

МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

**НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**  
*дисципліни*

**“МАТЕМАТИЧНЕ  
ПРОГРАМУВАННЯ”**

**(для бакалаврів)**

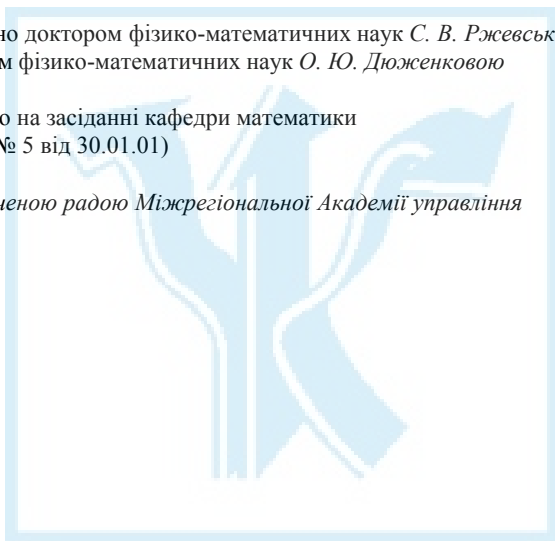
МАУП

Київ 2001

Підготовлено доктором фізико-математичних наук *С. В. Ржевським*  
і кандидатом фізико-математичних наук *О. Ю. Дюженковою*

Затверджено на засіданні кафедри математики  
(Протокол № 5 від 30.01.01)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*



***Ржевський С. В., Дюженкова О. Ю.*** Навчальна програма дисципліни “Математичне програмування” (для бакалаврів). — К.: МАУП, 2001. — 27 с.

Навчально-методична розробка містить пояснювальну записку, навчально-тематичний план, програмний матеріал до вивчення дисципліни “Математичне програмування”, завдання для самостійної роботи, контрольні питання, вказівки до виконання контрольної роботи, задачі для контрольних робіт, а також список рекомендованої літератури.

© Міжрегіональна Академія  
управління персоналом (МАУП),  
2001

## **ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА**

Нині жодний нетривіальний прогноз розвитку будь-якої реальної соціально-економічної системи без застосування математики вже не вважається науково обґрунтованим, жодна пропозиція щодо управління такою системою без всебічного попереднього математичного аналізу не сприймається (адже наслідки управління хоча б приблизно мають відповідати бажаним!). Акумуляований людством досвід свідчить, що саме математика є основою постановки й подальшого дослідження чітко окреслених проблем, систематизованим комплексом ефективних методів розв'язання прикладних задач і виконання кількісних розрахунків.

Обсяг засвоєння студентами змісту базових розділів теорії дослідження операцій — основних складових математичного програмування — має бути достатнім для розуміння основних понять, що застосовуються при постановці й розв'язанні типових задач економічного змісту й управління. Крім того, здобуті знання сприятимуть кращому сприйманню інших навчальних дисциплін — економетрії, теорії систем і системного аналізу, маркетингу, менеджменту, економічного аналізу, прогнозування та макроекономічного планування.

Основна мета вивчення дисципліни “Математичне програмування” — засвоїти знання щодо вибору найкращих (оптимальних) розв'язків типових задач, насамперед про призначення, загальні принципи побудови та можливості розробленого інструментарію, який застосовують в усіх сучасних системах підтримки прийняття рішень.

Програма курсу “Математичне програмування” для економістів-початківців охоплює такі основні його розділи: основні поняття та методологічні принципи дослідження операцій, математичні методи одно- та багатокритеріальної оптимізації (найзагальніша класифікація задач математичного програмування, ідентифікація їх розв'язків, елементи теорії двоїстості, короткий огляд сучасних обчислювальних методів), постановки та методи розв'язання задач динамічного програмування та сітьового планування, елементи теорії ігор.

З кожної теми програми передбачено постановку й аналіз відповідних типових задач, обговорення особливостей можливих методів їх розв'язання. Окремо наведено завдання для самостійної роботи студентів, які здебільшого мають практичний характер. Зокрема, у цих завданнях пропонується вивчити можливості й особливості застосування спеціалізованого програмного забезпечення обчислювальних машин, розробленого для розв'язання більшості стандартних задач (табличний

процесор Excel та пакет Mathcad). Саме при такому поєднанні вивчення теорії і сучасного допоміжного інструментарію можна навчитися розуміти, формулювати й ефективно розв'язувати практичні задачі помірної складності.

Для перевірки якості засвоєння теоретичної частини вивченого матеріалу подається перелік контрольних питань.

**НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН**  
**вивчення дисципліни**  
**“МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ”**

№ п/п	Назва теми
1	Проблематика математичного програмування
2	Загальна постановка задачі математичного програмування
3	Умови оптимальності для задачі математичного програмування з обмеженнями
4	Елементи теорії двоїстості
5	Задачі лінійного програмування. Транспортні задачі
6	Задачі квадратичного програмування
7	Задачі цілочислового програмування
8	Задачі стохастичного програмування
9	Задачі динамічного програмування
10	Обчислювальні методи оптимізації
11	Задачі багатокритеріальної оптимізації
12	Елементи теорії ігор
13	Задачі сітьового планування

МАУП

**ПРОГРАМНИЙ МАТЕРІАЛ**  
**до вивчення дисципліни**  
**“МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ”**

***Тема 1. Проблематика математичного програмування***

Математичне програмування як центральна складова теорії дослідження операцій. Типові задачі теорії дослідження операцій і математичного програмування. Математична модель операції. Мета операції, засоби досягнення мети (ресурси та способи їх використання), фактори, що впливають на операцію, рішення, критерій/критерії оцінювання якості рішення. Макроекономічна модель Леонт'єва.

***Тема 2. Загальна постановка задачі математичного програмування***

Цільова (критеріальна) функція і функції-обмеження. Множина допустимих точок задачі математичного програмування (ЗМП) та її розв'язання. Способи перетворення типів обмежень на змінні задачі та характеру оптимізації цільової функції. Похідна за напрямом функції кількох змінних. Градієнт функції і його основні властивості.

Елементи теорії опуклого аналізу: основні означення та властивості опуклих множин і функцій. Субдиференціал опуклої функції.

Загальні класифікації задач оптимізації. Ідентифікація розв'язків у задачах безумовної оптимізації з диференційованими цільовими функціями.

***Тема 3. Умови оптимальності для задачі математичного програмування з обмеженнями***

Теореми Лагранжа та Куна — Таккера для задач математичного програмування, що визначаються диференційованими функціями.

***Тема 4. Елементи теорії двоїстості***

Двоїста задача. Властивості двоїстої задачі та її зв'язок із вихідною оптимізаційною задачею. Післяоптимізаційний аналіз задач математичного програмування. Функція збурень.

***Тема 5. Задачі лінійного програмування. Транспортні задачі***

Задачі лінійного програмування (ЛП). Умови існування розв'язків задач лінійного програмування. Двоїста задача лінійного програмування.

Методи розв'язання задач ЛП (симплекс-метод, двоїтий симплекс-метод).

Транспортні задачі ЛП і методи їх розв'язання.

### ***Тема 6. Задачі квадратичного програмування***

Задачі квадратичного програмування, їх властивості та загальні методи розв'язання.

Метод найменших квадратів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

### ***Тема 7. Задачі цілочислового програмування***

Лінійні цілочислові задачі. Постановки економічних задач з вимогою цілочисельності.

Основні методи розв'язання задач цілочислового програмування. Методи відтину. Метод віток і границь.

### ***Тема 8. Задачі стохастичного програмування***

Класифікація задач стохастичного програмування. Одно- та двоетапні задачі. Оцінювання приближних розв'язків.

### ***Тема 9. Задачі динамічного програмування***

Задача розподілу ресурсів із вкладенням доходів у виробництво.

Загальна постановка задачі динамічного програмування. Основне функціональне рівняння задачі динамічного програмування і метод її розв'язання.

### ***Тема 10. Обчислювальні методи оптимізації***

Ітераційні методи розв'язання оптимізаційних задач. Проблема збіжності ітераційного алгоритму та її швидкості. Метод найшвидшого спуску і метод Ньютона для розв'язання задачі безумовної оптимізації двічі неперервно диференційованої функції.

Програмні засоби для ПЕОМ, призначені для розв'язання задач оптимізації.

### **Тема 11. Задачі багатокритеріальної оптимізації**

Прийняття рішень за умови кількох критеріїв ефективності. Парето-оптимальні рішення. Лексикографічна оптимізація. Метод послідовних поступок. Проблема розподілу ресурсів за наявності кількох зацікавлених сторін. Теорема Ерроу.

### **Тема 12. Елементи теорії ігор**

Задачі теорії ігор. Основні поняття. Нижня та верхня ціни гри. Принцип мінімакса. Сідлова точка гри двох осіб з нульовою сумою. Умови існування обережних стратегій гри двох осіб. Змішані стратегії матричної гри двох осіб. Розв'язок гри у змішаних стратегіях. Приклад матричної гри  $2 \times 2$ .

### **Тема 13. Задачі сітьового планування**

Метод сітьового планування. Задача планування комплексу робіт. Сітьовий та часовий графіки комплексу робіт. Загальна структура методу розв'язання задачі сітьового планування. Оптимізація плану комплексу робіт.

## **ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Навести приклад операції в економіці. Конкретизувати мету операції, заходи, спрямовані на її досягнення, і основні обмеження (умови) щодо реалізації цих заходів. Описати множину альтернативних рішень операції та критерій/критерії їх ефективності. Запропонувати математичну модель цієї операції.

*Література* [1; 2; 4–7; 9–11; 13–27; 30–33]

2. Обчислити градієнт квадратичної функції

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Hx \rangle + \langle h, x \rangle + \gamma, \quad (1)$$

де  $H$  — довільна фіксована  $n \times n$ -матриця;  $n$  — задане натуральне число;  $h$  — фіксований вектор;  $x$  — вектор змінних  $n$ -вимірною евклідова простору  $R^n$ ;  $\gamma$  — фіксоване дійсне число,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{— евклідов скалярний добуток векторів } x, y \in R^n.$$

3. Обчислити градієнт функції (1) у точці  $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ , якщо  $h = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ;

$$\text{а) } H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 9 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Література* [3; 5–7]

4. Описати множини стаціонарних точок функції (1), якщо  $n = 2$ ;

$$\text{а) } H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$\text{б) } H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

5. Довести, що матриця  $H$  в умові (2) не є невід’ємно визначеною.

6. Довести, що задача

$$\varphi(x) = \langle x, Hx \rangle \rightarrow \inf_x \quad (4)$$

з матрицею  $H$  з умови (2) не має розв’язків і що її значення дорівнює  $-\infty$ .

*Література* [3–7]

7. За допомогою пакета програм Mathcad знайти хоча б одну стаціонарну точку функції (1), матриця  $H$  і вектор  $h$  якої визначені у завданні 3.

8. Для  $n = 10, 20, 30, 40, 50$  методом Ньютона (див. команду “Поиск решения” з меню “Сервис” у табличному процесорі MS Excel) розв’язати таку задачу (мінімізувати функцію Гільберта):



$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle - \langle b, x \rangle \rightarrow \min_x, \quad (5)$$

де

$$A_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \quad \forall ij = 1, \dots, n, \quad b_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

(Завдання 7 і 8 виконуються на ПЕОМ.)

Література [28; 29]

9. Для заданих додатного числа  $Q$  та  $n$ -вимірних векторів  $\bullet$ ,  $a$ ,  $p$  ( $\alpha_i > 0$ ;  $a_i, p \geq 0$ ;  $\forall i = 1, \dots, n$ ), таких що

$$\sum_{i=1}^n p_i a_i < Q, \quad (6)$$

знайти розв'язок задачі (модель Р. Стоуна):

$$f(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i} \rightarrow \max_x, \quad (7)$$

$$\langle p, x \rangle \leq Q, \quad (8)$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

10. Розв'язати задачі:

$$a) \quad 4x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 \rightarrow \min_x, \quad (10)$$

$$4 \leq x_1 \leq 8, \quad -1 \leq x_2 \leq 2; \quad (11)$$

$$б) \quad ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \rightarrow \min_x, \quad (12)$$

$$-1 \leq x_1 \leq 1, \quad 1 \leq x_2, \quad (13)$$

де  $a, b, c$  — такі числа, що  $a > 0$ ;  $4ac > b^2$ .

11. Для довільного фіксованого вектора  $c \in R^n$  розв'язати задачі:

$$\text{a) } \frac{1}{2} \|x\|^2 - \langle c, x \rangle \rightarrow \min_x, \quad (14)$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n; \quad (15)$$

$$\text{б) } \frac{1}{2} \|x\|^2 + \|x - c\|^2 \rightarrow \min_x, \quad (16)$$

де

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

*Література [3–7]*

**12.** Для вагових коефіцієнтів  $\alpha_1 = 2$ ;  $\alpha_2 = 1$  критеріальних функцій задачі

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \min_x, \quad (17)$$

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 1 \leq x_2 \leq 3 \quad (18)$$

знайти відповідний Парето-оптимальний розв'язок.

Знайти також Парето-оптимальний розв'язок задачі при  $\alpha_1 = 1$ ;  $\alpha_2 = 2$ .

**13.** Зобразити графічно множину розв'язків системи лінійних нерівностей

$$x_1 + x_2 \leq a_1, \quad (19)$$

$$x_1 - x_2 \leq a_2, \quad (20)$$

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad (21)$$

$$1 \leq x_2 \leq 3 \quad (22)$$

при  $a_1 = 2,5$ ;  $a_2 = -2,5$ .

У просторі значень критеріальних функцій задачі (17), (18) зазначити множину їх значень на розв'язках системи нерівностей (19)–(22).

**14.** Визначити, яку точку  $x$  необхідно вибрати як прийнятний розв'язок задачі (17), (18), якщо для заданих ОНР (особа, яка

приймає рішення) значень  $a_1, a_2$  система нерівностей (19)–(22) виявиться несумісною.

15. Знайти розв'язок двокритеріальної лексикографічної задачі мінімізації на множині точок (18), вважаючи функцію  $F_2(x) = x_1 - x_2$  більш значущою, ніж функція  $F_1(x) = x_1 + x_2$ .

16. Запропонувати математичну модель задачі багатокритеріальної оптимізації, яка відображає певний принцип прийняття рішення в реальних умовах.

*Література* [2; 7; 30; 33]

17. Методом динамічного програмування розв'язати задачу розподілу протягом 5 років наявних коштів у кількості  $K_0 = 2$  ум. од. між двома галузями виробництва. Мета розподілу — отримати максимальний прибуток. Функції прибутку:

галузі I

$$f(x) = 1 - e^{-x}, \quad (23)$$

галузі II

$$g(x) = 1 - e^{-2x}. \quad (24)$$

Функції витрат:

галузі I

$$\varphi(x) = 0,75x, \quad (25)$$

галузі II

$$\psi(x) = 0,3x, \quad (26)$$

де  $x$  — кількість засобів, вкладених у галузь.

*Література* [2, с. 146–153]

18. Нехай комплексом робіт є елементарні роботи  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , тривалість виконання яких відповідно  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Припустимо, відомий критичний шлях виконання цього комплексу робіт і загальний час його виконання

$$T = \sum_{\text{(крит.)}} t_i \quad (27)$$

(додавання виконується за роботами критичного шляху).

Навести формалізований опис таких оптимізаційних задач:

а. Нехай вкладення додаткових засобів на суму  $y$  у роботу  $a_i$  зменшує час її виконання з  $t_i$  до

$$\begin{aligned} t'_i &= f_i(y) \\ (t'_i &= t_i). \end{aligned} \quad (28)$$

Визначити, які додаткові витрати  $x_1, x_2, \dots, x_n$  потрібні для виконання кожної роботи, щоб час виконання всіх робіт  $T$  не перевищував заданого значення  $T_0$  і щоб при цьому загальна вартість додаткових засобів була мінімальною.

б. Припустимо, що кількість засобів  $a_i$ , які використовують при виконанні кожної роботи, зменшилася і  $z$  — вартість засобів, які вже не використовують при виконанні цієї роботи. Нехай  $t''_i$  — нова тривалість виконання роботи  $a_i$ , причому

$$t''_i = \varphi_i(z) > t_i \quad (29)$$

(вважається, що невикористання певної кількості засобів лише збільшує час виконання роботи).

Будь-яку кількість засобів, які використовують при виконанні будь-якої роботи, можна продати і на отримані кошти придбати бажані засоби.

Нехай  $Q$  — наявні кошти, які можна витратити на придбання засобів, необхідних для виконання робіт  $\{a_i\}$ .

Визначити, як перерозподілити між роботами наявні засоби і використати наявні кошти, щоб час виконання комплексу робіт був найменший.

в. Нехай час виконання комплексу робіт  $T$  не перевищує заданого значення  $T_0$ .

Визначити, на який час треба затримати виконання кожної роботи (як перерозподілити наявні засоби), щоб при виконанні вимоги

$$T \leq T_0 \quad (30)$$

була звільнена максимальна кількість (у грошовому виразі) засобів, які застосовують для виконання комплексу робіт.

*Література* [2, с. 531–539]

**19.** Вивчити властивості матричних ігор  $2 \times n$ ,  $m \times 2$  і метод розв’язання матричних ігор  $m \times n$ .

*Література* [2, с. 472–492]

### **КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ**

1. Що таке операція?
2. Що таке рішення, оптимальне рішення, критерій ефективності операції?
3. Математичні моделі операцій; їх розробники.
4. Макроекономічна модель Леонтьєва; сфера застосування.
5. У чому полягає проблематика математичного програмування?
6. Яку роль у виконанні операції відіграє особа, яка приймає рішення?
7. Означення понять “евклідов простір”, “евклідов скалярний добуток”, “функція”, “лінійна функція”, “квадратична функція”.
8. Канонічна постановка задачі математичного програмування; означення критеріальної функції та функцій-обмежень.
9. Означення множини допустимих точок задачі математичного програмування та її розв’язку.
10. З якою метою класифікують задачі математичного програмування? Навести приклади класів ЗМП.
11. Означення опуклої множини, функції.
12. Означення субдиференціала (субградієнта) опуклої функції.
13. Обчислення субдиференціала (субградієнта) функції максимуму.
14. Необхідні умови оптимальності в задачах безумовної оптимізації.
15. Достатні умови оптимальності для задач безумовної оптимізації.
16. Умови оптимальності для задачі безумовної мінімізації опуклої функції.
17. Означення функції Лагранжа.
18. Необхідні умови оптимальності для ЗМП з обмеженнями у формі рівностей.
19. Достатні умови оптимальності для ЗМП з обмеженнями у формі рівностей.

20. Необхідні умови оптимальності для ЗМП з обмеженнями у формі нерівностей.
21. Умови регулярності.
22. Теорема Куна — Таккера.
23. Означення і дослідження двоїстої задачі.
24. Загальні властивості двоїстої функції.
25. Взаємозв'язок значень вихідної ЗМП і її двоїстої задачі.
26. Як знайти розв'язок вихідної ЗМП, якщо відомі розв'язок і значення двоїстої задачі?
27. Як оцінити ступінь впливу помилок завдання обмежень на значення ЗМП?
28. Які ЗМП називають задачами лінійного програмування?
29. Стандартна постановка задачі лінійного програмування.
30. Як звести задачу лінійного програмування до канонічного вигляду?
31. Симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування.
32. Задача квадратичного програмування.
33. Метод найменших квадратів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
34. Правило порівняння задачі лінійного програмування і двоїстої задачі.
35. Зв'язок задачі лінійного програмування з її двоїстою задачею. Як цей зв'язок використовують на практиці?
36. Математична модель транспортної задачі лінійного програмування в матричній формі.
37. Двоїста задача транспортної задачі лінійного програмування в матричній формі.
38. Навести приклад задачі цілочислового математичного програмування і формалізований опис цієї задачі.
39. Які методи застосовують для розв'язання задач цілочислового математичного програмування?
40. Постановка одноетапної задачі стохастичного програмування.
41. Основні характеристики ітераційних методів розв'язання ЗМП.
42. Який алгоритм називають збіжним?
43. Структура методу найшвидшого спуску.
44. Обчислювальна схема методу Ньютона.
45. Найпоширеніші програмні засоби, призначені для розв'язання на ПЕОМ задач математичного програмування.
46. Навести приклад багатокритеріальної ЗМП і формалізовану постановку такої задачі.

47. Означення Парето-оптимальної точки. Як можна знайти таку точку?
48. Означення лексикографічної задачі оптимізації. Що називають розв'язком такої задачі?
49. У чому полягає метод послідовних поступок у багатокритеріальній оптимізації?
50. Теорема Ерроу.
51. Навести приклад задачі динамічного програмування.
52. У чому полягає принцип оптимальності, який використовують при розв'язанні задач динамічного програмування?
53. Загальна постановка задачі динамічного програмування.
54. Основне функціональне рівняння динамічного програмування.
55. Загальна структура методу розв'язання задачі динамічного програмування.
56. Зміст і призначення структурної таблиці комплексу робіт.
57. Процедура ранжирування “елементарних” робіт.
58. Призначення сітьового графа комплексу робіт. Навести приклад графа такого типу.
59. Які роботи називають критичними? Як їх знайти?
60. Навести приклади оптимізаційних задач комплексів робіт.
61. Означення матричної гри.
62. Розв'язок гри, її нижня і верхня ціни.
63. Принцип мінімакса в теорії ігор.
64. Змішані стратегії в матричних іграх.

### ***ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ***

У контрольній роботі потрібно розв'язати шість задач. Номер задач студент визначає за останньою цифрою номера своєї залікової книжки. Наприклад, якщо остання цифра номера залікової книжки — 3, студент розв'язує задачі 3, 13, 23, 33, 43, 53.

### ***ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ***

#### ***Задачі 1–10***

Підприємство складається з трьох цехів, у кожному з яких виробляють відповідний (один) вид продукції. У кожному цеху на потреби виробництва використовують продукцію всіх цехів цього підприємства ( $a_{ij}$  — кількість одиниць продукції  $i$ -го цеху, які використовують для виготовлення одиниці продукції  $j$ -го цеху).

Відомі технологічна матрицю  $A = \{a_{ij}\}$  і обсяги  $Y$  продукції підприємства, замовленої для продажу на ринку. Визначити вектор  $X$  обсягів виробництва для кожного цеху.

$$1. A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 30 \end{pmatrix}. \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \\ 70 \end{pmatrix}. \quad 4. A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix}. \quad 6. A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 160 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 80 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix}. \quad 8. A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}. \quad 10. A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 110 \\ 200 \\ 220 \end{pmatrix}.$$

### Задачі 11–20

Скласти математичну модель і розв'язати відповідну оптимізаційну задачу.

**11.** Для пошиття спідниць і суконь швейний цех має 96 м тканини. На пошиття однієї сукні витрачають 3 м тканини і 1,8 год роботи устаткування, а на пошиття однієї спідниці — 2 м тканини і 0,6 год роботи устаткування. Час роботи устаткування обмежений 45 год на тиждень. Прибуток від продажу однієї сукні становить 18 грн, а однієї спідниці — 10 грн. Визначити щотижневий план виробництва, який забезпечує найбільший прибуток від реалізації готових виробів, якщо суконь потрібно виготовити щонайбільше 20, а спідниць — щонайбільше 30.

**12.** Відомо, що відгодівля худоби економічно вигідна, якщо кожна тварина отримує на день щонайменше 6 одиниць споживчої речовини А, 12 одиниць речовини В і 4 одиниці речовини С. Для відгодівлі худоби



використовують два види кормів. Споживчу цінність 1 кг кожного виду корму наведено в таблиці.

Вид корму	Споживча цінність 1 кг споживчої речовини		
	А	В	С
I	2	2	0
II	1	4	4

Вартість 1 кг корму I становить 50 коп., корму II — 60 коп. Скільки необхідно використати кожного виду корму, щоб витрати були найменшими?

**13.** Підприємство виробляє два види продукції, для чого використовується три види ресурсів. Для виготовлення одиниці продукції першого виду необхідно витратити 3 одиниці ресурсу А, 2 одиниці ресурсу В і 1 одиницю ресурсу С, а для виготовлення одиниці продукції другого виду — 2 одиниці ресурсу А, 3 одиниці ресурсу В і 1 одиницю ресурсу С. Запаси ресурсів А, В і С становлять відповідно 101, 99 і 37 одиниць. Визначити, скільки одиниць продукції кожного виду потрібно виробити, щоб отримати максимальний прибуток, якщо кожна одиниця продукції першого виду дає прибуток 27 грн, другого виду — 24 грн.

**14.** Для відгодівлі худоби використовують два види кормів. У кожному кілограмі корму I міститься 5 одиниць споживчої речовини А і 2,5 одиниці споживчої речовини В, а у кожному кілограмі корму II — по 3 одиниці споживчих речовин А і В. Встановлено, що відгодувати тварин вигідно лише тоді, коли їх денний раціон становитиме щонайменше 30 одиниць споживчої речовини А і 22,5 одиниці споживчої речовини В. Відомо, що вартість (споживча цінність 1 кг) кожного виду корму — 1 грн. Визначити, скільки корму кожного виду треба використовувати щоденно, щоб витрати були найменшими за зазначених умов відгодовування?

**15.** Для збереження здоров'я і працездатності людина повинна споживати щодня таку норму поживних речовин: А — щонайменше 4 мг, В і D — по 6 мг, С — 9 мг. У щоденному раціоні є два види продуктів. Вміст у 1 кг кожного виду продукту поживних речовин такий: А — відповідно 2 і 1 мг, В — 0 і 3 мг, С — 1 і 3 мг, D — 3 і 2 мг. Необхідно організувати щоденне харчування так, щоб його вартість була найменшою, а людина одержувала за добу зазначену норму поживних речовин.

**16.** На виробництво двох видів продукції потрібні чотири групи устаткування (див. таблицю). Необхідно організувати випуск продукції так, щоб прибуток від її реалізації був найбільшим.

Група виробничого устаткування	Необхідна кількість устаткування для випуску одиниці продукції		Кількість устаткування у групі
	I	II	
A	2	3	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12
Прибуток від реалізації одиниці продукції, тис. грн.	2	3	

**17.** Мале підприємство виготовляє два види виробів, які мають бути оброблені за певний час на кожному з верстатів I, II і III (див. таблицю).

Виріб	Час обробки виробу на верстаті, год		
	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Час роботи верстатів I, II і III — відповідно 40, 36 і 36 год на тиждень. Прибуток від реалізації одного виробу A і B — відповідно 5 і 3 грн. Визначити тижневі норми виробництва виробів A і B, при яких прибуток буде максимальний.

**18.** Для виробництва двох видів продукції використовують токарне, фрезерне та шліфувальне устаткування. Норми витрат часу на обробку одного виробу продукції та фонд робочого часу для кожного типу устаткування наведено в таблиці.

Тип виробничого устаткування	Витрати часу на обробку одного виробу продукції, год		Фонд робочого часу устаткування, год
	I	II	
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грн.	14	18	

Визначити план випуску продукції, що забезпечить найбільший прибуток.

**19.** На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери необхідно вирізати заготовки трьох видів у кількості відповідно 24, 31 і 18 шт. Кожен лист фанери можна розрізати для заготовки двома способами. Кількість отриманих заготовок при кожному способі розрізування, а також залишки фанери після розрізування наведено у таблиці.

Вид заготовки	Кількість заготовок при розрізуванні за способом, шт.	
	першим	другим
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Залишки фанери, см <sup>2</sup>	12	16

Визначити, яку кількість фанери і яким способом потрібно розрізати, щоб отримати бажану кількість заготовок з найменшими залишками.

**20.** У фермерському господарстві вирощують лисиць і нутрій. Для забезпечення нормальних умов відгодовування використовують три види кормів. Кількість одиниць кормів, яку повинні отримувати лисиці та нутрії, і загальну кількість корму кожного виду наведено в таблиці.

Вид корму	Кількість одиниць кормів для щоденного споживання		Загальна кількість корму
	лисиці	нутрії	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї шкурки, у. о.	16	12	

Визначити, скільки лисиць і нутрій треба вирощувати, щоб прибуток від реалізації хутра був найбільший.

### **Задачі 21–30**

Розв'язати задачу лінійного програмування, записати і розв'язати двоїсту до неї задачу.

21.  $f(x) = -2x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

22.  $f(x) = -3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

23.  $f(x) = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

24.  $f(x) = x_1 + 6x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 \leq 56, \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

25.  $f(x) = -4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

26.  $f(x) = 6x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

27.  $f(x) = 8x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

28.  $f(x) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

29.  $f(x) = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

30.  $f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

### Задачі 31–40

За наведеними в таблиці витратами на перевезення одиниці вантажу від пунктів постачання  $A_1, A_2, A_3$  до пунктів споживання  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , а також обсягами запасів продукції в пунктах постачання та її попиту в пунктах споживання знайти оптимальний план транспортної задачі.

31.

Пункт постачання	Витрати на перевезення одиниці вантажу до пункту споживання				Обсяг запасів продукції
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	5	4	3	4	160
$A_2$	3	2	5	5	140
$A_3$	1	6	3	1	60
Попит	90	80	50	80	

32.

Пункт постачання	Витрати на перевезення одиниці вантажу до пункту споживання				Обсяг запасів продукції
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	4	3	5	10	110
$A_2$	7	11	6	8	100
$A_3$	13	9	10	12	190
Попит	100	120	110	80	

33.

Пункт постачання	Витрати на перевезення одиниці вантажу до пункту споживання				Обсяг запасів продукції
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	4	2	3	1	80
$A_2$	6	3	5	6	140
$A_3$	3	2	6	3	70
Попит	80	50	50	70	

34.

Пункт постачання	Витрати на перевезення одиниці вантажу до пункту споживання				Обсяг запасів продукції
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	2	3	2	4	130
$A_2$	3	2	5	1	140
$A_3$	4	3	2	1	130
Попит	120	130	100	120	

35.

Пункт поставання	Витрати на перевезення одиниці вантажу до пункту споживання				Обсяг запасів продукції
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	6	7	3	2	180
$A_2$	5	1	4	3	90
$A_3$	3	2	6	2	170
Попит	60	80	100	160	

36.

Пункт поставання	Витрати на перевезення одиниці вантажу до пункту споживання				Обсяг запасів продукції
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	8	1	9	7	110
$A_2$	4	6	2	12	190
$A_3$	3	5	8	9	90
Попит	80	90	170	80	

37.

Пункт поставання	Витрати на перевезення одиниці вантажу до пункту споживання				Обсяг запасів продукції
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	9	7	5	3	175
$A_2$	6	2	4	6	125
$A_3$	8	10	12	1	140
Попит	180	110	60	40	

38.

Пункт поставання	Витрати на перевезення одиниці вантажу до пункту споживання				Обсяг запасів продукції
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	5	7	4	2	200
$A_2$	7	2	3	1	175
$A_3$	2	3	6	8	225
Попит	100	130	80	190	

39.

Пункт постав- чання	Витрати на перевезення одиниці вантажу до пункту споживання				Обсяг запасів продукції
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	5	4	4	2	260
$A_2$	4	6	3	7	180
$A_3$	8	2	5	9	200
Попит	180	160	210	180	

40.

Пункт постав- чання	Витрати на перевезення одиниці вантажу до пункту споживання				Обсяг запасів продукції
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	3	3	2	4	180
$A_2$	5	3	1	2	60
$A_3$	2	1	4	2	80
Попит	120	40	50	80	

**Задачі 41–50**

Знайти мінімум функції  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , де  $a, b, c$  — задані чис-  
ла.

41.  $a = 1, b = 2, c = 3.$

42.  $a = 6, b = 4, c = 2.$

43.  $a = 3, b = 9, c = 1.$

44.  $a = 2, b = 6, c = 7.$

45.  $a = 5, b = 3, c = 8.$

46.  $a = 2, b = 8, c = 9.$

47.  $a = 3, b = 1, c = 5.$

48.  $a = 4, b = 1, c = 7.$

49.  $a = 5, b = 4, c = 3.$

50.  $a = 1, b = 4, c = 5.$

### Задачі 51–60

Знайти мінімум функції  $f(x,y) = \frac{a}{x^2 + y^2}$  за умови  $x^2 + y^2 - b \leq 0$ ,  $x - y = 0$  при наведених значеннях  $a$  і  $b$ .

51.  $a = 2$ ,  $b = 6$ .

52.  $a = 3$ ,  $b = 9$ .

53.  $a = 4$ ,  $b = 3$ .

54.  $a = 6$ ,  $b = 8$ .

55.  $a = 5$ ,  $b = 6$ .

56.  $a = 2$ ,  $b = 8$ .

57.  $a = 7$ ,  $b = 4$ .

58.  $a = 4$ ,  $b = 5$ .

59.  $a = 8$ ,  $b = 9$ .

60.  $a = 6$ ,  $b = 3$ .

### СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

#### Основна

1. Вагнер Г. Основы исследования операций: В 3 т. — М.: Мир, 1972. — Т. 1; 1973. — Т. 2, 3.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций. — М.: Сов. радио, 1972.
3. Карманов В. Г. Математическое программирование. — М.: Наука, 1980.
4. Кулян В. Р., Юнькова Е. А., Жильцов А. Б. Математическое программирование (с элементами информационных технологий). — К.: МАУП, 2000.
5. Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З. Линейное и нелинейное программирование. — К.: Выща шк., 1975.
6. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.
7. Ржевський С. В. Елементи теорії дослідження операцій. — К., 1999.
8. Энциклопедия кибернетики / Отв. ред. В. М. Глушков. — К.: Глав. ред. УСЭ, 1974. — Т. 1; Т. 2.

#### Додаткова

9. Акулч И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1986.



10. *Архангельский Ю. С., Коваленко И. И.* Межотраслевой баланс. — К.: Выща шк., 1988.
11. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984.
12. *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. — К.: Выща шк., 1983.
13. *Глушков В. М.* Введение в АСУ. — К.: Тэхника, 1974.
14. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Новые направления в линейном программировании. — М.: Сов. радио, 1966.
15. *Дубров А. М., Лагоша Б. А., Хрусталеv Е. Ю.* Моделирование рисковvх ситуаций в экономике и бизнесе: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 1999.
16. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976.
17. *Жданов С. А.* Экономические модели и методы в управлении. — М.: Дело и сервис, 1998.
18. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике. — М.: ДИС, 1997.
19. *Канторович Л. В., Горстко А. Б.* Оптимальные решения в экономике. — М.: Наука, 1972.
20. *Канторович Л., Лассман В., Шилар Х., Шварц К., Брентьес С.* Экономика и оптимизация. — М.: Наука, 1990.
21. *Костіна Н. І., Алексеев А. А., Василик О. Д.* Фінансове прогнозування: методи та моделі. — К.: Знання, 1997.
22. *Костіна Н. І., Алексеев А. А., Василик О. Д.* Фінанси: система моделей і прогнозів: Навч. посіб. — К.: Четверта хвиля, 1998.
23. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. — М.: Высш. шк., 1976.
24. *Монсен Л.* Использование Microsoft Excel 97. — К.; М.; СПб.: Издат. дом “Вильямс”, 1998.
25. *Моисеев Н. Н.* Математик задает вопросы. — М.: Знание, 1974.
26. *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. — М.: Наука, 1979.
27. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. — М.: Мир, 1984.
28. *Орвис В.* EXCEL для ученых, инженеров и студентов. — К.: Юниор, 1999.
29. *Плис А. И., Сливина Н. А.* MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 1999.

30. *Ржевский С. В.* Монотонные методы выпуклого программирования. — К.: Наук. думка, 1993.
31. *Хазанова Л. Э.* Математическое моделирование в экономике: Учеб. пособие. — М.: БЕК, 1998.
32. *Унковская Т. Э.* Финансовое равновесие предприятия. — К.: Генеза, 1997.
33. *Экланд И.* Элементы математической экономики. — М.: Мир, 1983.



## *ЗМІСТ*

Пояснювальна записка .....	3
Навчально-тематичний план вивчення дисципліни “Математичне програмування” .....	4
Програмний матеріал до вивчення дисципліни “Математичне програмування” .....	5
Завдання для самостійної роботи .....	7
Контрольні питання .....	13
Вказівки до виконання контрольної роботи .....	15
Задачі для контрольних робіт .....	15
Список рекомендованої літератури .....	24

Відповідальний за випуск  
Редактор  
Комп’ютерна верстка

*Н. В. Медведєва*  
*Л. М. Гримаська*  
*Т. Г. Замура*

**МАУП**

Зам. № ВКЦ-730

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)  
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП