних теоретико-множинних операцій: об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця, доповнення. Як слід розуміти поняття універсальної множини?
6. Проілюструвати теоретико-множинні операції діаграмами Венна.
7. Метод доведення теоретико-множинних співвідношень за допомогою логічних таблиць.
8. Навести означення і на конкретних прикладах проілюструвати поняття вектора, координати і проєкції вектора, рівності векторів.
9. Дати геометричну інтерпретацію декартового (прямого) добутку множин.
10. На конкретних прикладах продемонструвати, що операція декартового добутку множин непереставна (некомутативна).
11. Навести означення відповідності між множинами. Описати основні способи та навести приклади задання відповідностей (множина, графік, діаграма).
12. На конкретних прикладах пояснити поняття області визначення та області значень відповідності.
13. Які операції можна виконувати над відповідностями?
14. На конкретних прикладах продемонструвати результати операції отримання оберненої відповідності та операції композиції (суперпозиції, добутку) відповідностей.

15. Навести означення властивостей, за якими класифікують відповідності (всюди визначеність, функціональність, ін'єктивність, сюр'єктивність).
16. Що таке відображення? Навести приклади відображень на множині дійсних чисел.
17. Навести приклад відповідності, яка є функціональною, але не є всюди визначеною.
18. Навести приклад відповідності, яка є всюди визначеною, але не є функціональною.
19. Навести приклад відповідності, яка є водночас ін'єктивною і сюр'єктивною.
20. Навести приклад відповідності, яка є сюр'єктивною, але не є всюди визначеною.
21. Що таке бієктивна (взаємно однозначна) відповідність? Проілюструвати на прикладах.
22. Які множини називають рівнопотужними? Навести приклади рівнопотужних множин (скінченних і нескінченних).
23. Встановити взаємно однозначну (бієктивну) відповідність між множиною натуральних чисел і множиною цілих чисел.
24. Встановити бієктивну відповідність між множинами точок двох різних відрізків.
25. Встановити бієктивну відповідність між множинами точок квадрата і площини.
26. Дати означення зліченної множини. Навести приклади злічених множин.
27. Зазначити операції над множинами, що зберігають властивість зліченності.
28. Обґрунтувати зліченність множини раціональних чисел.
29. Навести приклади незлічених множин. Сформулювати і довести теорему Кантора.
30. Які множини називають континуальними? Навести приклади континуальних множин.
31. Що таке кардинальне число множини?
32. Якою є потужність множини ірраціональних чисел?
33. За яким правилом порівнюють кардинальні числа множин?
34. В чому полягає результат теореми Кантора–Бернштейна?

35. Дати означення бінарного відношення на множині. Яким чином можна узагальнити поняття відношення?
36. Описати основні способи і навести приклади задання відношень (множина, графік, граф, матриця).
37. Порівняти між собою поняття відповідності та відношення. Виділити спільні і відмінні характеристики цих понять.
38. Дати означення властивостей, за якими класифікують відношення (рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність).
39. Навести приклад відношення, яке не є рефлексивним і антирефлексивним водночас.
40. Навести приклад відношення, яке не є симетричним і антисиметричним водночас.
41. Навести приклад антисиметричного і транзитивного відношень.
42. Побудувати відношення, яке є симетричним, транзитивним і не є рефлексивним.
43. Дати означення відношення еквівалентності. Навести приклади відношень еквівалентності.
44. Чи є еквівалентностями відношення паралельності і перпендикулярності прямих на площині?
45. Чи є еквівалентністю відношення бути підмножиною, що розглядається на булеані деякої скінченної множини?
46. Навести приклад відношення еквівалентності на множині натуральних чисел і побудувати відповідну фактор-множину.
47. Яке відношення еквівалентності на скінченній множині має найбільшу і яке найменшу кількість класів?
48. Як пов'язані між собою відношення еквівалентності на певній множині та розбиття цієї множини?
49. Довести, що фактор-множина є розбиттям.
50. Що таке канонічне (природне) відображення множини на відповідну фактор-множину?
51. Дати означення відношення часткового порядку. Навести приклади відношень часткового порядку на числових і нечислових множинах.

52. Що таке лінійний порядок на множині? Навести приклади лінійно впорядкованих множин.
53. Дати означення мінімального, максимального, найменшого та найбільшого елементів частково впорядкованої множини. Охарактеризувати можливі співвідношення між цими поняттями. Навести приклади.
54. Навести приклад частково впорядкованої множини з двома мінімальними елементами.
55. Обґрунтувати, що відношення включення є відношенням часткового порядку на множині всіх підмножин (булеані) довільної множини.
56. Що таке лексикографічний порядок? Навести приклади його застосування.

## До теми 2

1. Написати формули для виконання комбінаторних обчислень для основних теоретико-множинних операцій.
2. Написати формулу включення-виключення. Пояснити її зміст.
3. Проілюструвати формулу включення-виключення за допомогою діаграм Венна.
4. Навести приклад застосування формули включення-виключення.
5. Сформулювати комбінаторне правило суми і правило добутку. Описати ситуації, коли слід застосовувати кожне з них.
6. Навести приклад застосування комбінаторного правила суми.
7. Навести приклад застосування основного правила комбінаторики (правила добутку).
8. Дати означення поняттям сполуки (комбінації), перестановки і розміщення.
9. Чим відрізняються сполука від розміщення і розміщення від перестановки?
10. Написати формули для визначення числа перестановок, сполук і розміщень.

11. Продемонструвати зв'язок між трьома останніми формулами.
12. Записати й обґрунтувати формулу для визначення числа перестановок з повтореннями.
13. Записати й обґрунтувати формулу для визначення числа сполук з повтореннями.
14. Сформулювати принцип Дирихле і навести приклади його застосування.
15. Записати й обґрунтувати формулу бінома Ньютона.
16. Біномні тотожності та їх доведення.
17. Трикутник Паскаля, правила побудови та його властивості.
18. Поліномна теорема. Приклади застосування поліномної теореми.
19. Навести приклади рекурентних співвідношень для різних числових послідовностей.
20. Що таке порядок (глибина) рекурентного співвідношення?
21. Що таке розв'язок рекурентного співвідношення?
22. Записати загальний вигляд лінійного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
23. Навести приклад лінійного однорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
24. Навести приклад лінійного неоднорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
25. Сформулювати основні властивості розв'язків лінійного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
26. Дати означення характеристичного рівняння лінійного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
27. Сформулювати алгоритм розв'язання лінійного однорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
28. Чим відрізняються випадки простих і кратних коренів характеристичного рівняння в записах розв'язків лінійного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами?
29. Сформулювати особливості розв'язання лінійного неоднорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.

30. Дати означення генератрис (твірної функції) числової послідовності? Навести приклади визначення генератрис для певних послідовностей.
31. Навести приклади застосування генератрис для розв'язування різних комбінаторних задач.
32. Зв'язок між операціями над послідовностями і відповідними генератрисами. Приклади.
33. Навести приклади застосування генератрис для розв'язування рекурентних співвідношень.

### До теми 3

1. Навести означення графа (неорієнтованого графа). Описати основні способи задання графів (теоретико-множинний, графічний, матричний) та їх взаємозв'язок.
2. Що таке ребро графа? Якою є максимальна кількість ребер у графі, що має  $n$  вершин?
3. Означити поняття підграфа.
4. Описати основні операції над графами (вилучення вершини і вилучення ребра).
5. Означити відношення суміжності вершин і відношення інцидентності вершин і ребер.
6. Що таке степінь вершини?
7. Побудувати граф із п'ятьма вершинами, в якому тільки дві вершини мають однакові степені. Чи можуть обидві ці вершини мати степінь 0 або степінь 4? Відповідь обґрунтувати.
8. Який граф називають повним?
9. Скільки ребер має повний граф, у якому  $n$  вершин?
10. Що таке доповнення графа? Співвідношення між кількостями ребер у графі та його доповненні.
11. Охарактеризувати зв'язок між графами і бінарними відношеннями.
12. Які графи називають ізоморфними? Навести приклади ізоморфних графів. Чим вони відрізняються? Які умови мають обов'язково виконуватись для ізоморфних графів?
13. Обґрунтувати твердження, що ізоморфні графи мають однакову кількість вершин і однакову кількість ребер.

14. Побудувати всі попарно неізоморфні графи із трьома вершинами.
15. Продемонструвати на прикладах різницю між такими поняттями: маршрут, ланцюг, простий ланцюг.
16. Як обчислюється довжина маршруту? Який маршрут має довжину 0?
17. Продемонструвати на прикладах різницю між такими поняттями: замкнений маршрут, цикл, простий цикл.
18. Який граф називають зв'язним? Навести приклади зв'язних і незв'язних графів.
19. Що таке компонента зв'язності графа?
20. Якими співвідношеннями пов'язані між собою такі параметри графа: кількість вершин, кількість ребер і кількість компонент зв'язності?
21. Сформулювати алгоритм, за допомогою якого можна перевірити зв'язність графа.
22. Навести означення та інтерпретацію метричних характеристик графа: відстань, ексцентриситет, діаметр, радіус, центр. Проілюструвати ці поняття на прикладах.
23. Навести приклад графа, діаметр якого збігається з його радіусом.
24. Навести приклад графа, центр якого містить більше однієї вершини.
25. Який граф називають ациклічним? Який граф називають деревом? Навести приклади.
26. Основні властивості дерев. Навести рівносильні означення поняття дерева.
27. Побудувати всі попарно неізоморфні дерева з п'ятьма вершинами.
28. Кістякове дерево (ліс) і цикломатичне число графа.
29. Який граф називають двочастковим? Навести приклади.
30. Чи може двочастковий граф містити цикл довжини 3?
31. Сформулювати критерій двочастковості графа.
32. Що таке повний двочастковий граф? Навести приклади.
33. Які графи називають плоскими та планарними? Навести приклади.



34. Навести означення грані та степені грані у плоскому графі. Теорема і формула Ейлера та її наслідки.
35. Чи є планарним повний граф із п'ятьма вершинами?
36. Чи є планарним повний двочастковий граф, кожна частка якого складається з трьох вершин?
37. Побудувати всі попарно неізоморфні планарні зв'язні графи з п'ятьма вершинами.
38. Що таке максимальний плоский граф? Що таке триангуляція? Охарактеризувати зв'язок між цими поняттями.
39. Побудувати дві неізоморфні триангуляції з шістьма вершинами.
40. Які графи називають гомеоморфними? Навести приклади.
41. Сформулювати критерій Куратовського планарності графа.
42. Навести означення розфарбування, правильного розфарбування і хроматичного числа графа.
43. Чому дорівнює хроматичне число довільного двочасткового графа?
44. Чому дорівнює хроматичне число будь-якого дерева?
45. Які графи можна правильно розфарбувати з використанням лише двох кольорів?
46. Який зв'язок існує між хроматичним числом графа та степенями його вершин?
47. Сформулювати гіпотезу чотирьох фарб.
48. Який граф називають ейлеровим? Навести приклади.
49. Сформулювати критерій ейлеровості графа.
50. Які з повних графів є ейлеровими?
51. Які з повних двочасткових графів є ейлеровими?
52. Який граф називають гамільтоновим? Навести приклади.
53. Чи можна стверджувати, що будь-який повний граф є гамільтоновим?
54. Чи можна стверджувати, що будь-який повний двочастковий граф є гамільтоновим?
55. Навести приклад графа, який є ейлеровим, але не є гамільтоновим.
56. Навести приклад графа, який є гамільтоновим, але не є ейлеровим.

57. Навести приклад графа, який є водночас ейлеровим і гамільтоновим.
58. Що таке орієнтований граф (орграф)? Навести приклади.
59. Способи задання орієнтованих графів. Які орграфи називають ізоморфними?
60. Побудувати всі попарно неізоморфні орграфи, які містять 3 вершини і 4 дуги. Визначити серед них сильно зв'язні, слабо зв'язні та однобічно зв'язні орграфи.
61. Побудувати орграф із п'ятьма вершинами, який має два стоки й одне джерело.
62. Який орграф називають повним (турніром)? Навести приклади.
63. Побудувати всі попарно неізоморфні повні орграфи з трьома й чотирма вершинами. Визначити серед них сильно зв'язні, слабо зв'язні та однобічно зв'язні орграфи.
64. Як за допомогою матриці суміжності орграфа визначити такі його параметри: (а) півстепені виходу та півстепені заходу кожної вершини; (б) недосяжні вершини; (в) тупикові вершини; (г) чи є орграф повним?
65. Сформулювати і обґрунтувати основні твердження про орграфи.
66. Який граф називають мультиграфом?
67. Граф як модель. Навести приклади застосування теорії графів.
68. Навести приклади задач (математичних і нематематичних), при розв'язанні яких доцільно застосовувати теорію графів і її результати.

#### До теми 4

1. Що таке двійковий (булевий) алфавіт і двійковий (булевий) вектор?
2. Навести означення понять довжини, номера і ваги двійкового вектора.
3. Як обчислюється відстань між двійковими векторами?
4. Які двійкові вектори називають сусідніми і які протилежними?

5. Яким чином означають порядок для двійкових векторів? Чи є цей порядок лінійним? Чи збігається він з лексикографічним порядком для двійкових векторів?
6. Чому дорівнює число двійкових векторів довжини  $n$ ?
7. Навести означення булевої функції. Що таке таблиця істинності та вектор значень булевої функції?
8. Якою є кількість булевих функцій від  $n$  змінних?
9. Побудувати таблицю істинності булевої функції від трьох змінних, яка набуває такого самого значення, як і більшість її змінних (*функція голосування*).
10. Побудувати таблицю істинності булевої функції від чотирьох змінних, яка на протилежних наборах набуває однакових значень.
11. Побудувати таблиці істинності для елементарних булевих функцій.
12. Навести означення формули над множиною операцій. Як визначити булеву функцію, яку реалізує (задає) певна формула?
13. Які формули називають рівносильними?
14. Чи можна стверджувати, що відношення рівносильності формул є відношенням еквівалентності на множині формул над певною множиною операцій?
15. Сформулювати стандартний метод перевірки рівносильності формул.
16. Записати і обґрунтувати основні тотожності алгебри логіки.
17. На конкретних прикладах проілюструвати різні способи задання булевої функції.
18. Охарактеризувати відповідність між множинами формул і булевих функцій.
19. Сформулювати теорему про розклад булевої функції за змінними. Записати окремі випадки розкладу.
20. Що називають диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) булевої функції? Навести приклади.
21. Яку диз'юнктивну нормальну форму булевої функції називають досконалою (ДДНФ)? Навести приклад.

22. Сформулювати властивості і правила побудови ДДНФ. Обґрунтувати єдиність ДДНФ.
23. Що називають кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) булевої функції? Навести приклад.
24. Яку кон'юнктивну нормальну форму булевої функції називають досконалою (ДКНФ)? Навести приклад.
25. Сформулювати правила побудови досконалої кон'юнктивної нормальної форми булевої функції, яка задана таблицею.
26. Обґрунтувати твердження, що для будь-якої формули існує рівносильна їй диз'юнктивна нормальна форма.
27. Побудувати ДНФ булевої функції від трьох змінних, яка набуває такого самого значення, як і більшість її змінних.
28. Довести, що коли у ДДНФ функції  $f$  замінити скрізь операцію диз'юнкції на операцію додавання за модулем 2, то отримаємо формулу, що задає функцію  $f$ , тобто рівносильну формулу. Чи правильне аналогічне твердження для довільної ДНФ функції  $f$ ?
29. Що таке алгебра Жегалкіна? Записати основні тотожності алгебри Жегалкіна.
30. Що таке поліном Жегалкіна булевої функції? Як означають поняття довжини і степені полінома Жегалкіна?
31. Скільки різних поліномів Жегалкіна може існувати для певної булевої функції?
32. Сформулювати способи побудови полінома Жегалкіна для заданої булевої функції (за допомогою ДДНФ і методом невизначених коефіцієнтів).
33. Поняття і роль канонічної (нормальної) форми в алгебрі. Канонічні форми булевих функцій.
34. Що таке замикання множини булевих функцій?
35. Який клас (множину) булевих функцій називають замкненим (функціонально замкненим)?
36. Навести приклади відомих замкнених класів.
37. Навести приклади булевих функцій, що зберігають константу 0, і таких, що не зберігають константу 0.
38. Навести приклади булевих функцій, що зберігають константу 1, і таких, що не зберігають константу 1.

39. Сформулювати метод перевірки належності заданої булевої функції до класів, що зберігають константи 0 чи 1.
40. Обґрунтувати твердження про замкненість класу булевих функцій, що зберігають константу 0 (константу 1).
41. Скільки існує булевих функцій від  $n$  змінних, що зберігають константу 0 (константу 1)?
42. Сформулювати означення лінійної булевої функції. Навести приклади лінійних і нелінійних булевих функцій.
43. Обґрунтувати твердження про замкненість класу лінійних булевих функцій.
44. Сформулювати алгоритм перевірки належності булевої функції до класу лінійних функцій.
45. Скільки існує лінійних булевих функцій від  $n$  змінних?
46. Яку функцію називають двоїстою до заданої? Яку булеву функцію називають самодвоїстою?
47. Навести приклади функцій самодвоїстих і несамодвоїстих.
48. Сформулювати метод перевірки належності булевої функції до класу самодвоїстих функцій.
49. Скільки існує самодвоїстих функцій від  $n$  змінних?
50. Сформулювати означення монотонної булевої функції. Навести приклади монотонних і немонотонних булевих функцій.
51. Обґрунтувати твердження про замкненість класу монотонних булевих функцій.
52. Сформулювати способи перевірки належності булевої функції до класу монотонних функцій.
53. Що таке функціонально повна система булевих функцій? Навести приклади функціонально повних систем булевих функцій.
54. Яку функціонально повну систему булевих функцій називають базисом? Навести приклади базисів.
55. Сформулювати критерій повноти системи булевих функцій (теорему Поста).
56. Сформулювати правила побудови і принципи застосування критеріальної таблиці для розв'язання проблеми повноти певної системи булевих функцій.

57. Навести приклади функціонально повних систем, що складаються з однієї функції.
58. Якою є максимальна кількість функцій у базисі?
59. Навести приклад базису, що складається з чотирьох функцій.
60. Навести приклади базисів, які містять одну, дві, три і чотири булеві функції.
61. Сформулювати і обґрунтувати актуальність проблеми визначення мінімальної формули для заданої булевої функції.
62. Навести означення мінімальної ДНФ (МДНФ) булевої функції.
63. Яку диз'юнктивну нормальну форму булевої функції називають найкоротшою (НДНФ)?
64. Що називають імплікантою і простою імплікантою булевої функції? Навести приклади.
65. Яку диз'юнктивну нормальну форму булевої функції називають скороченою (СДНФ)?
66. Що таке тупикова диз'юнктивна нормальна форма булевої функції?
67. Сформулювати загальну схему визначення всіх тупикових ДНФ заданої булевої функції. Описати взаємозв'язок усіх трьох типів ДНФ (скороченої, тупикової і мінімальної).
68. Сформулювати метод Квайна побудови скороченої ДНФ.
69. Сформулювати правила побудови і принципи застосування імплікантної таблиці для визначення тупикових ДНФ заданої булевої функції.
70. Сформулювати і обґрунтувати метод Петріка визначення всіх тупикових ДНФ заданої булевої функції.
71. У чому полягає метод мінімізації Блейка? Записати і обґрунтувати відповідні тотожності.
72. Описати загальну схему отримання зі скороченої ДНФ булевої функції її мінімальної ДНФ.
73. Що таке карта Карно булевої функції? Описати і продемонструвати на прикладах застосування карт Карно для визначення мінімальної ДНФ заданої булевої функції.

## До теми 5

1. Означити поняття скінченного автомата. Описати методи задання автоматів: табличний, графічний, матричний. Приклади.
2. Навести можливу інтерпретацію моделі скінченного автомата. Що таке абстрактний дискретний автоматний час?
3. Який автомат називають ініціальним?
4. Побудувати автомат, що описує алгоритм функціонування послідовного двійкового суматора.
5. Побудувати автомат затримки, тобто автомат, який функціонує у двійковому алфавіті і вихідний сигнал якого в певний момент дискретного часу збігається із вхідним сигналом у попередній момент часу.
6. Пояснити, що означає фраза “на вхід автомата подано певне вхідне слово”.
7. Навести означення автоматного відображення, що індукується заданим автоматом. Проілюструвати поняття автоматного відображення на прикладі.
8. Чому автоматне відображення часто називають поведінкою або зовнішньою поведінкою автомата?
9. Сформулювати властивості, які задовольняє довільне автоматне відображення (умови автоматності).
10. Навести означення гомоморфного відображення для автоматів.
11. Які автомати називають ізоморфними?
12. Сформулювати означення невідрізнюваності станів автоматів.
13. Які автомати називають невідрізнюваними? Навести змістовну інтерпретацію невідрізнюваності автоматів.
14. Обґрунтувати твердження, що відношення невідрізнюваності є еквівалентністю.
15. Чи правильним є твердження, що ізоморфні автомати є невідрізнюваними?
16. Побудувати приклад невідрізнюваних автоматів, які не є ізоморфними.

17. Описати зв'язок між гомоморфізмом, ізоморфізмом і невідрізнюваністю автоматів.
18. Що таке мінімальний або зведений автомат? У чому полягає задача мінімізації скінченного автомата?
19. Дати означення відношення  $k$ -невідрізнюваності.
20. Сформулювати і обґрунтувати індуктивний алгоритм мінімізації скінченного автомата. Навести приклад.
21. Довести, що мінімальний автомат має найменшу можливу кількість станів серед автоматів класу, що містить всі невідрізнювані між собою скінченні автомати.
22. Дві моделі скінченних автоматів. Модель Мура: означення, способи задання, автоматне відображення, гомоморфізм, ізоморфізм і невідрізнюваність для автоматів Мура. Зв'язок між автоматами Мілі та автоматами Мура. Навести приклад.
23. Що таке відмічена таблиця переходів автомата Мура?
24. Пояснити різницю між моделями Мілі та Мура.
25. Два типи поведінки, або два типи автоматів: автомати-перетворювачі й автомати-розпізнавачі. Описати зв'язок між обома типами та їх інтерпретації.
26. Сформулювати основні проблеми теорії автоматів (аналіз, синтез, оптимізація).
27. Навести означення моделі, яку називають автоматом без виходів.
28. Пояснити термін “подія” (або “мова”) в певному алфавіті.
29. Сформулювати означення події, зображуваної в скінченному автоматі.
30. Обґрунтувати твердження про зображуваність в автоматах скінченних подій.
31. Сформулювати алгоритм, що дозволяє перевірити, чи є подія, зображувана в заданому скінченному автоматі, непорожною.
32. Сформулювати алгоритм, що з'ясовує, чи зображують задані скінченні автомати ту саму подію.



33. Довести, що множина подій в певному скінченному алфавіті, зображуваних у скінченних автоматах, зліченна.
34. Довести, що множина всіх подій в певному скінченному алфавіті континуальна.
35. Із двох останніх тверджень вивести, що існують події, незображувані в скінченних автоматах.
36. Якою є потужність множини подій у певному скінченному алфавіті, незображуваних у жодному скінченному автоматі?
37. Навести приклад події, незображуваної в жодному скінченному автоматі.
38. Побудувати скінченний автомат для розпізнавання ідентифікатора мови програмування.
39. Сформулювати означення регулярних операцій над подіями.
40. Обґрунтувати, що операція множення подій, взагалі кажучи, некомутативна.
41. Записати й обґрунтувати основні тотожності алгебри подій.
42. Які події називають елементарними?
43. Що таке регулярна подія і регулярний вираз?
44. Які регулярні вирази називають рівносильними?
45. Сформулювати проблему рівносильності регулярних виразів і метод її розв'язання.
46. Написати регулярний вираз у двійковому алфавіті, який задає подію, що складається з усіх слів таких і тільки таких, довжини яких кратні 3.
47. Довести, що будь-яка скінченна подія є регулярною.
48. Що таке джерело і подія, зображувана джерелом? Які джерела називають рівносильними?
49. Сформулювати рівносильні перетворення для джерел.
50. Довести, що для довільного джерела існує рівносильне йому двополюсне джерело, тобто джерело, яке має тільки одну початкову і одну заключну вершини.
51. Чи можна стверджувати, що граф ініціального скінченного автомата без виходів є джерелом?

52. Яке джерело називають детермінованим?
53. Описати процедуру, яка для довільного джерела буде рівносильне йому детерміноване джерело (процедуру детермінізації джерела).
54. Описати загальну схему процедури, яка для будь-якої регулярної події буде скінченний автомат, що зображує цю подію (алгоритм синтезу). Навести приклад реалізації.
55. Описати індуктивну процедуру (алгоритм Мак-Нотона — Ямади) побудови регулярного виразу для події, яку зображує заданий скінченний автомат (алгоритм аналізу).
56. Обґрунтувати твердження, що подія є зображуваною у скінченному автоматі тоді й тільки тоді, коли вона регулярна.
57. Побудувати два скінченних автомати такі, що кожне слово у двійковому алфавіті  $B = \{0, 1\}$  розпізнається в одному з цих автоматів, однак жодне слово в алфавіті  $B$  не розпізнається одночасно обома автоматами.
58. Довести, що множина регулярних подій в певному алфавіті є замкненою відносно таких теоретико-множинних операцій: доповнення, перетин, різниця і симетрична різниця.
59. Навести приклад регулярної події в певному алфавіті та нерегулярної події в тому самому алфавіті таких, що об'єднання цих подій буде регулярною подією.
60. Навести приклад регулярної події в певному алфавіті та нерегулярної події в тому самому алфавіті таких, що об'єднання цих подій буде нерегулярною подією.
61. Довести, що об'єднання регулярної і скінченної подій у певному алфавіті є регулярною подією.
62. Довести, що різниця регулярної і скінченної подій у певному алфавіті є регулярною подією.
63. Обґрунтувати, що об'єднання нерегулярної і скінченної подій в певному алфавіті є нерегулярною подією.
64. Довести, що різниця нерегулярної і скінченної подій в певному алфавіті є нерегулярною подією.
65. Охарактеризувати проблеми рівносильності та мінімізації для регулярних виразів.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

### Основна

1. *Андерсон Д. А.* Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Вильямс, 2003.
2. *Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є.* Дискретна математика. — К.: Вища шк., 2002.
3. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. — М.: Наука, 1992.
4. *Глушков В. М.* Введение в кибернетику. — К.: Изд-во АН УССР, 1964.
5. *Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л.* Алгебра, языки, программирование. — 3-е изд., перераб. и доп. — К.: Наук. думка, 1989.
6. *Єжов І. І., Скороход А. В., Ядренко М. Й.* Елементи комбінаторики. — К.: Вища шк., 1972.
7. *Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М.* Дискретная математика для инженера. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
8. *Кук Д., Бейз Д.* Компьютерная математика. — М.: Наука, 1990.
9. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1975.
10. *Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич.* — М.: Наука, 1990.
11. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. — М.: Мир, 1980.
12. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. — М.: Просвещение, 1968.
13. *Трохимчук Р. М.* Множини і відношення: Навч. посіб. — К.: РВЦ КУ, 1994.
14. *Трохимчук Р. М.* Теорія графів: Навч. посіб. — ВПЦ КУ, 1998.
15. *Трохимчук Р. М.* Булеві функції: Навч. посіб. — ВПЦ КУ, 2001.

16. *Трохимчук Р. М.* Основы дискретной математики: Практикум. — К.: МАУП, 2004.
17. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
18. *Шиханович Ю. А.* Введение в современную математику. — М.: Наука, 1965.
19. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971.

*Додаткова*

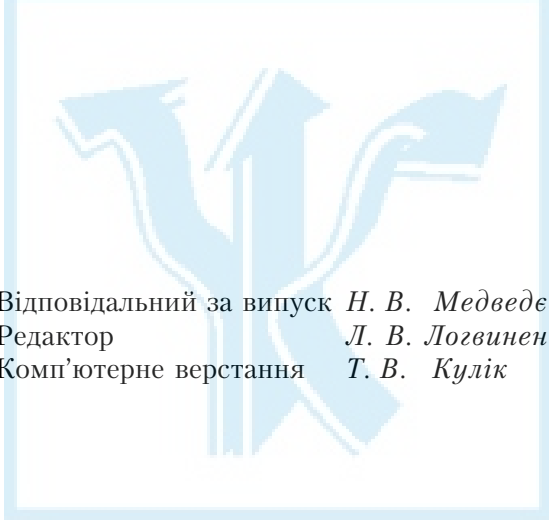
1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977.
2. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.
3. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977.
4. *Глушков В. М.* Синтез цифровых автоматов. — М.: Физматгиз, 1962.
5. *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики.* Т. 1 / Под общ. редакцией С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. — М.: Наука, 1974.
6. *Зыков А. А.* Основы теории графов. — М.: Наука, 1987.
7. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру. — М.: Наука, 1973.
8. *Калужнін Л. А., Королюк В. С.* Алгоритми і математичні машини. — К.: Вища шк., 1964.
9. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. — М., 1978.
10. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. — М.: Мир, 1970.
11. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. — СПб.: Питер, 2000.
12. *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1980.
13. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети, алгоритмы. — М.: Мир, 1984.
14. *Татт У.* Теория графов. — М.: Мир, 1988.

15. *Трохимчук Р. М.* Збірник задач з дискретної математики (розділ “Множини і відношення”). — К.: РВЦ КУ, 1997.
16. *Трохимчук Р. М.* Збірник задач із теорії графів: Навч. посіб. — К.: РВЦ КУ, 1998.
17. *Трохимчук Р. М.* Збірник задач з теорії булевих функцій: Навч. посіб. — К.: ВПЦ КУ, 2002.
18. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1977.
19. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966.
20. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1979.



## ***ЗМІСТ***

Пояснювальна записка .....	3
Навчально-тематичний план вивчення дисципліни “Дискретна математика” .....	4
Програмний матеріал до вивчення дисципліни “Дискретна математика” .....	4
Теми практичних та індивідуальних занять .....	7
Контрольні питання .....	10
Список рекомендованої літератури .....	27



Відповідальний за випуск *Н. В. Медведєва*  
Редактор *Л. В. Логвиненко*  
Комп'ютерне верстання *Т. В. Кулік*

Зам. № ВКІЦ-1911

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)  
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП