МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до розв’язання задач з дисципліни

“ТЕОРІЯ СИСТЕМ І СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ”

Київ 2000

Підготовлено кандидатом фізико-математичних наук, доцентом
М. Г. Семейко

Затверджено на засіданні кафедри математики
(Протокол № 1 від 12.07.2000)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Семейко М. Г. Методичні рекомендації до розв'язання задач з дисципліни "Теорія систем і системний аналіз". — К.: МАУП, 2000. — 43 с.

Навчально-методична розробка містить пояснювальну записку, методичні рекомендації до розв'язання задач з дисципліни "Теорія систем і системний аналіз", а також список рекомендованої літератури.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Останнім часом теорія систем (ТС) і системний аналіз (СА) як загальна методологія цілеспрямованої діяльності здобули визнання у прикладних науково-технічних дисциплінах. Методи ТС і СА також почали застосовувати в управлінні організаціями та прийнятті рішень, що стосуються адміністративних, фінансових та виробничих проблем.

Важливим фактором засвоєння дисципліни “Теорія систем і системний аналіз” є самостійна робота студента. З огляду на розширення сфери впливу методів ТС і СА у Програмі вивчення зазначеної дисципліни [12] наведені п’ять системних контрольних завдань для самостійної роботи студентів різних форм навчання. Пропоновані методичні рекомендації до розв’язання задач з ТС і СА є доповненням до Програми. У рекомендаціях стисло викладено питання теорії і практики розв’язання контрольних завдань, наведених у Програмі [12].

Методичні рекомендації складаються з трьох параграфів. На початку кожного параграфа наводяться основні визначення, формули, теоретичні положення, що стосуються виконання відповідних контрольних завдань. Матеріал ілюструється схемами та рисунками. Далі подано зразки розв’язання типових контрольних завдань.

§ 1. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ

1.1. Метод простору станів

У сучасній теорії динамічних систем (ДС) аналіз і синтез базуються на розв'язанні (інтегруванні) диференціальних рівнянь, що описують еволюцію ДС у деякій стандартній формі. Такою формою є система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що подається у векторно-матричній формі [7; 11]. Стандартна форма запису становить суттєвий інтерес, тому що методи і алгоритми, які застосовують для розв'язання одного диференціального рівняння першого порядку, неважко поширити на систему рівнянь, приведених до векторно-матричного вигляду. Тому зазначені методи та алгоритми можна застосовувати до аналізу ДС, описаних звичайними диференціальними рівняннями довільного порядку, а також диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Означення 1. Змінними стану ДС у момент часу t є мінімальний набір змінних або чисел $x_1(t)$, ..., $x_i(t)$, ..., $x_n(t)$, який містить інформацію про передісторію системи, достатню для повного визначення її поведінки в теперішній та майбутній моменти часу при відомих збуреннях $u_k(t)(k=\overline{1,m})$, що діють у поточний момент часу.

Означення 2. Рівняння, що описують поведінку динамічної системи термінами змінних стану та визначають усю зазначену інформацію, називаються рівняннями стану, а теоретичний підхід до аналізу системи, що грунтується на використанні рівнянь стану, називають методом простору станів.

Розглянемо блок-схему функціонування ДС (рис. 1.1), яка має m входів $u_k(t)(k=\overline{1,m})$, n станів $x_i(t)(i=\overline{1,n})$ та r виходів $y_p(t)(p=\overline{1,r})$, що змінюються в часі t.

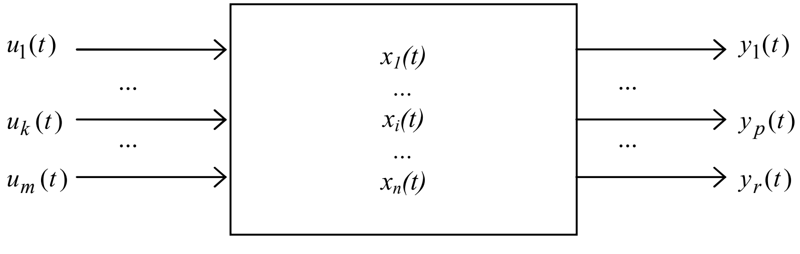


Рис. 1.1

Запишемо нормальну систему звичайних диференціальних рівнянь, що визначає поведінку ДС у часі [5; 7]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t),\ldots,x_i(t),\ldots,x_n(t),\ u_1(t),\ldots,u_k(t),\ldots,u_m(t)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t),\ldots,x_i(t),\ldots,x_n(t),\ u_1(t),\ldots,u_k(t),\ldots,u_m(t)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1(t),\ldots,x_i(t),\ldots,x_n(t),\ u_1(t),\ldots,u_k(t),\ldots,u_m(t)); \end{cases} \quad (1.1)$$

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ldots,x_i(t_0) = x_i^0,\ldots,x_n(t_0) = x_n^0; \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t),\ldots,x_i(t),\ldots,x_n(t),\ u_1(t),\ldots,u_k(t),\ldots,u_m(t)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t),\ldots,x_i(t),\ldots,x_n(t),\ u_1(t),\ldots,u_k(t),\ldots,u_m(t)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r(t) = g_r(x_1(t),\ldots,x_i(t),\ldots,x_n(t),\ u_1(t),\ldots,u_k(t),\ldots,u_m(t)), \end{cases} \quad (1.3)$$

де $x_i(t)(i=\overline{1,n})$ — *i*-й стан динамічного процесу;

$u_k(t)(k=\overline{1,m})$ — *k*-й зовнішній керуючий вплив, прикладений до процесу;

$y_p(t)(p=\overline{1,r})$ — *p*-те вимірювання;

$\{f_i : i=\overline{1,n}\}$, $\{g_p : p=\overline{1,r}\}$ — деякі задані функції змінних $\{x_i(t) : i=\overline{1,n}\}$ та $\{u_k(t) : k=\overline{1,m}\}$;

$x_i^0(i=\overline{1,n})$ — початкова умова: стан змінної $x_i(t)$ у початковий момент часу $t_0(t_0=0)$.

Система (1.1) визначає стан, а система (1.3) — вимірювання досліджуваного процесу.

Означення 3. Динамічна система вважається лінійною, якщо функції $f_i(i=\overline{1,n})$ і $g_p(p=\overline{1,r})$ є лінійними комбінаціями станів $x_1(t),\ldots,x_n(t)$

і зовнішніх впливів $u_1(t),...,u_m(t)$ динамічного процесу:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}(t)x_j(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{1k}(t)u_k(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}(t)x_j(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{nk}(t)u_k(t); \end{cases}, \qquad (1.4)$$

$$x_1(t_0) = x_1^0,...,x_i(t_0) = x_i^0,...,x_n(t_0) = x_n^0; \qquad (1.5)$$

$$\begin{cases} y_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{1j}(t)x_j(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} d_{1k}(t)u_k(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_r(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{rj}(t)x_j(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} d_{rk}(t)u_k(t), \end{cases} \qquad (1.6)$$

де $\left\{a_{ij}(t): i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}\right\}$; $\left\{b_{ik}(t): i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,m}\right\}$;

$\left\{c_{pj}(t): p = \overline{1,r};\ j = \overline{1,n}\right\}$; $\left\{d_{pk}(t): p = \overline{1,r};\ k = \overline{1,m}\right\}$ — змінні в часі коефіцієнти ДС.

Система (1.4)–(1.6) у векторно-матричній формі описується співвідношеннями

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt} = A(t)\overline{X}(t) + B(t)\overline{U}(t); \qquad (1.7)$$

$$\overline{X}(t_0) = \overline{X}^0; \qquad (1.8)$$

$$\overline{Y}(t) = C(t)\overline{X}(t) + D(t)\overline{U}(t), \qquad (1.9)$$

де $\overline{X}(t)$ — вектор-стовпець станів; $\overline{X}^0$ — вектор-стовпець початкових умов; $\overline{U}(t)$ — вектор-стовпець входів (керувань); $\overline{Y}(t)$ — вектор-стовпець вимірювань; $A(t)$ — матриця станів; $B(t)$ — матриця керувань; $C(t)$, $D(t)$ — матриці, що показують, як змінні стану $\overline{X}(t)$ та вхідні змінні $\overline{U}(t)$ безпосередньо діють на вихідні змінні $\overline{Y}(t)$:

$$\overline{X}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ \dots\\ x_i(t)\\ \dots\\ x_n(t)\end{pmatrix},\quad \overline{X}^0=\begin{pmatrix} x_1^0\\ \dots\\ x_i^0\\ \dots\\ x_n^0\end{pmatrix},\quad \overline{U}(t)=\begin{pmatrix} u_k(t)\\ \dots\\ u_k(t)\\ \dots\\ u_m(t)\end{pmatrix},\quad \overline{Y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ \dots\\ y_p(t)\\ \dots\\ y_r(t)\end{pmatrix},$$

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t)\dots a_{1n}(t)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}(t)\dots a_{nn}(t)\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix} b_{11}(t)\dots b_{1m}(t)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ b_{n1}(t)\dots b_{nm}(t)\end{pmatrix},$$

$$C(t)=\begin{pmatrix} c_{11}(t)\dots c_{1n}(t)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ c_{r1}(t)\dots c_{rn}(t)\end{pmatrix},\quad D(t)=\begin{pmatrix} d_{11}(t)\dots d_{1m}(t)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ d_{r1}(t)\dots d_{rm}(t)\end{pmatrix}.$$

Означення 4. Динамічна система вважається лінійною і стаціонарною, якщо елементи матриць $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ і $D(t)$ є постійними величинами:

$$A(t)=A=\left\{a_{ij}: i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}\right\},\quad B(t)=B=\left\{b_{ik}(t): i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m}\right\},$$

$$C(t)=C=\left\{c_{pj}: p=\overline{1,r};\ j=\overline{1,n}\right\},\quad D(t)=D=\left\{d_{pk}: p=\overline{1,r};\ k=\overline{1,m}\right\};$$

лінійна стаціонарна динамічна система у векторно-матричній формі описується співвідношеннями

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt}=A\overline{X}(t)+B\overline{U}(t);\tag{1.10}$$

$$\overline{X}(t_0)=\overline{X}^0;\tag{1.11}$$

$$\overline{Y}(t)=C\overline{X}(t)+D\overline{U}(t).\tag{1.12}$$

Зауваження 1. Співвідношення (1.7)–(1.9) і (1.10)–(1.12) описують вимушений рух лінійної динамічної системи.

Означення 5. Якщо у формулах (1.7), (1.10) покласти $\overline{U}(t)=\overline{0}$, то одержимо однорідні системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt}=A(t)\overline{X}(t);\tag{1.13}$$

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt}=A\overline{X}(t),\tag{1.14}$$

що описують вільний рух лінійної динамічної системи.

1.2. Вільний рух лінійної стаціонарної динамічної системи

Розглянемо вільний рух лінійної стаціонарної ДС з початкового моменту часу $t_0 = 0$:

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt} = A\overline{X}(t)\,; \tag{1.15}$$

$$\overline{X}(t_0) = \overline{X}(0) = \overline{X}^0\,. \tag{1.16}$$

Розв'язком однорідної системи диференціальних рівнянь (1.15) з початковою умовою (1.16) [7] є

$$\overline{X}(t) = \Phi(t)\overline{X}^0\,, \tag{1.17}$$

де

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{array}{c} (\overline{S}_1(t)\ldots\ \overline{S}_i(t)\ \ldots\ \overline{S}_n(t)) \\ \hline \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t)\ldots\Phi_{1i}(t)\ldots\Phi_{1n}(t) \\ \Phi_{21}(t)\ldots\Phi_{2i}(t)\ldots\Phi_{2n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{n1}(t)\ldots\Phi_{ni}(t)\ldots\Phi_{nn}(t) \end{pmatrix} \end{array} = (\overline{S}_1(t)\ldots\overline{S}_i(t)\ldots\overline{S}_n(t))$$

— перехідна (фундаментальна) матриця системи; $\overline{S}_1(t),\ldots,\overline{S}_n(t)$ — стовпці матриці $\Phi(t)$.

То-

ді $\overline{X}(t) = \Phi(t)\overline{X}^0 = e^{At}\overline{X}^0 = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t)x_1^0 + \ldots + \Phi_{1i}(t)x_i^0 + \ldots + \Phi_{1n}(t)x_n^0 \\ \Phi_{21}(t)x_1^0 + \ldots + \Phi_{2i}(t)x_i^0 + \ldots + \Phi_{2n}(t)x_n^0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{n1}(t)x_1^0 + \ldots + \Phi_{ni}(t)x_i^0 + \ldots + \Phi_{nn}(t)x_n^0 \end{pmatrix}$

(1.18)

Матриця $\Phi(t)$ має такі властивості [10]:

1) $Ae^{At} = e^{At}A$;
2) $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$, де A, B — матриці однакової розмірності;
3) $e^{At_0} = \mathrm{E}(t_0 = 0)$, де Е — одинична матриця розмірності $n \times n$ [10];
4) $\dfrac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$ [6].

За допомогою чотирьох зазначених властивостей легко перевірити справедливість співвідношення (1.17). Його задовольняє початкова умова:

$$\overline{X}^0 = \overline{X}(0) = \overline{X}(t)\Big|_{t_0=0} = e^{At}\overline{X}_0\Big|_{t_0=0} = e^{A\cdot 0}\overline{X}^0 = \mathrm{E}\overline{X}^0 = \overline{X}^0.$$

Підставляючи (1.18) у рівняння (1.15) і використовуючи властивість 4), одержуємо тотожність

$$Ae^{At}\overline{X}^0 = \frac{d}{dt}(e^{At}\overline{X}^0) = Ae^{At}\overline{X}^0,$$

звідки випливає, що (1.17) насправді є розв'язком рівняння (1.15).

Таким чином, вільний рух лінійної системи визначається початковою умовою $\overline{X}^0$ та фундаментальною матрицею $\Phi(t)$.

Зауваження 2. Якщо динамічна система (1.15) одновимірна ($n = 1$, $\overline{X}(t) = x(t)$, $A = a$, $\overline{X}^0 = x^0$), то з (1.15)–(1.18) одержуємо значно простіші співвідношення, які описують вільний рух одновимірної лінійної стаціонарної системи:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t); \tag{1.19}$$

$$x(0) = x^0; \tag{1.20}$$

$$x(t) = x^0 e^{at} \quad (a = \mathrm{const},\ x^0 = \mathrm{const}). \tag{1.21}$$

1.3. Розрахунок перехідної матриці системи

Вважатимемо в (1.18), що вектор-стовпець початкових умов

$$\overline{X}^0 = \overline{X}_i^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \dots \\ x_{i-1}^0 \\ x_i^0 \\ x_{i+1}^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тоді з формули (1.18) одержимо

$$\overline{X}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Phi_{1i}(t) \\ \Phi_{2i}(t) \\ \dots \\ \Phi_{ni}(t) \end{pmatrix}=\overline{S}_i(t).$$

Таким чином, вказана початкова умова (1.22) дає реакцію $\overline{X}(t)$, яка є i-м стовпцем $\overline{S}_i(t)$ фундаментальної матриці $\Phi(t)$. Іншими словами, i-й стовпець $\overline{S}_i(t)$ матриці $\Phi(t)$ є вектором реакції системи (задовольняє систему (1.15)) за початкової умови $\overline{X}_i^0$ $(i=\overline{1,n})$:

$$\frac{d\overline{S}_i(t)}{dt}=A\overline{S}_i(t),\ \overline{S}_i(0)=\overline{X}_i^0. \tag{1.23}$$

1.4. Вимушений рух лінійної стаціонарної динамічної системи

Розглянемо рівняння стану для збуреної системи вигляду (1.10), (1.11):

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt}=A\overline{X}(t)+B\overline{U}(t),\ \ \overline{X}_0=\overline{X}^0. \tag{1.24}$$

Помноживши обидві частини цього співвідношення на e^{-At}, отримаємо

$$e^{-At}\frac{d\overline{X}(t)}{dt}-e^{-At}A\overline{X}(t)=e^{-At}B\overline{U}(t).$$

Ліва частина цього співвідношення є похідною від $e^{-At}\overline{X}(t)$. Тому

$$e^{-At}\frac{d\overline{X}(t)}{dt}-e^{-At}A\overline{X}(t)=\frac{d}{dt}\left[e^{-At}\overline{X}(t)\right]=e^{-At}B\overline{U}(t).$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння від 0 до t та враховуючи, що $e^{-A0}=\mathrm{E}$, отримуємо

$$e^{-At}\overline{X}(t)=\mathrm{E}\overline{X}(0)+\int_0^t e^{-A\tau}B\overline{U}(\tau)d\tau,\ \tau\in[o,t].$$

Нарешті, помноживши зліва кожний елемент рівності на e^{At}, отримаємо розв’язок:

$$\overline{X}(t)=e^{At}\overline{X}^0+e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}B\overline{U}(\tau)d\tau. \tag{1.25}$$

Перший доданок співвідношення (1.25) є вільною реакцією системи $\overline{X}_{\text{в}}(t)$ при $\overline{U}(t) = 0$. Другий доданок — примушуюча складова $\overline{X}_{\text{пр}}(t)$.

Зауваження 3. Якщо ДС (1.24) одновимірна ($n = 1$, $\overline{X}(t) = x(t)$, $\overline{X}^0 = x^0$, $\overline{U}(t) = u(t)$, $A = a$, $B = b$), то з (1.24), (1.25) одержуємо значно простіші співвідношення, що описують вимушений рух одновимірної лінійної стаціонарної системи:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t), \; x(0) = x^0; \tag{1.26}$$

$$x(t) = e^{at}x^0 + e^{at}\int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau)\, d\tau, \tag{1.27}$$

де a, b, x^0 — сталі величини.

1.5. Контрольні завдання

Завдання 1. Розрахунки перехідної матриці системи міжрегіональної міграції

Розглянемо модель процесу міжрегіональної міграції. Є два регіони R_1 і R_2, наприклад "центр" і "периферія", з чисельністю населення відповідно $x_1(t)$ і $x_2(t)$ у момент часу t. Нехай $V_1 = 2{,}25$ і
$V_2 = 0{,}75$ — інтегральні рівні життя в R_1 і R_2 (кількість життєвих благ у вартісному вираженні). Інтенсивність міграції з R_1 у R_2 вважатимемо пропорційною чисельності $x_1(t)$ та рівню життя V_2. Аналогічні припущення зробимо щодо інтенсивності міграції з R_2 у R_1. Припускається, що $k_1 = –0{,}005$ і $k_2 = –0{,}015$ — коефіцієнти приросту населення в регіонах відповідно R_1 і R_2.

Математична модель системи міжрегіональної міграції записується у вигляді [7]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -\lambda[V_2 x_1(t) - V_1 x_2(t)] + k_1 x_1(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = \lambda[V_2 x_1(t) - V_1 x_2(t)] + k_2 x_2(t) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (-\lambda V_2 + k_1)x_1(t) + \lambda V_1 x_2(t), \\ \lambda V_2 x_1(t) + (-\lambda V_1 + k_2)x_2(t), \end{cases} \tag{1.28}$$

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \tag{1.29}$$

де $\lambda = 0{,}85$ — коефіцієнт інтенсивності міграції ($\lambda = \mathrm{const}>0$);

(1.29) — початкова умова: чисельність населення в регіонах R_1 і R_2 в початковий момент часу t_0 ($t_0 = 0$).

Система (1.28) — однорідна лінійна система диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами відносно двох невідомих функцій: $x_1(t)$ і $x_2(t)$. Система (1.28) з початковою умовою (1.29) для незмінних з часом коефіцієнтів λ, V_1, V_2 у векторно-матричній формі описується співвідношеннями

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt} = A\overline{X}(t), \quad \overline{X}(t_0) = \overline{X}^0, \tag{1.30}$$

де $\overline{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ — вектор-стовпець станів системи;

$A = \begin{pmatrix} -\lambda V_2 + k_1 & \lambda V_1 \\ \lambda V_2 & -\lambda V_1 + k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матриця коефіцієнтів системи;

$\overline{X}^0 = \begin{pmatrix} x_1{}^0 \\ x_2{}^0 \end{pmatrix}$ — вектор-стовпець початкових станів системи.

Розв'язком однорідної системи диференціальних рівнянь (1.28) з початковою умовою (1.29) є

$$\overline{X}(t) = \Phi(t)\overline{X}(t_0),$$

де $\Phi(t) = \overbrace{\begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{pmatrix}}^{(\overline{S}_1(t) \quad \overline{S}_2(t))} = (\overline{S}_1(t) \quad \overline{S}_2(t))$ — перехідна (фундаментальна) матриця системи (1.28).

1. Розрахувати перехідну (фундаментальну) матрицю $\Phi(t)$ системи (1.28).
2. Побудувати діаграми елементів $\Phi_{11}(t)$, $\Phi_{12}(t)$, $\Phi_{21}(t)$, $\Phi_{22}(t)$ перехідної матриці $\Phi(t)$ системи (1.28).

Розв'язання

Відповідно до формули (1.23) стовпці

$$\overline{S}_1(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) \\ \Phi_{21}(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{S}_2(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{22}(t) \end{pmatrix}$$

перехідної матриці системи (1.30) відповідно є розв'язками таких систем диференціальних рівнянь:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Phi_{11}(t)\\ \Phi_{21}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{11}(t)\\ \Phi_{21}(t)\end{pmatrix},\quad \left.\begin{pmatrix}\Phi_{11}(t)\\ \Phi_{21}(t)\end{pmatrix}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases}\dfrac{d\Phi_{11}(t)}{dt}=a_{11}\Phi_{11}(t)+a_{12}\Phi_{21}(t),\\ \dfrac{d\Phi_{21}(t)}{dt}=a_{21}\Phi_{11}(t)+a_{22}\Phi_{21}(t),\end{cases}\tag{1.32}$$

$$\Phi_{11}(0)=1,\quad \Phi_{21}(0)=0\ ;\tag{1.33}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Phi_{12}(t)\\ \Phi_{22}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{12}(t)\\ \Phi_{22}(t)\end{pmatrix},\quad \left.\begin{pmatrix}\Phi_{12}(t)\\ \Phi_{22}(t)\end{pmatrix}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases}\dfrac{d\Phi_{12}(t)}{dt}=a_{11}\Phi_{12}(t)+a_{12}\Phi_{22}(t),\\ \dfrac{d\Phi_{22}(t)}{dt}=a_{21}\Phi_{12}(t)+a_{22}\Phi_{22}(t),\end{cases}\tag{1.34}$$

$$\Phi_{12}(0)=0,\quad \Phi_{22}(0)=1\ .\tag{1.35}$$

Для розв'язання системи (1.32) використаємо метод Л. Ейлера [5, с. 162]. Суть його полягає в тому, що частинний розв'язок системи (1.32) відшукуємо у такому вигляді:

$$\Phi_{11}(T)=A_1e^{rt},\quad \Phi_{21}(t)=A_2e^{rt}\ ,\tag{1.36}$$

де r, A_1, A_2 — невідомі константи.

Якщо підставити ці вирази в систему (1.32), дістанемо

$$\begin{cases}A_1re^{rt}=a_{11}A_1e^{rt}+a_{12}A_2e^{rt},\\ A_2re^{rt}=a_{21}A_1e^{rt}+a_{22}A_2e^{rt},\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}(a_{11}-r)A_1+\qquad a_{12}A_2=0,\\ \qquad a_{21}A_1+(a_{22}-r)A_2=0,\end{cases}\tag{1.37}$$

$$\begin{cases}(-lV_2+k_1-r)A_1+\qquad lV_1A_2=0,\\ \qquad lV_2A_1+(-lV_1+k_2-r)A_2=0.\end{cases}\tag{1.38}$$

Однорідна система лінійних рівнянь (1.37) має ненульові розв'язки A_1, A_2 [6], коли визначник (характеристичне рівняння)

$$\Delta(r)=\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-r \end{vmatrix}=0\,.$$

Після елементарних перетворень одержимо

$$\Delta(r)=r^2-(a_{11}+a_{22})r+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0\,. \qquad (1.39)$$

Підставляючи значення елементів $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ матриці A в рівняння (1.39), дістаємо квадратне рівняння відносно r:

$$r^2-\left[k_1+k_2-\lambda(V_1+V_2)\right]r+\left[k_1k_2-\lambda(k_1V_1+k_2V_2)\right]=0.$$

Ураховуючи числові значення параметрів $\lambda,\ V_1,\ V_2,\ k_1,\ k_2$, одержуємо

$$r^2+2{,}57r+0{,}0192=0.$$

Звідси $r_1=-2{,}5625$; $r_2=-0{,}0075$. Якщо значення $r_1,\ r_2$ і $\lambda,\ V_1,\ V_2,\ k_1,\ k_2$ підставимо в (1.38), одержимо дві системи лінійних рівнянь відносно констант A_1, A_2:

$$\begin{cases} 1{,}92A_1+1{,}9125A_2=0, \\ 0{,}6375A_1+0{,}635A_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -0{,}635A_1+1{,}9125A_2=0, \\ 0{,}6375A_1-1{,}92A_2=0 \end{cases}$$

при $r_1=-2{,}5625$; при $r_2=-0{,}0075$.

Поклавши в першій системі $A_1 = 1$, знаходимо $A_2 \approx -1{,}0039$. Відповідний частинний розв'язок системи (1.32) одержуємо з (1.36):

$$\Phi_{11}^1(t)=e^{-2{,}5625t}, \qquad \Phi_{21}^1(t)=-1{,}0039e^{-2{,}5625t}.$$

Якщо у другій системі покласти $A_1 = 1$, одержимо $A_2 \approx 0{,}332$ і відповідний частинний розв'язок:

$$\Phi_{11}^2(t)=e^{-0{,}0075t}, \qquad \Phi_{21}^2(t)=0{,}332e^{-0{,}0075t}.$$

Отже, загальний розв'язок системи (1.32) матиме вигляд [5]

$$\Phi_{11}(t)=C_1\Phi_{11}^1(t)+C_2\Phi_{11}^2(t)=C_1e^{-2{,}5625t}+C_2e^{-0{,}0075t}, \qquad (1.40)$$

$$\Phi_{21}(t)=C_1\Phi_{21}^1(t)+C_2\Phi_{21}^2(t)=$$

$$=-1{,}0039C_1e^{-2{,}5625t}+0{,}332C_2e^{-0{,}0075t}, \qquad (1.41)$$

де C_1, C_2 — довільні константи.

Застосуємо початкові умови (1.33) до співвідношень (1.40) і (1.41):

$$\begin{cases} 1 = \Phi_{11}(0) = \Phi_{11}(t)\big|_{t=0} = (C_1 e^{-2,5625t} + C_2 e^{-0,0075t})\big|_{t=0} = C_1 + C_2, \\ 0 = \Phi_{21}(0) = \Phi_{21}(t)\big|_{t=0} = (-1,0039 C_1 e^{-2,5625t} + 0,332 C_2 e^{-0,0075t})\big|_{t=0} = \\ \qquad = -1,0039 C_1 + 0,332 C_2, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -1,0039 C_1 + 0,332 C_2 = 0. \end{cases}$$

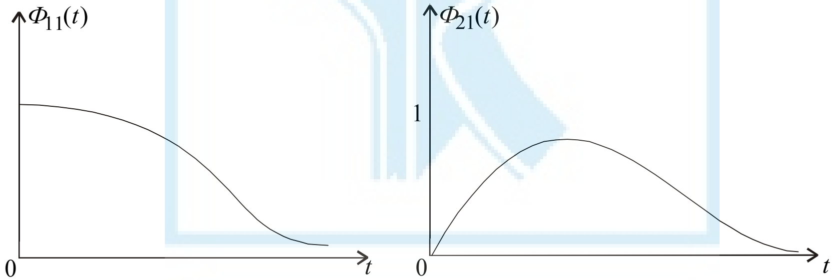
Звідси

$$C_1 \approx 0,249, \quad C_2 \approx 0,751. \qquad (1.42)$$

Підставляючи (1.42) у (1.40), (1.41), одержуємо перший стовпець $\overline{S}_1(t)$ фундаментальної матриці *Ф(t)*:

$$\overline{S}_1(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) \\ \Phi_{21}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,249 e^{-2,5625t} + 0,751 e^{-0,0075t} \\ -0,249 e^{-2,5625t} + 0,249 e^{-0,0075t} \end{pmatrix}.$$

Діаграми функцій $\Phi_{11}(t)$ і $\Phi_{21}(t)$ зображені на рис. 1.2.



а Рис. 1.2 *б*

Виконавши аналогічні обчислення, одержимо загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь (1.34):

$$\Phi_{12}(t) = C_3 e^{-2,5625t} + C_4 e^{-0,0075t}, \qquad (1.43)$$

$$\Phi_{22}(t) = -1,0039 C_3 e^{-2,5625t} + 0,332 C_4 e^{-0,0075t}, \qquad (1.44)$$

де C_3, C_4 — довільні константи.

Застосовуємо початкові умови (1.35) до співвідношень (1.43) і (1.44):

$$\begin{cases} C_3 + C_4 = 0, \\ -1,0039 C_3 + 0,332 C_4 = 1. \end{cases}$$

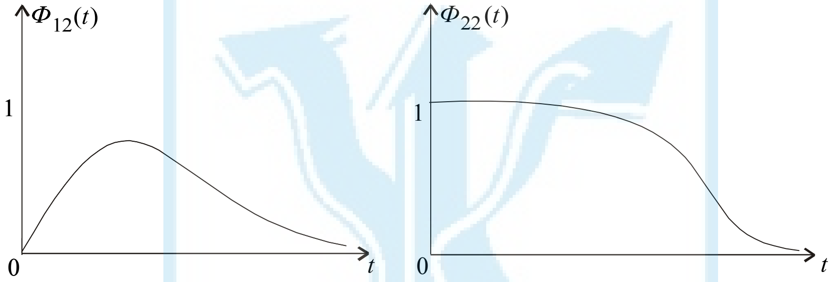
Звідси

$$C_3 \approx -0{,}749, \qquad C_4 \approx 0{,}749. \qquad (1.45)$$

Підставляючи (1.45) у (1.43), (1.44), одержуємо другий стовпець $\overline{S}_2(t)$ фундаментальної матриці $\Phi(t)$:

$$\overline{S}_2(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}749e^{-2{,}5625t} + 0{,}749e^{-0{,}0075t} \\ 0{,}752e^{-2{,}5625t} + 0{,}249e^{-0{,}0075t} \end{pmatrix}.$$

Діаграми функцій $\Phi_{12}(t)$ і $\Phi_{22}(t)$ зображені на рис. 1.3.



в Рис. 1.3 *г*

Завдання 2. Побудова діаграми вимушеного руху керованої лінійної системи

Розглянемо лінійну стаціонарну динамічну систему, що має один вхід $u(t)$, один стан $x(t)$ та один вихід $y(t)$ (рис. 1.4).

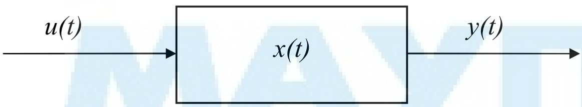


Рис. 1.4

Динамічний процес описується співвідношеннями (п. 1.4)

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t), \qquad x(t_0) = x^0, \qquad (1.46)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t), \qquad (1.47)$$

де $x^0 = -2$ — початковий стан динамічного процесу $x(t)$ у початковий момент часу t_0 ($t_0 = 0$);

$u(t)=e^{3t}$ — керуючий вплив, прикладений до досліджуваного процесу в момент часу t;

$a=-1{,}5$; $b=1{,}5$.

1. Розрахувати перехідний процес $x(t)$ для рівняння стану вигляду (1.46).

2. Побудувати діаграму перехідного процесу $x(t)$ у декартовій системі координат.

Розв'язання

Оскільки динамічна система (1.46) одновимірна, то перехідний процес $x(t)$ обчислюємо за допомогою формули (1.27)

$$x(t)=-2e^{-1,5t}+e^{-1,5t}\int_0^t 1{,}5e^{1,5\tau}e^{3\tau}d\tau=-2e^{-1,5t}+1{,}5e^{-1,5t}\int_0^t e^{4,5\tau}d\tau=$$

$$=-2e^{-1,5t}+\frac{1}{3}(e^{3t}-e^{-1,5t})=x_{\text{в}}(t)+x_{\text{пр}}(t),$$

де $x_{\text{в}}(t)$ — вільна реакція системи, $x_{\text{в}}(t)=-2e^{-1,5t}$; $x_{\text{пр}}(t)$ — примушуюча складова, $x_{\text{пр}}(t)=\frac{1}{3}(e^{3t}-e^{-1,5t})$.

Діаграму перехідного процесу $x(t)$ зображено на рис. 1.5.

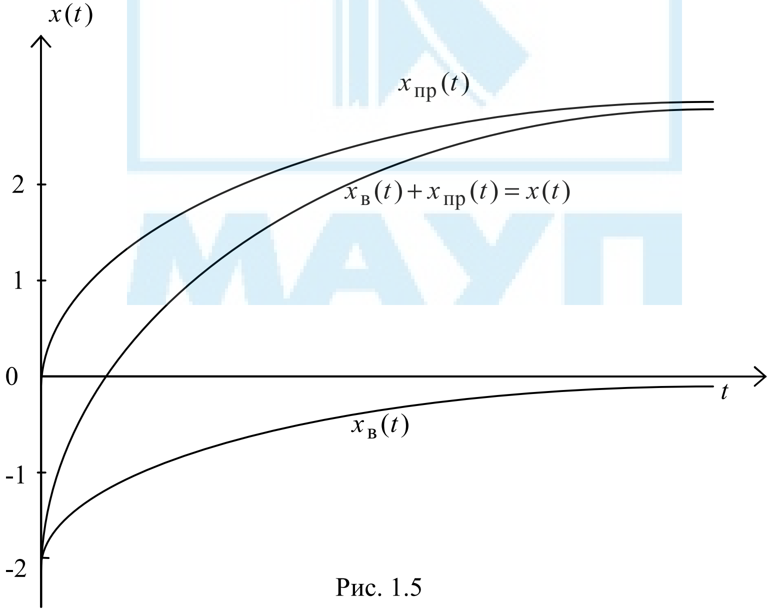


Рис. 1.5

Завдання 3. Дослідження динаміки вільного розвитку односекторної економіки за допомогою замкненої однопродуктової моделі Леонтьєва

Розглянемо модель економіки, що є декомпозицією (розукрупненням) загальної (агрегованої) вербальної моделі. Нехай підсистема виробництва F випускає продукцію тільки одного типу $x(t)$ (так звана однопродуктова, або односекторна модель) [9].

Фактори, що характеризують виробничий процес у довільний момент часу t, зображено на рис. 1.6.

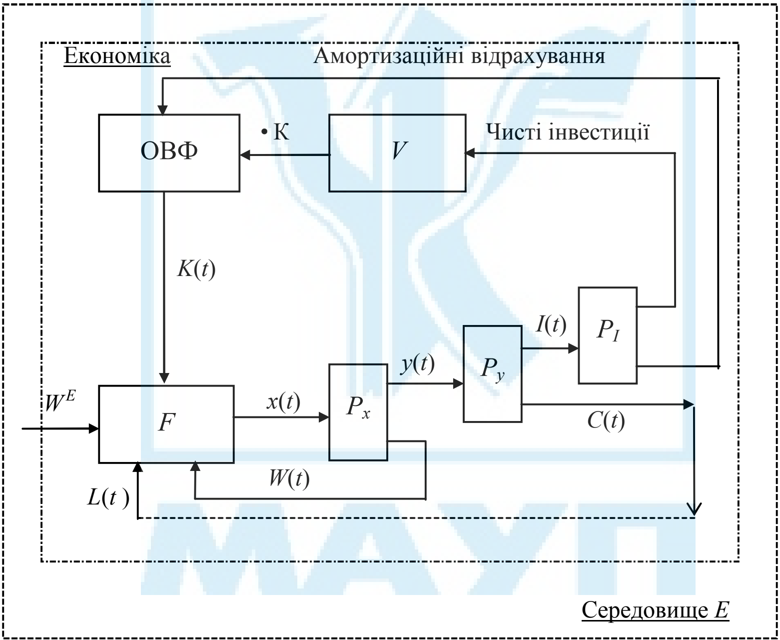


Рис. 1.6. Модель односекторної економіки:

$x(t)$ — валовий продукт підсистеми виробництва F;
$W(t)$ — виробниче споживання частини валового продукту;
$y(t)$ — кінцевий продукт;
$I(t)$ — інвестиції (валові капітальні вкладення);
$C(t)$ — невиробниче споживання.
$L(t)$ — трудові ресурси (праця);

$K(t)$ — виробничий капітал;

ОВФ — основні виробничі фонди;

W^E — природні ресурси;

P_x, P_y, P_I — блоки розподілу відповідно валового продукту $x(t)$, кінцевого продукту $y(t)$ та інвестицій $I(t)$.

Вважатимемо таке:

1) виробничі витрати $W(t)$ пропорційні випуску валової продукції $x(t)$:

$$W(t) = a(t)\,x(t);$$

2) усі валові інвестиції $I(t)$ спрямовані на введення в дію нових ОВФ, причому приріст випуску валової продукції $\bullet x(t)$ пропорційний інвестиціям:

$$I(t) = \bullet(t)\ \bullet x(t);$$

3) невиробниче споживання $C(t)$ повністю йде на відновлення робочої сили $L(t)$:

$$C(t) = \bullet(t)\,L(t),$$

де $\bullet(t)$ — норма споживання;

4) витрати праці $L(t)$ пропорційні випуску валової продукції $x(t)$:

$$L(t) = b(t)\,x(t),$$

де $b(t)$ — норма трудомісткості.

При виконанні всіх чотирьох припущень динаміка $x(t)$ вільного розвитку односекторної економіки описується замкненою однопродуктовою моделлю Леонтьєва [9]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -p(t)x(t), \tag{1.48}$$

$$x(t_0) = x_o, \tag{1.49}$$

де $p(t) = \dfrac{a(t)+\gamma(t)b(t)-1}{\upsilon(t)}$; x_0 — валовий продукт у початковий момент часу t_0 $(t_0 = 0)$.

Рівняння (1.48) — це лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $x(t)$ з початковою умовою (1.49).

1. Знайти закон розвитку валової продукції $x(t)$ при розширеному виробництві, якщо
$a(t) = 0{,}38$; $\upsilon(t) = 0{,}4$; $\gamma(t) = 4{,}2$; $b(t) = 0{,}14$; $x_o = 1050$.

2. Побудувати графік розвитку економіки $x(t)$ у декартовій системі координат.

Розв'язання

Обчислимо параметр $p(t)$, що входить у диференціальне рівняння (1.48):

$$p(t) = \frac{0{,}38 + 4{,}2 \cdot 0{,}14 - 1}{0{,}4} = -0{,}08 = p_0 = \text{const}.$$

Оскільки диференціальне рівняння (1.48) з початковою умовою (1.49) описує вільне функціонування одновимірної економічної системи і параметр $p(t) = p_0 = \text{const}$, то динаміка розвитку валової продукції $x(t)$ при розширеному виробництві обчислюється згідно з формулою (1.21):

$$x(t) = x^0 e^{-p_0 t} = 1050 e^{0{,}08t}. \qquad (1.50)$$

Співвідношення (1.50) можна вважати експоненціальним законом розвитку валової продукції $x(t)$ при розширеному виробництві.

Траєкторію $x(t)$ розвитку односекторної економіки показано на рис. 1.7.

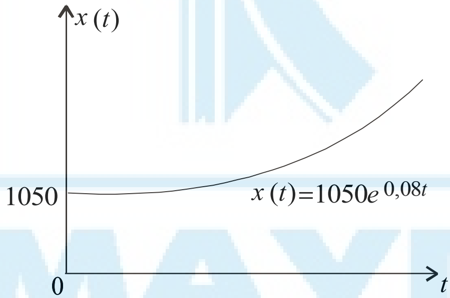


Рис. 1.7

§ 2. АГРЕГУВАННЯ ГАЛУЗЕЙ І МІЖГАЛУЗЕВИХ ПОТОКІВ У БАГАТОГАЛУЗЕВІЙ ЕКОНОМІЧНІЙ СИСТЕМІ, ЩО ОПИСУЄТЬСЯ СТАТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ "ВИТРАТИ—ВИПУСК" ЛЕОНТЬЄВА

2.1. Агрегування в моделях міжгалузевих зв'язків

У моделюванні міжгалузевих зв'язків економічної системи (ЕС) важливою є проблема агрегування галузей та міжгалузевих потоків для спрощення моделі. Розглянемо цю проблему на статичній моделі Леонтьєва [9]. Нехай функціонування економічної системи (рис. 2.1), що складається з чотирьох галузей Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, описується статичною моделлю Леонтьєва у векторно-матричній формі [9]:

$$\overline{Y} = (E - A)\overline{X}\ , \tag{2.1}$$

де $\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ — вектор валової продукції чотирьох галузей (x_i — валова продукція галузі $\Gamma_i\,(i = \overline{1,4})$);

$\overline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ — вектор кінцевої продукції чотирьох галузей (y_i — кінцева продукція галузі $\Gamma_i\,(i = \overline{1,4})$);

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ — виробнича матриця ЕС (a_{ij} — кількість i-ї продукції, що витрачається на виробництво одиниці j-ї продукції);

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — одинична матриця.

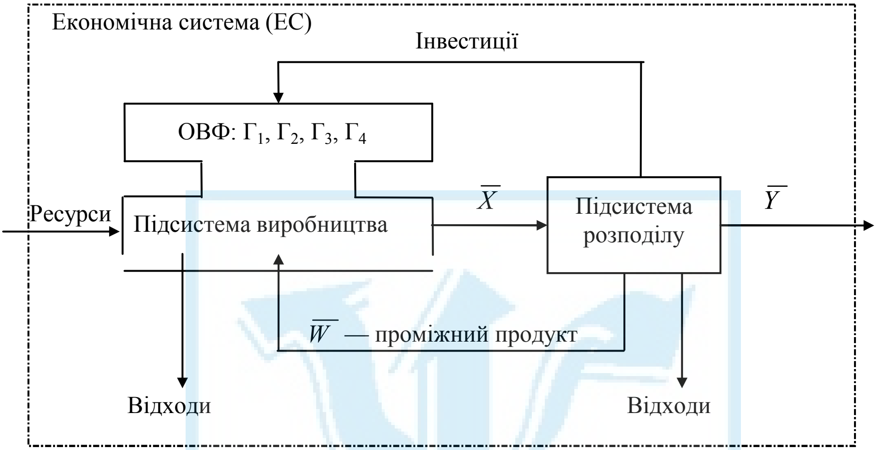


Рис. 2.1

Безпосередньо модель чотиригалузевої економіки набирає вигляду

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4, \\ y_2 = x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4, \\ y_3 = x_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4, \\ y_4 = x_4 - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3 - a_{44}x_4. \end{cases}$$

За допомогою вектора $\overline{X}$ і матриці A легко обчислюється матриця міжгалузевих потоків ЕС:

$$\Pi = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} — кількість продукції галузі Γ_i, що витрачається в галузі Γ_j на виробництво,

$$x_{ij} = a_{ij}x_j \quad (i, j = \overline{1,4}). \tag{2.2}$$

Агрегуються галузі Γ_2 і Γ_3 в нову галузь (сектор) Γ_r . Виникає нова спрощена економічна система (ЕС*), що складається з трьох галузей: Γ_1, Γ_r, Γ_4. Функціонування ЕС* описується новою статичною моделлю Леонтьєва:

$$\overline{Y}^* = (E^* - A^*)\overline{X}^*, \qquad (2.3)$$

де $\overline{X}^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_r \\ x_4 \end{pmatrix}$ — вектор валової продукції ЕС*;

$\overline{Y}^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_r^* \\ y_4^* \end{pmatrix}$ — вектор кінцевої продукції ЕС*;

$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{1r}^* & a_{14}^* \\ a_{r1}^* & a_{rr}^* & a_{r4}^* \\ a_{41}^* & a_{4r}^* & a_{44}^* \end{pmatrix}$ — виробнича матриця ЕС*;

$E^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — одинична матриця;

$\Pi^* = \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{1r}^* & x_{14}^* \\ x_{r1}^* & x_{rr}^* & x_{r4}^* \\ x_{41}^* & x_{4r}^* & x_{44}^* \end{pmatrix}$ — матриця міжгалузевих потоків ЕС*.

Визначимо всі елементи (параметри агрегування) нової спрощеної моделі ЕС*: матриці Π^* і A^*. Очевидно, за змістом міжгалузевих потоків мають місце рівності, що визначають елементи матриці Π^*:

$$\begin{aligned} &x_{11}^* = x_{11}, && x_{1r}^* = x_{12} + x_{13}, && x_{14}^* = x_{14}, \\ &x_{r1}^* = x_{21} + x_{31}, && x_{rr}^* = x_{22} + x_{23} + x_{32} + x_{33}, && x_{r4}^* = x_{24} + x_{34}, \\ &x_{41}^* = x_{41}, && x_{4r}^* = x_{42} + x_{43}, && x_{44}^* = x_{44}. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Звідси, використовуючи співвідношення $x_r = x_2 + x_3$,

$x_{rr}^* = a_{rr}^* x_r$, $x_{ir}^* = a_{ir}^* x_r$, $x_{ri}^* = a_{ri}^* x_i$ $(i = 1,4)$ та рівності (2.2), (2.4), дістаємо коефіцієнти прямих затрат:

$$a_{1r}^* = \frac{x_{1r}^*}{x_r} = \frac{x_{12} + x_{13}}{x_2 + x_3} = \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{x_2 + x_3},$$

$$a_{4r}^{*} = \frac{a_{42}x_2 + a_{43}x_3}{x_2 + x_3},$$

$$a_{r1}^{*} = \frac{x_{r1}^{*}}{x_1} = \frac{x_{21} + x_{31}}{x_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{31}x_1}{x_1} = a_{21} + a_{31},$$

$$a_{r4}^{*} = \frac{x_{r4}^{*}}{x_4} = \frac{x_{24} + x_{34}}{x_4} = \frac{a_{24}x_4 + a_{34}x_4}{x_4} = a_{24} + a_{34},$$

$$a_{rr}^{*} = \frac{x_{rr}^{*}}{x_r} = \frac{x_{22} + x_{23} + x_{32} + x_{33}}{x_2 + x_3} = \frac{a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}{x_2 + x_3} =$$
$$= \frac{(a_{22} + a_{32})x_2 + (a_{23} + a_{33})x_3}{x_2 + x_3},$$

$$a_{11}^{*} = a_{11}, \quad a_{14}^{*} = a_{14}, \quad a_{41}^{*} = a_{41}, \quad a_{44}^{*} = a_{44}.$$

Це дає змогу сформувати матрицю виробничих витрат A^{*} нової агрегованої тригалузевої моделі економіки:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dfrac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{x_2 + x_3} & a_{14} \\ a_{21} + a_{31} & \dfrac{(a_{22} + a_{32})x_2 + (a_{33} + a_{23})x_3}{x_2 + x_3} & a_{24} + a_{34} \\ a_{41} & \dfrac{a_{42}x_2 + a_{43}x_3}{x_2 + x_3} & a_{44} \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

За допомогою матриці A^{*} і формули (2.3) будуємо безпосередньо агреговану модель економіки:

$$\begin{cases} y_1^{*} = x_1 - a_{11}^{*}x_1 - a_{1r}^{*}x_r - a_{14}^{*}x_4, \\ y_r^{*} = x_r - a_{r1}^{*}x_1 - a_{rr}^{*}x_r - a_{r4}^{*}x_4, \\ y_4^{*} = x_r - a_{41}^{*}x_1 - a_{4r}^{*}x_r - a_{44}^{*}x_4. \end{cases} \qquad (2.6)$$

2.2. Контрольні завдання

Завдання 4. Економічна система (ЕС) складається з чотирьох галузей Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, має виробничу матрицю A і вектор $\overline{X}$ валової продукції:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}14 & 0{,}13 & 0{,}1 \\ 0{,}13 & 0{,}29 & 0{,}15 & 0{,}25 \\ 0{,}12 & 0{,}11 & 0{,}15 & 0{,}17 \\ 0{,}11 & 0{,}1 & 0{,}16 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{X} = \begin{pmatrix} 232{,}2 \\ 47{,}4 \\ 58{,}9 \\ 41 \end{pmatrix}.$$

Агрегуються галузі Γ_2 і Γ_3 у нову галузь (сектор) Γ_r. Виникає нова спрощена економічна система (ЕС*), що складається з трьох галузей: Γ_1, Γ_r, Γ_4.

1. Розрахувати матрицю міжгалузевих потоків П* агрегованої ЕС*.
2. Розрахувати виробничу матрицю A^* для ЕС*.
3. Розписати статичну модель Леонтьєва (2.3) нової агрегованої економічної системи (ЕС*) у вигляді неоднорідної системи лінійних рівнянь (2.6).

Розв'язання

1. Елементи матриці П будуємо за формулою (2.2):

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}35\cdot 232{,}2 & 0{,}14\cdot 47{,}4 & 0{,}13\cdot 58{,}9 & 0{,}1\cdot 41 \\ 0{,}13\cdot 232{,}2 & 0{,}29\cdot 47{,}4 & 0{,}15\cdot 58{,}9 & 0{,}25\cdot 41 \\ 0{,}12\cdot 232{,}2 & 0{,}11\cdot 47{,}4 & 0{,}15\cdot 58{,}9 & 0{,}17\cdot 41 \\ 0{,}11\cdot 232{,}2 & 0{,}1\cdot 47{,}4 & 0{,}16\cdot 58{,}9 & 0{,}1\cdot 41 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 81{,}27 & 6{,}64 & 7{,}66 & 4{,}1 \\ 30{,}19 & 13{,}75 & 8{,}84 & 10{,}25 \\ 27{,}86 & 5{,}21 & 8{,}84 & 6{,}97 \\ 25{,}54 & 4{,}74 & 9{,}42 & 4{,}1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи елементи матриці П, за формулами (2.4) обчислюємо елементи матриці міжгалузевих потоків П*:

$x_{11}^* = 81{,}27$ $\quad x_{1r}^* = 6{,}64 + 7{,}66$ $\quad x_{14}^* = 4{,}1$

$x_{r1}^* = 30{,}19 + 27{,}86$ $\quad x_{rr}^* = 13{,}75 + 8{,}84 + 5{,}21 + 8{,}84$ $\quad x_{r4}^* = 10{,}25 + 6{,}97$

$x_{41}^* = 25{,}54$ $\quad x_{4r}^* = 4{,}74 + 9{,}42$ $\quad x_{44}^* = 4{,}1.$

Таким чином, матриця

$$\Pi^* = \begin{pmatrix} 81{,}27 & 14{,}3 & 4{,}1 \\ 58{,}05 & 36{,}64 & 17{,}22 \\ 25{,}54 & 14{,}16 & 4{,}1 \end{pmatrix}.$$

2. Виробничу матрицю агрегованої ЕС* обчислюємо за формулою (2.5):

$$A^* = \begin{pmatrix} 0{,}35 & \dfrac{0{,}14 \cdot 47{,}4 + 0{,}13 \cdot 58{,}9}{47{,}4 + 58{,}9} & 0{,}1 \\ 0{,}13 + 0{,}12 & \dfrac{(0{,}29 + 0{,}11) \cdot 47{,}4 + (0{,}15 + 0{,}15) \cdot 58{,}9}{47{,}4 + 58{,}9} & 0{,}25 + 0{,}17 \\ 0{,}11 & \dfrac{0{,}1 \cdot 47{,}4 + 0{,}16 \cdot 58{,}9}{47{,}4 + 58{,}9} & 0{,}1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}135 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}34 & 0{,}42 \\ 0{,}11 & 0{,}13 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

3. На основі коефіцієнтів матриці A^* за формулою (2.6) будуємо неоднорідну систему лінійних рівнянь, що описує функціонування нової агрегованої економічної системи:

$$\begin{cases} y_1^* = x_1 - 0{,}35x_1 - 0{,}135x_r - 0{,}1x_4, \\ y_r^* = x_r - 0{,}25x_1 - 0{,}34x_r - 0{,}42x_4, \\ y_4^* = x_4 - 0{,}11x_1 - 0{,}13x_r - 0{,}1x_4. \end{cases}$$

§ 3. ОБЧИСЛЕННЯ ЕНТРОПІЇ ТА КІЛЬКОСТІ ІНФОРМАЦІЇ В ДИСКРЕТНОМУ КАНАЛІ ПЕРЕДАВАННЯ СИГНАЛІВ

3.1. Опис дискретного каналу

Дискретним називається такий канал (рис. 3.1), у якого сигнали джерела (входу) X і одержувача (виходу) Y є послідовностями дискретних випадкових величин (символів) [1].

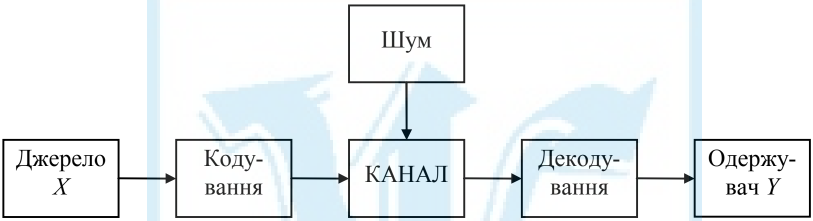


Рис. 3.1

Позначимо

$X = \begin{Bmatrix} x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ p(x_1) & \dots & p(x_i) & \dots & p(x_n) \end{Bmatrix}$ — ансамбль (алфавіт) повідомлень на вході,

$Y = \begin{Bmatrix} y_1 & \dots & y_j & \dots & y_m \\ p(y_1) & \dots & p(y_j) & \dots & p(y_m) \end{Bmatrix}$ — ансамбль (алфавіт) сигналів на виході,

де $p(x_i)$ $(p(y_j))$ — імовірність появи повідомлення (сигналу) на вході (виході) дискретного інформаційного каналу.

Для повного опису каналу на інтервалі часу, що відповідає передаванню одного символу, необхідно задати умовні ймовірності $p(y_j|x_i)$ і $p(x_i|y_j)$ переходів (рис. 3.2).

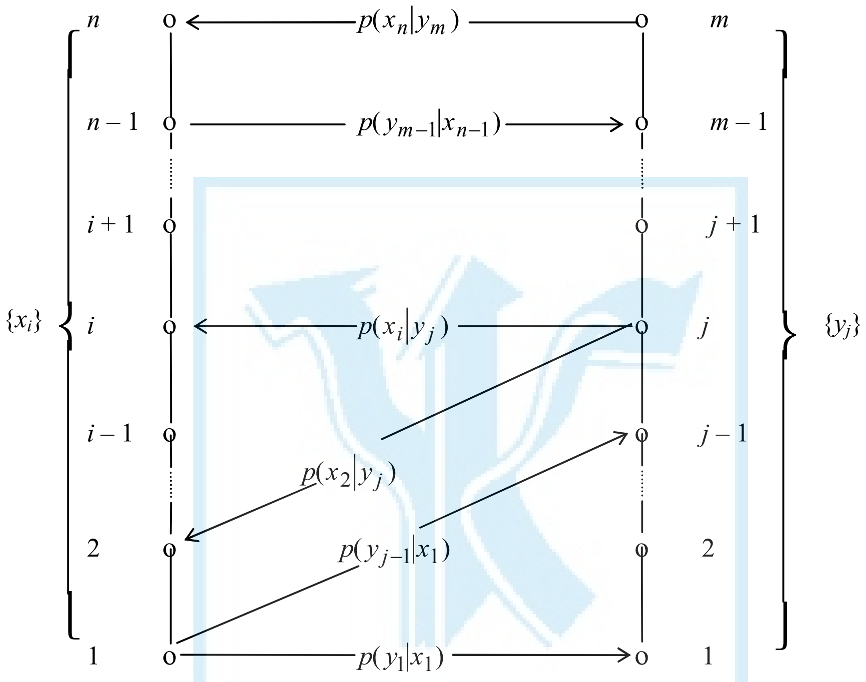


Рис. 3.2. Схема “віялів невизначеності” при наявності шуму в каналі

Оскільки поява символу повідомлення x_i на вході дискретного каналу є подією випадковою, то вважають, що спостерігається невизначеність результату. Унаслідок експерименту невизначеність зменшується і при цьому одержується деяка кількість інформації [1; 8]. Тоді власна інформація символу x_i (кількість інформації, що доставляється самим символом x_i або довільним іншим, однозначно з ним пов’язаним) визначається так:

$$I(x_i) = -\log_a p(x_i)\,. \tag{3.1}$$

Аналогічно власна інформація символу y_j

$$I(y_j) = -\log_a p(y_j) . \qquad (3.2)$$

Вибір основи логарифма $\log_a p(x_i)$ визначає одиницю кількості інформації. Якщо a = 2, то одиниця інформації називається двоїстою (біт), для $a = e$ — натуральною (нат), а для $a = 10$ — десятковою (діт, хартлі). Двоїстою одиницею кількості інформації, наприклад, є інформація символу, що має два рівноймовірні стани [3]:

$$\text{біт} = -\log_2 \frac{1}{2} .$$

Перехід від однієї системи логарифмів до іншої еквівалентний простій зміні одиниці вимірювання інформації. Цей перехід відбувається згідно з формулою

$$\log_b k = \log_b a \log_a k .$$

Звідси

$$1\ \text{нат} = \log_2 e \cdot \text{біт} = 1{,}443\ \text{біт};$$

$$1\ \text{діт} = \log_2 10 \cdot \text{біт} = 3{,}32\ \text{біт}.$$

3.2. Умовна власна інформація

У загальному випадку повідомлення X і сигнал Y на вході та виході дискретного каналу залежні. Нехай $p(x_i|y_j)$ — умовна ймовірність того, що реалізувався стан x_i ансамблю X за умови, що ансамбль Y перейшов у стан y_j. Тоді за аналогією з власною інформація, що міститься в символі повідомлення x_i, за умови, що сигнал набув значення y_j, визначається так:

$$I(x_i|y_j) = -\log_a p(x_i|y_j) . \qquad (3.3)$$

Така інформація називається умовною власною.

Аналогічно умовна власна інформація

$$I(y_j|x_i) = -\log_a p(y_j|x_i) , \qquad (3.4)$$

де $p(y_j|x_i)$ — умовна ймовірність того, що прийнято сигнал y_j за умови, що передано повідомлення x_i.

3.3. Взаємна інформація

Вважатимемо, що ансамблі X *і* Y залежні. У результаті експерименту (прийняття символу сигналу y_j) апостеріорна ймовірність $p(x_i|y_j)$ появи символу x_i зміниться порівняно з апріорною ймовірністю $p(x_i)$. Тоді кількість інформації відносно символу повідомлення x_i, що доставляється символом сигналу y_j, можна визначити так:

$$I(x_i;y_j) = I(x_i) - I(x_i|y_j) = \log_a \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = \log_a \frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)p(y_j)}. \quad (3.5)$$

Це і є взаємна інформація. Аналогічно взаємна кількість інформації відносно символу сигналу y_j за умови, що передається символ повідомлення x_i, визначається так:

$$I(y_j;x_i) = I(y_j) - I(y_j|x_i) = \log_a \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} = \log_a \frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)p(y_j)}, \quad (3.6)$$

оскільки $p(x_i,y_j) = p(x_i|y_j)p(y_j) = p(y_j|x_i)p(x_i)$ [4],

де $p(x_i,y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ — імовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина X приймає в експерименті значення x_i, а випадкова величина Y — значення y_j.

3.4. Основні властивості взаємної інформації

1. Взаємна інформація може бути від'ємною, додатною і дорівнювати нулю залежно від співвідношень між апріорною $p(x_i)$ і апостеріорною ймовірностями:

$$-\infty < I(x_i;y_j) < \infty. \quad (3.7)$$

2. Взаємна інформація не перевищує власну інформацію:

$$\begin{aligned} I(x_i;y_j) &\le I(x_i), \\ I(x_i;y_j) &\le I(y_j). \end{aligned} \quad (3.8)$$

3. Для заданої ймовірності $p(x_i)$ взаємна інформація $I(x_i;y_j)$ досягає максимуму, якщо одержаний символ y_j однозначно визначає переданий символ x_i. При цьому

$$P\{x_i|y_j\} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j \end{cases}$$

і це максимальне значення взаємної інформації

$$I(x_i;y_j) = -\log_a p(x_i) = I(x_i)$$

дорівнює власній інформації, що визначається лише апріорною ймовірністю $p(x_i)$ символу x_i.

4. Властивість симетрії:

$$I(x_i;y_j) = I(y_j;x_i), \tag{3.9}$$

тобто інформація, що міститься в y_j відносно x_i, дорівнює інформації, що міститься в x_i відносно y_j. Через цю властивість інформація $I(x_i;y_j)$ називається взаємною інформацією між x_i і y_j.

5. Властивість адитивності кількості інформації:

$$I(x_i,z_k;y_j,q_l) = I(x_i;y_j) + I(z_k;q_l). \tag{3.10}$$

Якщо пара (*X*, *Y*) не залежить від пари (*Z*, *Q*), то інформація, що міститься в парі (y_j,q_l) відносно пари (x_i,z_k), дорівнює сумі інформації, що міститься в y_j відносно x_i, та інформації, що міститься в q_l відносно z_k [1].

3.5. Середня власна інформація (ентропія)

Дискретне джерело зручно характеризувати кількістю власної інформації, що міститься в середньому в одному символі ансамблю *X*. Ця середня кількість власної інформації називається ентропією джерела інформації *X* і визначається так:

$$I(X) = \mathrm{M}[-\log_a p(X)] = \sum_{i=1}^{n} I(x_i)p(x_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_a p(x_i) = H(X), \tag{3.11}$$

де M — символ математичного сподівання випадкової величини [1; 8; 9].

Аналогічно обчислюється середня кількість власної інформації *I(Y)* одержувача інформації *Y* (ентропія *H(Y)* одержувача інформації *Y*):

$$I(Y) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\log p(y_j) = H(Y). \tag{3.12}$$

3.6. Основні властивості ентропії

1. Ентропія невід'ємна:

$$H(X) \geq 0. \qquad (3.13)$$

Знак "дорівнює" ставиться тоді, коли X — невипадкова величина, тобто $p(x_i) = 1$, а $p(x_k) = 0$ для $k \neq i$. При цьому невизначеність відносно ансамблю X відсутня. Таким чином, ентропія є міра невизначеності випадкового ансамблю.

2. Величина ентропії задовольняє нерівність [1]:

$$H(X) \leq \log_a n. \qquad (3.14)$$

Знак "дорівнює" ставиться тоді, коли всі символи алфавіту X є рівноймовірними $p(x_i) = 1/n \ (i = \overline{1,n})$.

3. Властивість адитивності ентропії [1].

У послідовності n незалежних символів ентропія дорівнює сумі ентропій, що містяться в окремих символах

$$H(X^{(1)},...,X^{(n)}) = H(X^{(1)})+...+H(X^{(n)}). \qquad (3.15)$$

3.7. Умовна ентропія

Розглянемо два статистично залежних скінчених ансамблі символів X і Y. Пари символів (x_i, y_j) з імовірностями $p(x_i, y_j)$ можна вважати елементарними символами об'єднаного ансамблю (X, Y) з ентропією

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log_a p(x_i, y_j). \qquad (3.16)$$

Поява символу $x_i \in X$ спричинює появу символу $y_j \in Y$ з умовною ймовірністю

$$p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

При цьому умовна ентропія ансамблю Y у припущенні, що вибрано символ x_i, обчислюється за формулою

$$H(Y|x_i) = \mathrm{M}[-\log_a p(Y|x_i)] = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i)\log_a p(y_j|x_i). \qquad (3.17)$$

Кожному x_i відповідає певне значення ентропії $H(Y|x_i)$, тобто $H(Y|x_i)$ — випадкова величина.

Тоді середня умовна ентропія випадкової величини Y, обчислена за умови, що відомо значення іншої випадкової величини X, становить

$$H(Y|X)=\mathrm{M}[-\log_a p(Y|X)]=\sum_{i=1}^{n}p(x_i)H(Y|x_i)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\sum_{j=1}^{m}p(y_j|x_i)\log_a p(y_j|x_i). \qquad (3.18)$$

Аналогічно обчислюється умовна ентропія ансамблю X у припущенні, що вибрано символ y_j, тобто

$$H(X|y_i)=\mathrm{M}[-\log_a p(X|y_i)]=-\sum_{i=1}^{n}p(x_i|y_j)\log_a p(x_i|y_j), \qquad (3.19)$$

і середня умовна ентропія випадкової величини X за умови, що відомо значення іншої випадкової величини Y:

$$H(X|Y)=\mathrm{M}[-\log_\mathrm{a} p(X|Y)]=\sum_{j=1}^{m}p(y_j)H(X|y_j)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{m}p(y_j)\sum_{i=1}^{n}p(x_i|y_j)\log_a p(x_i|y_j). \qquad (3.20)$$

Ентропія об’єднаного ансамблю $H(X,Y)$ задовольняє таким співвідношенням [1; 8]:

а) $H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)=H(Y)+H(X|Y)$, (3.21)

якщо X і Y залежні;

б) $H(X,Y)=H(X)+H(Y)$, (3.22)

якщо X і Y незалежні.

Для об’єднаного ансамблю (X,Y) умовна ентропія задовольняє нерівностям [1]

$$\begin{gathered}H(Y|X)\le H(Y),\\ H(X|Y)\le H(X).\end{gathered} \qquad (3.23)$$

3.8. Середня взаємна інформація

При вивченні проблем передавання сигналів в інформаційних каналах важливу роль відіграє середнє значення взаємної інформації між елементами різних ансамблів.

Розглянемо умовне середнє значення взаємної інформації для об'єднаного ансамблю (*X,Y*). Якщо сигнал прийняв значення y_j, то інформація, що міститься в реалізації y_j прийнятого сигналу відносно ансамблю повідомлень *X*, визначається так:

$$I(X;y_j) = \mathrm{M}\left[\log_a \frac{p(X|y_j)}{p(X)}\right] = \sum_{i=1}^{n} p(x_i|y_j) I(x_i;y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p(x_i|y_j) \log_a \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}, \tag{3.24}$$

тобто це середня взаємна інформація між ансамблем *X* і реалізацією y_j.

Аналогічно інформація, що міститься в ансамблі одержаних сигналів *Y* відносно реалізації переданого повідомлення x_i, визначається так:

$$I(x_i;Y) = \mathrm{M}\left[\log_a \frac{p(Y|x_i)}{p(Y)}\right] = \sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i) I(y_j;x_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i) \log_a \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}, \tag{3.25}$$

тобто це середня взаємна інформація між ансамблем *Y* і реалізацією x_i.

Нарешті, середня взаємна інформація між ансамблем сигналів *Y* і ансамблем повідомлень *X* визначається так:

$$I(X;Y) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j) I(X;y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p(y_j) p(x_i|y_j) \log_a \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j) \log_a \frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)p(y_j)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i) \log_a \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) I(x_i;Y), \tag{3.26}$$

тобто це кількість інформації, що міститься в середньому в ансамблі одержуваних символів Y відносно ансамблю символів X, що передаються.

3.9. Основні властивості середньої взаємної інформації

1. Середня взаємна інформація симетрична, тобто

$$I(X;Y) = I(Y;X), \tag{3.27}$$

оскільки

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) I(x_i;Y) = I(Y;X).$$

2. Середня взаємна інформація не перевищує власну інформацію:

$$I(X;Y) \le \begin{cases} H(X) = I(X), \\ H(Y) = I(Y). \end{cases} \tag{3.28}$$

3. Середня взаємна інформація завжди невід’ємна:

$$I(X;Y) \ge 0. \tag{3.29}$$

4. Співвідношення між середньою взаємною інформацією і ентропіями, що належать до об’єднаного ансамблю (X,Y) [1; 8]:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y), \tag{3.30}$$

тобто середня кількість інформації про повідомлення, що міститься в одержаному сигналі, дорівнює середній кількості інформації, що необхідна для визначення повідомлення X, мінус середня кількість інформації, яка все ще потрібна для визначення X після приймання сигналу Y. Тоді ентропію $H(X)$ слід вважати середньою кількістю переданої інформації, а умовну ентропію $H(X|Y)$ — середньою кількістю інформації, що втрачена внаслідок впливу шуму;

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X), \tag{3.31}$$

тобто середня кількість інформації є різницею між середньою кількістю інформації, необхідної для визначення одержаного сигналу, і середньою кількістю інформації, необхідної для визначення того самого сигналу, коли відомо передане повідомлення. Тоді умовну ентропію $H(Y|X)$ слід вважати середньою кількістю інформації, що необхідна для визначення перешкоди в каналі, тобто це є ентропія шуму в каналі.

Очевидно, формули (3.26), (3.30), (3.31) дають однакові результати і ту чи іншу формулу під час розв’язання конкретної задачі вибирають з міркування зручності математичних обмежень.

3.10. Контрольні завдання

Завдання 5. Обчислення ентропії та кількості інформації в системі передавання сигналів

По дискретному інформаційному каналу з шумом передаються сигнали x_1 і x_2 від джерела X (див. рис. 3.1). Унаслідок дії шумів одержувач Y на виході інформаційної системи реєструє сигнали y_1, y_2, y_3. Імовірності $p(x_i, y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ одночасної появи сигналів x_i, y_j ($i = \overline{1,2}$; $j = \overline{1,3}$) відповідно на вході X і виході Y інформаційного каналу подані в таблиці.

Закон розподілу ймовірностей двох дискретних випадкових величин (X,Y)

X	Y		
	y_1	y_2	y_3
x_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$

Параметри $n = 2$; $m = 3$.

Обчислити:

1) взаємну інформацію $I(x_2; y_2)$, $I(x_1; y_3)$;
2) середню кількість умовної взаємної інформації $I(X, y_1)$;
3) середню кількість умовної взаємної інформації $I(x_1, Y)$;
4) середню кількість взаємної інформації $I(X, Y)$;
5) ентропію $H(X)$ джерела інформації X;
6) ентропію $H(У)$ одержувача інформації Y;
7) спільну ентропію $H(X,У)$ інформаційної системи.

Розв'язання

1. Обчислимо взаємну інформацію за формулою (3.5):

$$I(x_1;y_3) = \log_2 \frac{p(x_1|y_3)}{p(x_1)}$$

або через властивість симетрії

$$I(x_1;y_3) = I(y_3;x_1) = \log_2 \frac{p(y_3|x_1)}{p(y_3)} .$$

Умовні та безумовні ймовірності знайдемо, використавши дані наведеної таблиці та формули [4]

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j), \quad p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j);$$

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \; p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}. \tag{3.32}$$

За формулами (3.32)

$$p(x_1) = p(x_1,y_1) + p(x_1,y_2) + p(x_1,y_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{7}{16};$$

$$p(x_2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16}; \quad p(y_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8};$$

$$p(y_2) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}; \quad p(y_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}; \tag{3.33}$$

$$p(y_2|x_2) = \frac{p(x_2,y_2)}{p(x_2)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{3};$$

$$p(x_1|y_3) = \frac{p(x_1,y_3)}{p(y_3)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}.$$

Тоді кількість взаємної інформації

$$I(x_1;y_3)=\log_2\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{16}}=\log_2\frac{16}{21}=4-4{,}39=-0{,}39 \text{ біт},$$

$$I(x_2;y_2)=\log_2\frac{p(y_2|x_2)}{p(y_2)}=\log_2\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}=2-1{,}585=0{,}415 \text{ біт}.$$

2. Середня взаємна інформація в реалізації сигналу на виході y_1 відносно випадкової величини X на вході каналу визначається за формулою (3.24):

$$I(X;y_1)=\sum_{i=1}^{2}p(x_i|y_1)\log_2\frac{p(x_i|y_1)}{p(x_i)}=$$

$$=p(x_1|y_1)\log_2\frac{p(x_1|y_1)}{p(x_1)}+p(x_2|y_1)\log_2\frac{p(x_2|y_1)}{p(x_2)}.$$

Визначимо умовні ймовірності:

$$p(x_1|y_1)=\frac{p(x_1,y_1)}{p(y_1)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3};$$

$$p(x_2|y_1)=\frac{p(x_2,y_1)}{p(y_1)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}.$$

Середня інформація

$$I(X;y_1)=\frac{2}{3}\log_2\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{8}}+\frac{1}{3}\log_2\frac{\frac{1}{3}}{\frac{9}{16}}=\frac{2}{3}\log_2\frac{16}{9}+\frac{1}{3}\log_2\frac{16}{27}=$$

$$=0{,}56-0{,}25=0{,}31 \text{ біт}.$$

3. Середня взаємна інформація у вихідній величині Y відносно реалізації випадкової величини на вході x_1 визначається за формулою (3.25):

$$I(x_1;Y) = \sum_{j=1}^{3} p(y_j|x_1)\log_2 \frac{p(y_j|x_1)}{p(y_j)} =$$

$$= p(y_1|x_1)\log_2 \frac{p(y_1|x_1)}{p(y_1)} + p(y_2|x_1)\log_2 \frac{p(y_2|x_1)}{p(y_2)} + p(y_3|x_1)\log_2 \frac{p(y_3|x_1)}{p(y_3)}.$$

Умовні ймовірності

$$p(y_1|x_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(x_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{4}{7};$$

$$p(y_2|x_1) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(x_1)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{1}{7};$$

$$p(y_3|x_1) = \frac{p(x_1, y_3)}{p(x_1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{16}} = \frac{2}{7}.$$

Середня інформація

$$I(x_1;Y) = \frac{4}{7}\log_2 \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} + \frac{1}{7}\log_2 \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}} + \frac{2}{7}\log_2 \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{8}} =$$

$$= \frac{4}{7}\log_2 \frac{32}{21} + \frac{1}{7}\log_2 \frac{4}{7} + \frac{2}{7}\log_2 \frac{16}{21} =$$

$$= \frac{4}{7}[\log_2 32 - \log_2 21] + \frac{1}{7}[\log_2 4 - \log_2 7] + \frac{2}{7}[\log_2 16 - \log_2 21] =$$

$$= 0{,}39 - 0{,}11 - 0{,}11 = 0{,}17 \text{ біт}.$$

4. Середня взаємна інформація у випадковій величині Y на виході каналу відносно випадкової величини X на вході визначається за формулою (3.26):

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_i)p(y_j|x_i)\log_2 \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} = p(x_1)\left[p(y_1|x_1)\log_2 \frac{p(y_1|x_1)}{p(y_1)} + \right.$$

$$\left. + p(y_2|x_1)\log_2 \frac{p(y_2|x_1)}{p(y_2)} + p(y_3|x_1)\log_2 \frac{p(y_3|x_1)}{p(y_3)}\right] +$$

$$+ p(x_2)\left[p(y_1|x_2)\log_2 \frac{p(y_1|x_2)}{p(y_1)} + p(y_2|x_2)\log_2 \frac{p(y_2|x_2)}{p(y_2)} + \right.$$

$$\left. + p(y_3|x_2)\log_2 \frac{p(y_3|x_2)}{p(y_3)}\right] =$$

$$= \frac{7}{16}\left[\frac{4}{7}\log_2 \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} + \frac{1}{7}\log_2 \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}} + \frac{2}{7}\log_2 \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{8}}\right] + \frac{9}{16}\left[\frac{2}{9}\log_2 \frac{\frac{2}{9}}{\frac{3}{8}} + \frac{1}{3}\log_2 \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} + \frac{4}{9}\log_2 \frac{\frac{4}{9}}{\frac{3}{8}}\right] =$$

$$= 0{,}008 + 0{,}08 = 0{,}88 \text{ біт.}$$

5. Ентропію $H(X)$ джерела інформації X обчислюємо за формулою (3.11), враховуючи раніше одержані результати (3.33):

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\log_2 p(x_i) = -[p(x_1)\log_2 p(x_1) + p(x_2)\log_2 p(x_2)] =$$

$$= -\left[\frac{7}{16}\log_2 \frac{7}{16} + \frac{9}{16}\log_2 \frac{9}{16}\right] =$$

$$= -\frac{1}{16}[7(\log_2 7 - \log_2 16) + 9(\log_2 9 - \log_2 16)] =$$

$$= -\frac{1}{16}[7(2{,}81 - 4) + 9(3{,}17 - 4)] = 0{,}99 \text{ біт.}$$

6. Для обчислення ентропії $H(Y)$ одержувача інформації Y використовуємо формулу (3.12), беручи до уваги результати (3.33):

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j)\log_2 p(y_j) =$$

$$= -[p(y_1)\log_2 p(y_1) + p(y_2)\log_2 p(y_2) + p(y_3)\log_2 p(y_3)] =$$

$$= -\left[\frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[3(\log_2 3 - \log_2 8) + \log_2 2^{-2})\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}[3(1{,}59 - 3) - 2)] = 1{,}56 \text{ біт.}$$

7. Спільну ентропію $H(X,Y)$ інформаційної системи обчислюємо за формулою (3.16), використовуючи дані таблиці:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i, y_j) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{3} p(x_1, y_j)\log_2 p(x_1, y_j) - \sum_{j=1}^{3} p(x_2, y_j)\log_2 p(x_2, y_j) =$$

$$= -[p(x_1, y_1)\log_2 p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2)\log_2 p(x_1, y_2) +$$

$$+ p(x_1, y_3)\log_2 p(x_1, y_3) + p(x_2, y_1)\log_2 p(x_2, y_1) +$$

$$+ p(x_2, y_2)\log_2 p(x_2, y_2) + p(x_2, y_3)\log_2 p(x_2, y_3)] =$$

$$= -\left[\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} + \frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}\right] =$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\log_2 2^{-2} + \frac{1}{4}\log_2 2^{-3} + \frac{1}{16}\log_2 2^{-4} + \frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16}\right] =$$

$$= -\left[\frac{3}{16}(\log_2 3 - 4) - 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right] = 2{,}2972 \text{ біт.}$$

Зауваження 1. Обчислювати логарифми при основі “два” доцільно за допомогою формули переходу до логарифмів при натуральній основі:

$$\log_2 k = \frac{\ln k}{\ln 2} = \frac{\ln k}{0{,}6931} = 1{,}4428\ \ln k,$$

де $\ln k$ обчислюється за таблицею натуральних логарифмів [2, с. 834].

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Акулиничев Ю. П., Дроздова В. И.* Сборник задач по теории информации. — Томск, 1976. — 144 с.
2. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. — М., 1977. — 870 с.
3. *Дж. ван Гиг.* Прикладная общая теория систем. — М., 1981. — Кн. 1, 2.
4. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М., 1979. — 400 с.
5. *Гудименко Ф. С.* Диференціальні рівняння. — К., 1958. — 207 с.
6. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М., 1975. — 431 с.
7. *Новіков О. М., Оганесян Р. Ц., Ковгар В. Б.* Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу "Сучасна теорія керування". — К., 1998. — 77 с.
8. *Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П.* Введение в системный анализ. — М., 1989. — 367 с.
9. *Пономаренко О. І., Пономаренко В. О.* Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі. — К., 1995. — 239 с.
10. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М., 1989. — 655 с.
11. *Чаки Р.* Современная теория управления. — М., 1975. — 367 с.
12. *Семейко М. Г.* Програма вивчення дисципліни "Теорія систем і системний аналіз". — К.: МАУП, 2000. — 22 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск — *Н. В. Медведєва*
Редактор — *Л. М. Гримальська*
Комп’ютерна верстка — *Т. Г. Замура*

Зам. № ВКЦ-589

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП